

一类耦合KdV型方程的周期波解、孤波解及它们随Hamilton能量的演变关系

张卫国, 张雪*, 姚倩

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2023年3月20日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月28日

摘要

本文研究了一类非线性耦合KdV型波动方程的精确孤波解、周期波解以及它们随Hamilton能量的演变关系。文中利用平面动力系统的方法对方程进行了详细的定性分析, 通过首次积分法求出了该方程的3种孤波解, 其中对有界有理函数波解和扭状孤波解的求解是创新性的解。求出了该方程的7种雅可比椭圆函数周期波解, 尤其是利用恰当变换求出了非对称同宿轨所围的闭轨对应的新周期波解, 以及包围同宿轨的闭轨对应的新周期波解。文中将所求的孤波解和周期波解与Hamilton能量对应起来, 并发现了所研方程为什么能产生孤波解和周期波解, 实际上是该方程解的振幅对应的Hamilton系统的能量变化起着关键的作用。

关键词

方程的精确解, 平面动力系统方法, 精确孤波解, 精确周期波解, 演变关系

Periodic and Solitary Wave Solutions of a Class of Coupled KdV Equation and Their Evolution Relation with Hamilton Energy

Weiguo Zhang, Xue Zhang*, Qian Yao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 20th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 28th, 2023

Abstract

In this paper, the exact solitary and periodic wave solutions of a class of nonlinear coupled KdV

*通讯作者。

文章引用: 张卫国, 张雪, 姚倩. 一类耦合 KdV 型方程的周期波解、孤波解及它们随 Hamilton 能量的演变关系[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1090-1121. DOI: 10.12677/pm.2023.134116

wave equations and their evolution with Hamilton energy are studied. The equation is qualitative analysis in detail by using the method of planar dynamical system. Three kinds of solitary wave solutions of the equation are obtained by the first integral method, among which the bounded rational function wave solution and the kink-shaped solitary wave solutions are new ones. Seven kinds of Jacobi elliptic function periodic wave solutions of the equation are obtained, especially the new periodic wave solutions corresponding to the closed orbit surrounded by the asymmetric homoclinic orbit and the new periodic wave solutions corresponding to the closed orbit surrounding the homoclinic orbit are obtained by using the appropriate transformation. The soliton and periodic wave solutions are associated with the Hamilton energy, and the reason why the soliton and periodic wave solutions can be produced is found. In fact, the energy change of the Hamilton system corresponding to the amplitude of the solution of the equation plays a key role.

Keywords

Exact Solution of Equation, Planar Dynamical System Method, Exact Solitary Wave Solution, Exact Periodic Wave Solution, Evolution Relation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性发展方程精确解的研究有重要的理论和实际意义, 长期以来, 受到国内外应用数学家和物理学家的广泛关注。自Hirota和Satsuma [1]的工作以来, 关于求解耦合非线性发展方程的研究成果已有不少。文献[2]求得了耦合方程

$$\begin{cases} u_t + \alpha v v_x + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0, \\ v_t + \delta (uv)_x + \varepsilon v v_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

型如 $u = A \operatorname{sech}^2 \frac{s}{2} + A_0$, $v = -\frac{\delta}{2\varepsilon} A \operatorname{sech}^2 \frac{s}{2} + B_0$ 的行波解, Guha-Roy [3]考虑了如下非线性浅水波耦合方程

$$\begin{cases} u_t + \beta (u^3)_x + \alpha (v^3)_x + \lambda (u^2)_x + \gamma u_{xxx} = 0, \\ v_t + \delta (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

并求出了它的椭圆余弦波解

$$u(\rho) = \frac{1}{\gamma} \pm \sqrt{\tau_2 - (\tau_2 - \tau_3) \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{1/2(\tau_1 - \tau_3)} (\rho - \rho_3) | m \right]} + 1, \quad v(\rho) = \frac{c_1}{ru - 1},$$

