

不同信噪比下四种黎曼度量的数学机理和分析

余 婷

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2023年3月20日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月28日

摘 要

针对对称正定矩阵流形, 通过理论分析给出了四种不同的黎曼度量与典型性质, 并通过仿真实验, 分析了正弦信号在叠加不同信噪比的高斯噪声情况下, 信号与噪声之间不同度量下的距离变化趋势。实验结果表明, 不同的黎曼度量将呈现特有的变化趋势。

关键词

矩阵流形, 黎曼度量, 散度

Mathematical Mechanism and Analysis of Four Riemannian Distances with Different Signal-to-Noise Ratios

Ting Yu

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

For symmetric positive definite matrix manifolds, four kinds of Riemannian measurements and typical properties are given by theoretical analysis, and the variation trend of distance between sinusoidal signal and noise under different measurements is analyzed by simulation experiment under the condition of superimposing Gaussian noise with different signal-to-noise ratio. The experimental results show that different Riemannian measures will show unique trends.

Keywords

Matrix Manifold, Riemann Distance, Divergence

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在信息领域中的很多问题都可以归结为黎曼几何的研究对象，而近些年来黎曼流形应用于各领域成为了学术界的一个热点，如水声通信，雷达目标检测，图像处理等领域。文献[1]详细介绍了什么是黎曼几何学，以及黎曼流形的基本概念；文献[2] [3] [4] [5] [6]中叙述了各种距离度量方法的推理，其中使用最广泛的两种距离度量方法是仿射不变黎曼度量[2]和对数欧几里得黎曼度量[4]，它们流行的主要原因是它们是由黎曼度量引起的测地线距离；文献[7]介绍了 SPD 流形上的和两种类型的布雷格曼散度，即 Stein 散度[6]和 Jeffrey 散度[7]，由于信号在空间形成流形，通过流形上的黎曼度量代替欧式空间的欧几里得距离，分析得到的结果更加方便和准确。因此，笔者在黎曼流形理论的数学基础上，分析了正弦信号在叠加不同信噪比的高斯噪声情况下，信号与噪声之间不同度量下的距离变化趋势。

2. 对称正定矩阵流形

在本节，将讨论对称正定流形上的一些几何概念。在本节中使用以下符号： $SPD(n)$ 是实 $n \times n$ SPD 矩阵， I 是 $R^{n \times n}$ 中的单位矩阵， $GL(n, R)$ 是李群， $T_p M$ 是流形 M 中的切空间。

定义 1 [2] (对称正定矩阵流形)： $SPD(n)$ 是 n 维对称正定矩阵所在的空间，

$SPD(n) = \{P \in R^{n \times n} \mid P = P^T, \lambda_{\min}(P) > 0\}$ ，其中 λ_{\min} 代表最小的特征值。

$SPD(n)$ 有良好的性质[1]：1) 它是一个封闭的、非多面体的自对偶凸锥；2) 它包含一个规范的高阶对称空间；3) 它的内部是一个可微黎曼流形。

测量流形上的贴近度量的一种自然方法是考虑流形上两点之间的测地线距离，该距离被定义为连接这两点的最短曲线的长度，最短的曲线距离被称为测地线，类似于 $R^{n \times n}$ 中的直线。而仿射不变黎曼度量和对数欧几里得度量是研究 SPD 矩阵最常见的黎曼结构，下面主要介绍两种由测地线引出的黎曼度量。

定理 1 [2]测地线 $\gamma: [a, b] \rightarrow SPD(n)$ 满足的方程为

$$\ddot{P} - \dot{P}P^{-1}\dot{P} = 0$$

而且过 $A \in SPD(n)$ ，方向为 $v \in v(n) = T_A SPD(n)$ 的测地线方程为

$$\gamma(t) = A^{1/2} \exp(tA^{-1/2}vA^{-1/2})A^{1/2} \quad (0 < t < 1)$$

在 $SPD(n)$ 上定义仿射不变度量[8]

$$\langle X, Y \rangle_P = \langle P^{-1/2}XP^{-1/2}, P^{-1/2}YP^{-1/2} \rangle = \text{tr}(P^{-1}XP^{-1}Y)$$