上式中 τ_i 是 $a\tau^3 + c\tau^2 + e\tau + g = 0$ 的实根。在文献[4]中, 讨论了如下耦合 KdV 型方程(为了避免参数过多引起复杂, 我们对文献[4]中所讨论的方程取定 $\gamma = 1$, $\delta = 1$)

$$\begin{cases} u_t + \beta u^2 u_x + \alpha v^2 v_x + \lambda u u_x + u_{xxx} = 0, \\ v_t + (uv)_x + \varepsilon v v_x = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

孤波解的求解, 得到了

$$\begin{cases} u(s) = \frac{2a_2}{A \cosh[\sqrt{a_2}(s+s_0)] - a_3}, \\ v(s) = \frac{2}{s}(c-u), \end{cases} \quad (1.4)$$

的孤波解, 其中 $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $A = \sqrt{a_2^2 - 4a_2a_4}$ 。文献[5]中, 作者通过假 $u(s) = a \left(\frac{p(s)}{q(s)} \right)$, 其中 $p(s)$ 是魏尔斯特拉斯椭圆函数, $q(s) = 1 + bp(s)$, a, b 是任意参数, 求出了方程(1.3)如下形式的周期波解

$$\phi(s) = a \frac{e_3 + (e_2 - e_3)sn^2 \left[(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} s + \theta_0 \right]}{1 + b \left\{ e_3 + (e_2 - e_3)sn^2 \left[(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} s + \theta_0 \right] \right\}}, \quad (1.5)$$

其中 e_1, e_2, e_3 是 $4p^3 - 2g_2p - g_3 = 0$ 的实根。Lu 和 Yang [6] 求出了该方程的 *compacton* 解和 *peakon* 解。文献[7]中作者还指出了当(1.5)式中模数 $m \rightarrow 1$, 就可得方程(1.3)的孤波解。文献[8]讨论了 KdV 方程和带时间导数的 Boussinesq 方程的耦合系统, 并探讨了它们的行波解。文献[9]研究了一类称为时间分数阶非齐次 KdV 方程和非线性时间分数阶 KdV 方程的时间分数阶偏微分方程的数值解。文献[10]首次提出了指数函数法求解分数阶非线性系统的两种改进方法, 并由此导出了分数阶 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 系统的一些精确解。显然, 当 $v=0$ 时耦合方程(1.3)就化为组合 KdV 方程[11] [12] [13], 当 $v=0$ 且 $\beta=0$ 时(1.3)就化为 KdV 方程。故方程(1.3)是一个很重要的模型方程。

本文内容具体安排如下:

在第一章中, 我们将介绍一类非线性耦合方程的研究状况, 然后给出本文的研究内容及创新点。在第二章中, 将对方程(1.3)的有界行波解做详细的定性分析, 给出其有关孤波解和周期波解的存在条件以及存在个数的若干定理。在第三章中, 然后运用首次积分法及适当的变换求出方程(1.3)的 3 类孤波解(一类解即为[4]中的(1.4)式, 另外两类是本文得到的新解, 其中一个是有界有理解[14] [15], 另外一个为扭状孤波解)。在第四章中, 我们将对耦合 KdV 型方程的 7 类雅可比椭圆函数周期波解求解。在第五章中, 我们还将研究该方程周期波解与孤波解随 *Hamilton* 能量变化的演化关系。在第六章中, 通过各章节的分析与讨论, 我们将给出全文的结论。

值得指出:

1) 近来求解非线性发展方程周期波解的精确解及相关问题的研究正受到越来越多学者的关注[3] [4] [5] [16]-[27]。但由于计算复杂和技巧性较强的原因, 以往文献[16] [17] [18]大多只求出了在相图中包含于对称同宿轨的闭轨对应的周期波解, 而对于方程所具有的非对称同宿轨线包含的闭轨对应的周期波解的求解以及包围同宿轨的闭轨对应的周期波解的求解, 这类问题研究的文献却很少。本文对这一难点开展了研究, 通过构造恰当的变换求出了所研方程非对称同宿轨线所围的闭轨对应的周期解及包围同宿轨线的闭轨对应的周期解。这是本文对以往文献的推进之一。

2) 以往求椭圆函数周期波解的文献, 很少叙述解中所含模数 k 究竟是什么[3] [4] [5] [25] [26] [27], 以至于使人难以理解它为什么是变量, 为什么可以令它趋于 1 而得到孤波解。本文我们用首次积分方法, 并运用恰当的变换不仅求出了孤波解和椭圆函数周期波解, 而且对每个求出的椭圆函数周期波解给出了模数 k 的具体形式, 它是 *Hamilton* 能量 h 的函数, h 在某相应的区间取值; 而每个孤波解则对应于确定的 *Hamilton* 能量值。这是有意义的, 因为对于一个非线性系统而言, 它可能会出现各种各样的复杂现象, 我们只有了解和掌握了其中的根本因素, 才能去控制或应用这些方程对应的实际系统。文中还给出了所

研方程周期波解、孤波解关于 *Hamilton* 能量的演变关系。这是本文对以往文献的推进之二。

2. 方程(1.3)行波解的定性分析

设耦合方程(1.3)的行波解为 $u(x,t)=u(\xi)=u(x-ct)$, $v(x,t)=v(\xi)=v(x-ct)$, 则 $u(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 满足

$$\begin{cases} -cu'(\xi) + \alpha v^2(\xi)v'(\xi) + \beta u^2(\xi)u'(\xi) + \lambda u(\xi)u'(\xi) + u'''(\xi) = 0, & (2.1a) \\ -cv(\xi) + (u(\xi)v(\xi))' + \varepsilon v(\xi)v'(\xi) = 0. & (2.1b) \end{cases}$$

对(2.1)积分一次, 得

$$\begin{cases} -cu(\xi) + \frac{\alpha}{3}v^3(\xi) + \frac{\beta}{3}u^3(\xi) + \frac{\lambda}{2}u^2(\xi) + u''(\xi) = C_0 & (2.2a) \\ -cv(\xi) + u(\xi)v(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}v^2(\xi) = C_1, & (2.2b) \end{cases}$$

其中 C_0 , C_1 为积分常数。由(2.2b)式有

$$u(\xi) = \frac{C_1}{v(\xi)} + c - \frac{\varepsilon}{2}v(\xi). \quad (2.3)$$

由于本文求方程(1.3)的有界解, 自然要求取 $C_1 = 0$, 于是有 $u(\xi)$, $v(\xi)$ 满足下列关系

$$v = \frac{2}{\varepsilon}(c - u(\xi)). \quad (2.4)$$

反之, 若 $u(\xi), v(\xi)$ 满足关系(2.4)式, 则必有 $C_1 = 0$ 。将(2.4)代入到(2.2)的第一式可得

$$u'' + \frac{1}{3}\mu_3 u^3 + \frac{1}{2}\mu_2 u^2 - \mu_1 u = C_2, \quad (2.5a)$$

其中

$$\mu_1 = \frac{8\alpha c^2 \delta + c\varepsilon^3}{\gamma\varepsilon^3}, \quad \mu_2 = \frac{16\alpha c + \lambda\varepsilon^3}{\varepsilon^3}, \quad \mu_3 = \frac{\beta\varepsilon^3 - 8\alpha}{\varepsilon^3}, \quad C_2 = \frac{3C_0\varepsilon^3 - 8\alpha c^3}{3\varepsilon^3}. \quad (2.5b)$$

再做平移变换

$$U(\xi) = u(\xi) + \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \quad (2.6)$$

则方程(2.5)可化为

$$U''(\xi) + \frac{\mu_3}{3}(U^3(\xi) + lU(\xi) + m) = 0, \quad (2.7a)$$

其中

$$l = -\frac{12\mu_1\mu_3 + 3\mu_2^2}{4\mu_3^2}, \quad m = \frac{\mu_2^3 + 6\mu_1\mu_2\mu_3 - 12\mu_3^2 C_2}{4\mu_3^3}. \quad (2.7b)$$