其中 $P \in SPD(n)$ ， $X, Y \in T_P SPD(n)$ 。显然有 $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ ，又因为

$$\langle X, X \rangle_A = \text{tr}(A^{-1}XA^{-1}X) = \text{tr}(A^{-1/2}XA^{-1/2}A^{-1/2}XA^{-1/2}) = \text{tr}\left(\left(A^{-1/2}XA^{-1/2}\right)^2\right) \geq 0$$

而且等号成立的充要条件是 $X = 0$ ，从而得知此内积是正定的，此外还满足双线性，所以是黎曼度量。在此黎曼内积下，全体对称正定矩阵全体成为一个非正曲率的黎曼流形。

定义 2 [4] (仿射不变黎曼度量)测地线曲线的弧长定义了流形上两点 A 和 B 的黎曼距离为

$$d(A, B) = \left\| \log(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \right\|_F = \left\| \log(A^{-1}B) \right\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \log^2(\lambda_i) \right)^{1/2}$$

其中 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值， $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ 和 $A^{-1}B$ 是相似的，有相同的特征值，尽管 $A^{-1}B$ 不是对称的，但它的特征值是实数并且是正的。

在 SPD 流形上，对数欧几里得黎曼度量是一个用于 SPD 流形的简洁有效的黎曼度量，该度量充分考虑 SPD 流形的几何特性，通过矩阵的对数映射将 SPD 样本矩阵映射到其切空间中，切空间中的样本与原 SPD 流形上的样本是一一对应的关系。由于切空间是一个平面，可以视为欧氏空间，该度量将样本在切空间中的欧氏距离作为原 SPD 矩阵之间的测地距离。

SPD 流形上另一种代数与几何结构，设 $A_1, A_2 \in SPD(n)$ ，定义乘法

$$A_1 \cdot A_2 := \exp(\log(A_1) + \log(A_2))$$

定义 SPD 流形上的对数欧式黎曼度量为

$$\langle X, Y \rangle_A := \langle \log_{*A}(X), \log_{*A}(Y) \rangle_I$$

其中 $X, Y \in T_A SPD(n)$ ， $A \in SPD(n)$ 。

定义 3 [2] (对数欧几里得黎曼度量)流形 $SPD(n)$ 上任意两点 A, B 之间的距离为

$$d(A, B) = \left\| \log_A(B) \right\|_A = \left\| \log(A) - \log(B) \right\|_I$$

上面的对数欧式度量，相应的指数和对数映射满足

$$\log_A(B) = \exp_{*\log(A)}(\log(A) - \log(B))$$

$$\exp_A(X) = \exp(\log(A) + \log_{*A}(X))$$

黎曼距离有如下性质：

- 1) $d(A^{-1}, B^{-1}) = d(A, B)$ 。
- 2) $d(A, B) = d(I, A^{-1/2}BA^{-1/2})$ 。
- 3) $d(A, B) = d(XAX^T, XBX^T), X \in GL(n, R)$ 。

为了避免计算矩阵的对数而产生的计算量大的问题，学者 Cherian 提出了测量来快速计算矩阵之间的距离，通过减少计算的复杂度，极大地降低了计算量。该方法由于只需对矩阵行列式进行计算，而无需对矩阵乘法和矩阵对数等其他复杂度较高的进行操作，从而简化了计算的步骤，节省了计算时间。

定义 4 [7] (Stein 散度) Stein 散度又叫做对数行列式散度， $d_s : SPD(n) \times SPD(n) \rightarrow [0, \infty)$ ，流形 $SPD(n)$ 上任意两点 A, B 之间的 Stein 散度被定义为

$$d_s^2(A, B) = \log \left| \frac{AB}{2} \right| - \frac{1}{2} \log |AB|$$

Stein 散度可以用来度量不同分布之间的差异，但它不是一种严格的距离定义。

定义 5 [9] (Jeffrey 散度) $d_j : SPD(n) \times SPD(n) \rightarrow [0, \infty)$ 是 Bregman 散度的另一种特殊类型，流形 $SPD(n)$ 上任意两点 A, B 之间的 Jeffrey 散度被定义为

$$d_J^2(A, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^{-1}B) + \frac{1}{2} \text{tr}(B^{-1}A) - n$$