从以上推导可知, 若 $(u(\xi), v(\xi))$ 是方程(1.3)的有界行波解, 且 $u(\xi), v(\xi)$ 满足关系(2.4)式, 则经平移变换(2.6)后 $U(\xi)$ 满足方程(2.7)。反之, 若 $U(\xi)$ 是方程(2.7)具三阶连续导数的解, 取 $u(\xi)$ 满足(2.6)式, $v(\xi)$ 如(2.4)式, 则 $(u(\xi), v(\xi))$ 必满足(2.1), 从而是方程(1.3)的有界行波解。因此, 为研究方程(1.3)满足关系式(2.4)的孤波解以及周期波解, 我们可以从方程(2.7)出发。

现在对方程(2.7)进行定性分析。令 $x = U(\xi)$ 和 $y = U'(\xi)$, 则方程(2.7)化为如下的平面动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = y \triangleq P(x, y), \\ \frac{dy}{d\xi} = -\frac{\mu_3}{3}(x^3 + lx + m) \triangleq Q(x, y). \end{cases} \quad (2.8)$$

在 (x, y) 平面上, 系统(2.8)的有限远奇点的个数依赖于方程

$$\varphi(x) \triangleq x^3 + lx + m = 0 \quad (2.9)$$

的实根的个数。记

$$\Delta = 27m^2 + 4l^3 \quad (2.10)$$

为方程 $\varphi(x)=0$ 的判别式。易知 $\Delta > 0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 有一实根和两复根; 在 $l < 0, \Delta = 0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 有 1 个单实根和 1 个二重实根; 在 $\Delta < 0$ 时, $\varphi(x)=0$ 有 3 个互异实根。由于 $\varphi(x)=0$ 仅有一实根时, 方程(2.7)无有界解, 从而方程(1.3)无有界行波解, 而本文着重于方程(1.3)有界解的讨论, 故本文以下始终假定 $l < 0$ 且 $\Delta \leq 0$ 。此时若设 $d_i (i=1, 2, 3)$ 是方程 $\varphi(x)=0$ 的 3 个实根, 系统(2.8)就有 3 个有限远奇点 $P_i(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$; 不妨假设 $d_1 \leq d_2 \leq d_3$, 则由多项式根与系数的关系知

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 = 0, \\ d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = l, \\ d_1d_2d_3 = -m. \end{cases} \quad (2.11)$$

记系统(2.8)在 $P_i (i=1, 2, 3)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(d_i, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mu_3 \varphi'(d_i)}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, 3.$$

由平面动力系统的知识[28] [29]可知, 系统(2.8)是 Hamilton 系统, 有首次积分

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\mu_3}{12}(x^4 + 2lx^2 + 4mx) = h, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

易知(2.12)式也是系统(2.8)的 Hamilton 能量函数。

利用平面动力系统的理论和方法[28] [29], 我们对系统(2.8)从如下两个方面进行定性分析。

2.1. 系统(2.8)的有限远奇点类型

1) 在 $\mu_3 > 0$ 情形

① $m > 0$ 时

a) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 存在 3 个不同的实根 d_1, d_2 和 d_3 , 且 $d_1 < -d_3 < -d_2 < 0 < d_2 < d_3$, 对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$ 。雅可比矩阵 $J(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det J(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) > \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) = \det J(d_3, 0),$$

$$\det J(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_3) < \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_2) < \frac{\mu_3}{3}(d_2^2 + d_1d_2 + d_2d_3) = 0,$$

$$\det J(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_3^2 + d_1d_2) > \frac{\mu_3}{3}(2d_3^2 + d_1d_3) > \frac{\mu_3}{3}(d_3^2 + d_1d_3 + d_2d_3) = 0,$$

故 P_1 和 P_3 为中心, P_2 为鞍点。

b) 当 $\Delta=0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 存在两个不同的实根 d_1 和 d_3 , 且 $d_1 < 0 < d_3$, d_2 和 d_3 重合, 即点 $P_2(d_2, 0)$ 与 $P_3(d_3, 0)$ 重合, 记为 $P_{2,3}(d_{2,3}, 0)$ 。对应系统(2.8)有 2 个不同的有限远奇点 $P_1(d_1, 0)$ 和 $P_{2,3}(d_{2,3}, 0)$, 由(2.11)知

$$\begin{cases} d_1 + 2d_3 = 0, \\ 2d_1d_3 + d_3^2 = l, \\ d_1d_3^2 = -m. \end{cases}$$

雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + d_3^2 + 2d_1d_3) = \frac{\mu_3}{3}d_3^2 > 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_{2,3}, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{2,3}^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(4d_{2,3}^2 + 2d_1d_{2,3}) = 0.$$

故 P_1 为中心, $P_{2,3}$ 为尖点。

② $m < 0$ 时

a) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 存在 3 个不同的实根 d_1, d_2 和 d_3 , 且 $d_1 < d_2 < 0 < -d_2 < -d_1 < d_3$, 对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 。雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_1^2 + d_2d_3) > \frac{\mu_3}{3}(2d_1^2 + d_1d_3) > \frac{\mu_3}{3}(d_1^2 + d_1d_2 + d_1d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_3) < \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_2d_3) < \frac{\mu_3}{3}(d_2^2 + d_1d_2 + d_2d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) > \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \det \mathbf{J}(d_1, 0) > 0.$$

故 P_1 和 P_3 为中心, P_2 为鞍点。

b) 当 $\Delta=0$ 时, 方程 $\varphi(x)=0$ 存在两个不同的实根 d_1 和 d_3 , 且 $d_1 < 0 < d_3$, d_2 和 d_3 重合, 即点 $P_2(d_2, 0)$ 与 $P_1(d_1, 0)$ 重合, 对应系统(2.8)有 2 个不同的有限远奇点 $P_{1,2}(d_{1,2}, 0)$ 和 $P_3(d_3, 0)$ 。由(2.11)知

$$\begin{cases} 2d_1 + d_3 = 0, \\ d_1^2 + 2d_1d_3 = l, \\ d_1^2d_3 = -m. \end{cases}$$

雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_{1,2}, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{1,2}^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(4d_{1,2}^2 + 2d_1d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) > 0.$$

故 $P_{1,2}$ 为尖点, P_3 为中心。

③ $m=0$ 时

此时 $\Delta < 0$, 方程 $\varphi(x)=0$ 存在 3 个不同的实根 $-d_1 = d_3 = \sqrt{-l}$ 和 $d_2 = 0$, 对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 。它们的雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_{1,3}, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{1,3}^2 + l) = -\frac{2\mu_3l}{3} > 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3 l}{3} < 0.$$

故 P_1 和 P_3 为中心, P_2 为鞍点。

2) 在 $\mu_3 < 0$ 情况下

① $m > 0$ 时

a) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $\varphi(x) = 0$ 存在 3 个不同的实根 d_1, d_2 和 d_3 , 且 $d_1 < -d_3 < -d_2 < 0 < d_2 < d_3$, 对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 。雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) < \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) = \det \mathbf{J}(d_3, 0),$$

$$\det \mathbf{J}(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_3) > \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_2) > \frac{\mu_3}{3}(d_2^2 + d_1d_2 + d_2d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_3^2 + d_1d_2) < \frac{\mu_3}{3}(2d_3^2 + d_1d_3) < \frac{\mu_3}{3}(d_3^2 + d_1d_3 + d_2d_3) = 0.$$

故 P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 为中心。

b) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程 $\varphi(x) = 0$ 存在两个不同的实根 d_1 和 d_3 , 且 $d_1 < 0 < d_3$, d_2 和 d_3 重合, 即点 $P_2(d_2, 0)$ 与 $P_3(d_3, 0)$ 重合, 记为 $P_{2,3}(d_{2,3}, 0)$ 。对应系统(2.8)有 2 个不同的有限远奇点 $P_1(d_1, 0)$ 和 $P_{2,3}(d_{2,3}, 0)$, 由(2.11)知

$$\begin{cases} d_1 + 2d_3 = 0, \\ 2d_1d_3 + d_3^2 = l, \\ d_1d_3^2 = -m. \end{cases}$$

雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det(\mathbf{J}(d_1, 0)) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + d_3^2 + 2d_1d_3) = \frac{\mu_3}{3}d_3^2 < 0,$$

$$\det(\mathbf{J}(d_{2,3}, 0)) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{2,3}^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(4d_{2,3}^2 + 2d_1d_{2,3}) = 0.$$