该度量不需要矩阵特征值计算或对数计算，同时和仿射不变黎曼度量的许多性质相同。每个度量都是来自于不同的几何、统计或信息理论上的考虑。虽然有些度量试图捕捉 SPD 矩阵的非线性，但并不是所有的这些度量都是由黎曼度量引起的测地线距离，表 1 总结了这些度量及其性质。

Table 1. Comparison of four Riemannian metric properties of SPD matrix [10]

表 1. SPD 矩阵四种黎曼度量性质对比[10]

距离	对称性	三角不等式	仿射不变性	测地距离
仿射不变黎曼度量	满足	满足	满足	是
对数欧几里得黎曼度量	满足	满足	满足	是
Stein 散度	不满足	不满足	满足	否
Jeffrey 散度	满足	不满足	满足	否

3. 实验及仿真分析

实验：随机生成一个正弦信号 $f = \sin wt$ ，一个高斯白噪声，将高斯白噪声叠加到正弦信号上可得下图 1~5。

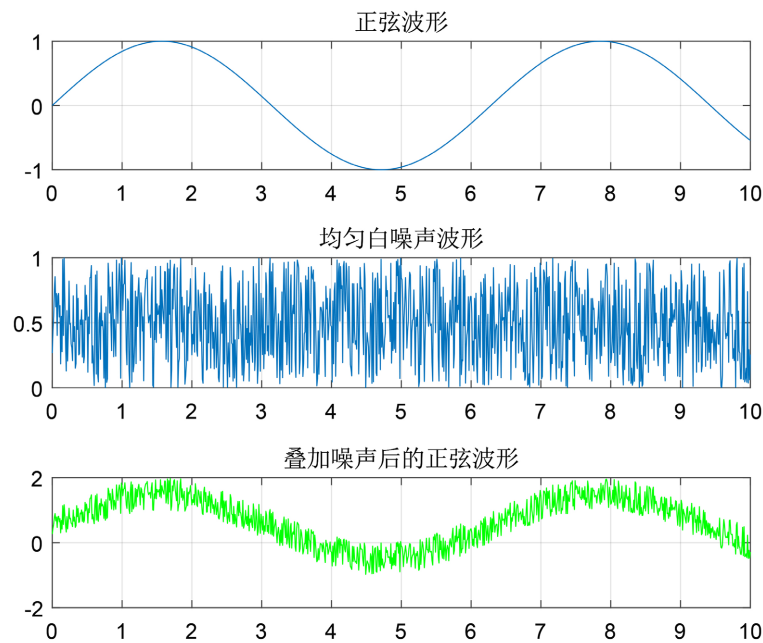


Figure 1. Schematic diagram of sinusoidal waveform and sinusoidal waveform after superimposing noise

图 1. 正弦波形及叠加噪声后的正弦波形示意图

仿真设计：探究高斯白噪声下的正弦信号不同信噪比下的四种黎曼度量变化。

实验信号为 $x = \sin(wt)$ ， $w = 2\pi f$ ， $f = 100$ ，信噪比从 -100 至 100 变化，采样频率为 8000 HZ。