故 P_1 为鞍点, $P_{2,3}$ 为尖点。

② $m < 0$ 时

a) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $\varphi(x) = 0$ 存在 3 个不同的实根 d_1, d_2 和 d_3 , 且 $d_1 < d_2 < 0 < -d_2 < -d_1 < d_3$, 对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 。雅可比矩阵 $\mathbf{J}(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det \mathbf{J}(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_1^2 + d_2d_3) < \frac{\mu_3}{3}(2d_1^2 + d_1d_3) < \frac{\mu_3}{3}(d_1^2 + d_1d_2 + d_1d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_1d_3) > \frac{\mu_3}{3}(2d_2^2 + d_2d_3) > \frac{\mu_3}{3}(d_2^2 + d_1d_2 + d_2d_3) = 0,$$

$$\det \mathbf{J}(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) < \frac{\mu_3}{3}(3d_1^2 + l) = \det \mathbf{J}(d_1, 0) < 0.$$

故 P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 为中心。

b) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程 $\varphi(x) = 0$ 存在两个不同的实根 d_1 和 d_3 , 且 $d_1 < 0 < d_3$, d_2 和 d_1 重合, 即点 $P_2(d_2, 0)$ 与 $P_1(d_1, 0)$ 重合, 对应系统(2.8)有 2 个不同的有限远奇点 $P_{1,2}(d_{1,2}, 0)$ 和 $P_3(d_3, 0)$ 。由(2.11)知

$$\begin{cases} 2d_1 + d_3 = 0, \\ d_1^2 + 2d_1d_3 = l, \\ d_1^2d_3 = -m. \end{cases}$$

雅可比矩阵 $J(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det J(d_{1,2}, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{1,2}^2 + l) = \frac{\mu_3}{3}(4d_{1,2}^2 + 2d_1d_3) = 0,$$

$$\det J(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_3^2 + l) < 0.$$

故 $P_{1,2}$ 为尖点, P_3 为鞍点。

③ $m=0$ 时

此时 $\Delta < 0$, 方程 $\varphi(x) = 0$ 存在 3 个不同的实根 $-d_1 = d_3 = \sqrt{-l}$ 和 $d_2 = 0$ 。对应系统(2.8)有 3 个不同的有限远奇点 $P_i(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$, 雅可比矩阵 $J_i(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$ 的行列式分别为

$$\det J(d_{1,3}, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_{1,3} + l) = -\frac{2\mu_3l}{3} < 0,$$

$$\det J(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{3}(3d_2^2 + l) = \frac{\mu_3l}{3} > 0.$$

故 P_1 和 P_3 为鞍点, P_2 为中心。

2.2. 系统(2.8)的全局相图以及方程(1.3)有界行波解的存在性

综合以上的定性分析, 我们可以得到系统(2.8)在不同的参数条件下的全局相图

1) 在 $\mu_3 > 0$ 的情况下

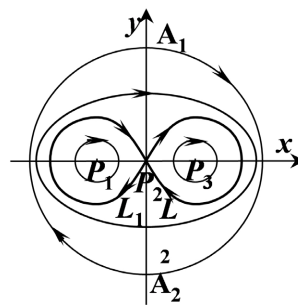


Figure 1. $m=0, \Delta < 0$

图 1. $m=0, \Delta < 0$

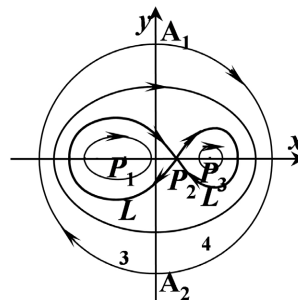


Figure 2. $m > 0, \Delta < 0$

图 2. $m > 0, \Delta < 0$

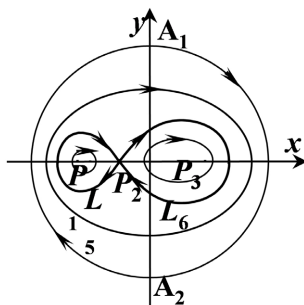


Figure 3. $m < 0, \Delta < 0$

图 3. $m < 0, \Delta < 0$

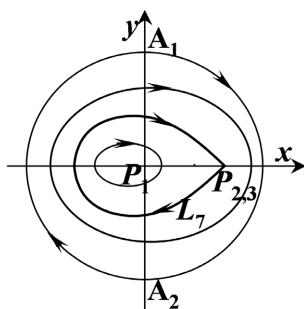


Figure 4. $m > 0, \Delta = 0$

图 4. $m > 0, \Delta = 0$

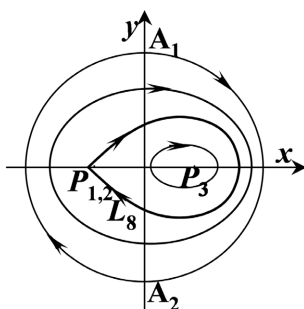


Figure 5. $m < 0, \Delta = 0$

图 5. $m < 0, \Delta = 0$

2) 在 $\mu_3 < 0$ 的情况下

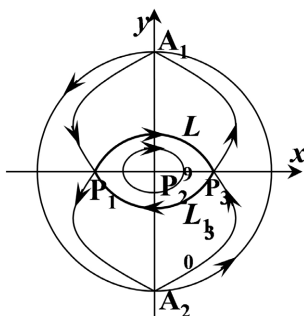


Figure 6. $m = 0, \Delta < 0$

图 6. $m = 0, \Delta < 0$

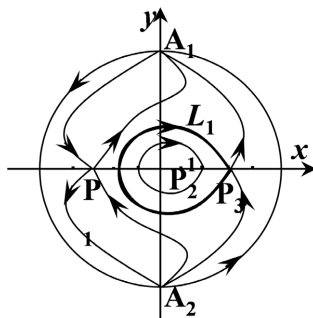


Figure 7. $m > 0, \Delta < 0$

图 7. $m > 0, \Delta < 0$

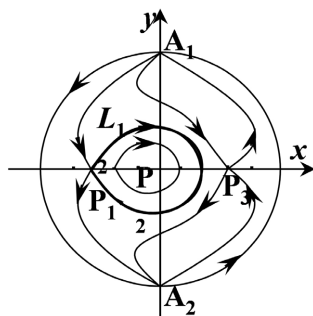


Figure 8. $m < 0, \Delta < 0$

图 8. $m < 0, \Delta < 0$

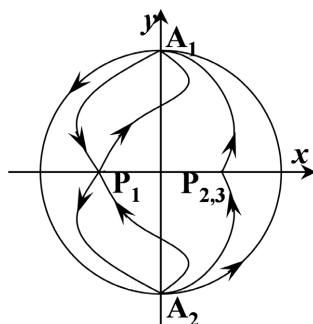


Figure 9. $m > 0, \Delta = 0$

图 9. $m > 0, \Delta = 0$

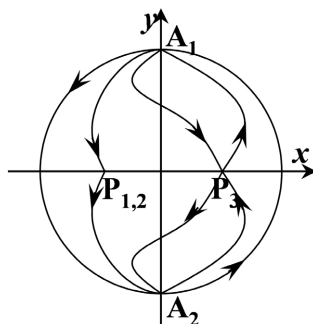


Figure 10. $m < 0, \Delta = 0$

图 10. $m < 0, \Delta = 0$

进一步, 根据全局相图图 1~10, 我们可得如下性质和定理。

性质 2.1 设 $\mu_3 > 0$, $l < 0$ 。

1) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(2.8)在 $m > 0$, $m = 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在两条同宿轨和无穷多条闭轨(见图 1~3)。

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 系统(2.8)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在一条同宿轨和无穷多条闭轨(见图 4, 图 5)。

性质 2.2 设 $\mu_3 < 0$, $l < 0$ 。

1) 当 $\Delta < 0$ 时, 系统(2.8)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在一条同宿轨和无穷多条闭轨(见图 7, 图 8), 在 $m = 0$ 条件下存在两条异宿轨和无穷多条闭轨(见图 6)。

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 系统(2.8)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下均不存在有界轨线(见图 9, 图 10)。