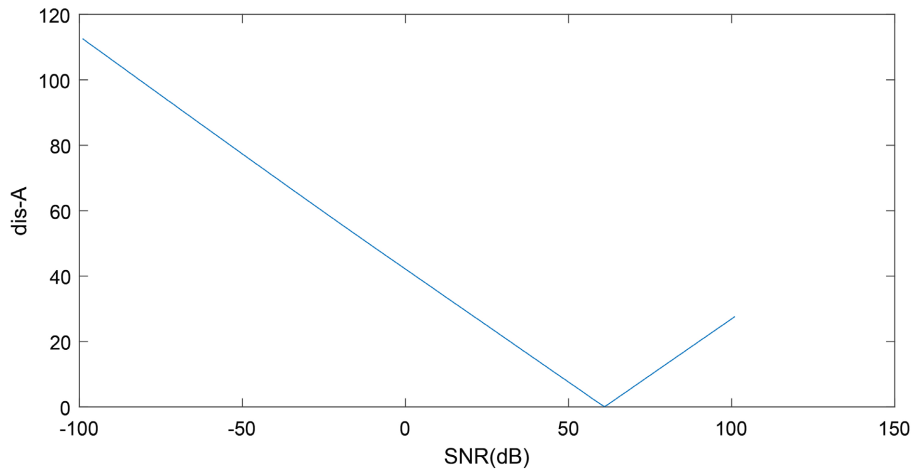


Figure 2. Affine invariant distance change diagram under different SNR
图 2. 不同信噪比下仿射不变距离变化图

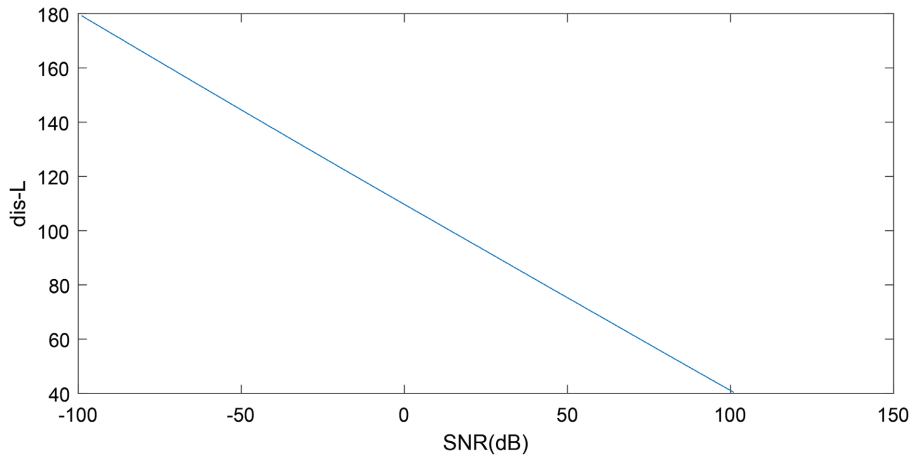


Figure 3. Changes in logarithmic Euclidean distance under different signal-to-noise ratios
图 3. 不同信噪比下对数欧几里得距离变化图

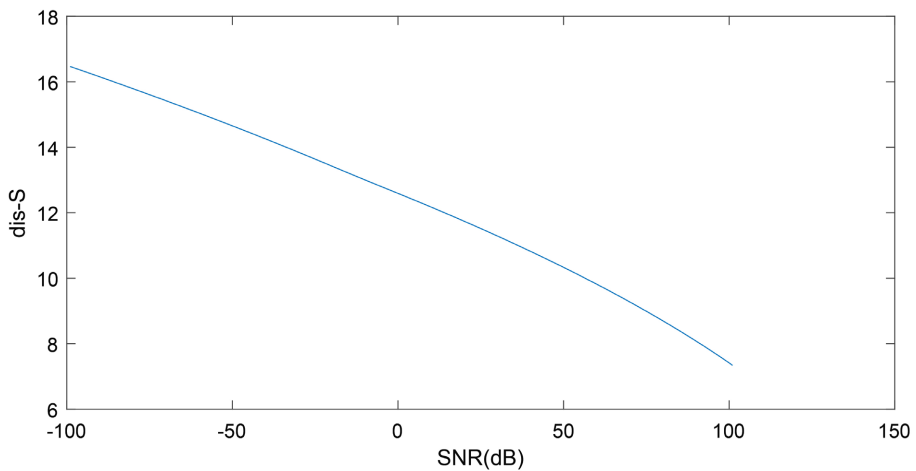


Figure 4. Stein divergence change diagram under different signal-to-noise ratios
图 4. 不同信噪比下 Stein 散度变化图

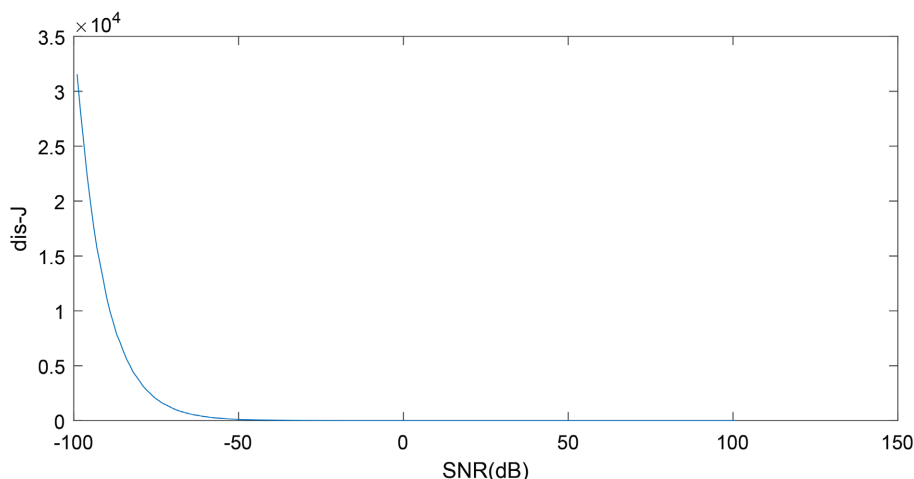


Figure 5. Jeffrey divergence change diagram under different signal-to-noise ratios

图 5. 不同信噪比下 Jeffrey 散度变化图

4. 结论

在数学理论上, 通过仿真实验可知, 不同信噪比下信号和噪声之间的黎曼度量呈现不同的变化趋势, 从上图可知, 信噪比越大的条件下, 信号与噪声的距离逐渐变小, 然而仿射不变黎曼度量的距离出现了一个拐点。因为流形的结构不同, 所定义的黎曼度量算出的距离也有所差距, 在未来, 我们仍然需要继续去探索黎曼度量在哪种特定噪声的信号中更具有精准性。

参考文献

- [1] 陈维桓, 李兴校. 黎曼信息几何引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [2] 孙华飞, 张真宁, 彭林玉, 等. 信息几何导引[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [3] Bhatia, R. (2007) Positive Definite Matrices. Princeton University Press, Princeton, 201-204.
- [4] Pennec, X., Fillard, P. and Ayache, N. (2006) A Riemannian Framework for Tensor Computing. *International Journal of Computer Vision*, **66**, 41-66. <https://doi.org/10.1007/s11263-005-3222-z>
- [5] Arsigny, V., Fillard, P., Pennec, X. and Ayache, N. (2006) Log-Euclidean Metrics for Fast and Simple Calculus on Diffusion Tensors. *Magnetic Resonance in Medicine*, **56**, 411-421. <https://doi.org/10.1002/mrm.20965>
- [6] Pennec, X. (2006) Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic Tools for Geometric Measurements. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **25**, 127-154. <https://doi.org/10.1007/s10851-006-6228-4>
- [7] Harandi, M., Salzmann, M. and Porikli, F. (2014) Bregman Divergences for Infinite Dimensional Covariance Matrices. *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, 23-28 June 2014, 1003-1010. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.132>
- [8] Moakher, M. (2005) A Differential Geometric Approach to the Geometric Mean of Symmetric Positive-Definite Matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis & Applications*, **26**, 735-747. <https://doi.org/10.1137/S0895479803436937>
- [9] Wang, Z.Z. and Vemuri, B. (2004) An Affine Invariant Tensor Dissimilarity Measure and Its Applications to Tensor-Valued Image Segmentation. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision & Pattern Recognition*, Washington DC, 27 June 2004-2 July 2004.
- [10] Vemulapalli, R. and Jacobs, D.W. (2015) Riemannian Metric Learning for Symmetric Positive Definite Matrices. Eprint Arxiv.