根据性质 2.1, 性质 2.2 以及有界轨线和行波解的对应关系: 同宿轨、异宿轨、闭轨分别对应方程(2.7)的钟状解、扭状解、周期解, 从而分别对应方程(1.3)的钟状孤波解、扭状孤波解、周期波解; 我们可得耦合方程(1.3)周期波解和孤波解的如下两个定理。

定理 2.1 设 $\mu_3 > 0$, $l < 0$ 。

1) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程(1.3)在 $m > 0$, $m = 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在两个钟状孤波解和无穷多个周期波解。

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程(1.3)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在一个钟状孤波解和无穷多个周期波解。

定理 2.2 设 $\mu_3 < 0$, $l < 0$ 。

1) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程(1.3)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下分别存在一个同宿轨和无穷多个周期波解, 在 $m = 0$ 情况下存在两个扭状孤波解和无穷个周期波解。

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程(1.3)在 $m > 0$ 和 $m < 0$ 条件下均不存在有界行波解。

3. 方程(1.3)的孤波求解

据第二节知道, 求方程(1.3)满足关系(2.4)的有界解可转化为方程(2.7)。方程(2.7)对应于平面动力系统(2.8), 其首次积分为(2.12)式。据平面动力系统知识[28] [29]可知, 这首次积分式(2.12)是方程(2.7)的解所对应的轨线的一般表达式。因此, 我们可利用这首次积分式(2.12)求得方程(2.7)的钟状解、扭状解和周期解, 进而得到方程(1.3)的孤波解和周期波解。

又由于平面动力系统(2.8)是 *Hamilton* 系统, 同一闭轨线上点的 *Hamilton* 能量 h 是相等的。故在给定参数条件下, 对于 $\forall h \in \mathbb{R}$ 全局相图中具有能量 h 的闭轨线 $G_h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | H(x, y) = h\}$ 是唯一确定的。本节将求的钟状孤波解即为图 1~3 中具能量 $H(d_2, 0)$ 同宿轨对应的解, 图 7 中具能量 $H(d_3, 0)$ 的同宿轨和图 8 中具能量 $H(d_1, 0)$ 的同宿轨对应的解; 还有图 4 具能量 $H(d_3, 0)$ 的同宿轨和图 5 具能量 $H(d_1, 0)$ 的同宿轨对应的解, 本节将求的扭状解即为图 6 中具能量 $H(d_1, 0)$ 的两对对称异宿轨(这俩异宿轨形成闭轨)对应的解。

由系统(2.8)的首次积分(2.12), 得

$$y^2 = -\frac{\mu_3}{6}(x^4 + 2lx^2 + 4mx) + 2h = -\frac{\mu_3}{6}\left(x^4 + 2lx^2 + 4mx - \frac{12h}{\mu_3}\right), \quad (3.1)$$

其中 $h = H(x, y)$ 表示系统(2.8)在 (x, y) 点处的 *Hamilton* 能量。

由于 $y = x'$, 通过分离变量法, 求方程(2.7)有界解的问题可转化为下列积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm F_h(x)}} = \pm \sqrt{\frac{|\mu_3|}{6}} (\xi - \xi_0), \quad (3.2a)$$

其中

$$F_h(x) = x^4 + 2lx^2 + 4mx - \frac{12h}{\mu_3}, \quad (3.2b)$$

且当 $\mu_3 > 0$ 时(3.2a)式根号内函数取 $-F_h(x)$, 当 $\mu_3 < 0$ 时(3.2a)式根号内函数取 $F_h(x)$ 。

3.1. 图 1~3 对应的钟状孤波解

图 1~3 中能量 $H(d_2, 0)$ 的同宿轨对应的 $F_h(x)$ 在 x 轴有 4 个零点, 其中 d_2 为 $F_h(x) = 0$ 的二重根。由于 $H(d_2, 0) = \frac{\mu_3}{12}(d_2^4 + 2ld_2^2 + 4md_2)$, 又 d_2 同时为(2.9)式 $\varphi(x) = 0$ 的实根, 有 $m = -d_2^3 - ld_2$, 故有

$$-F_h(x) = -(x-d_2)^2(x^2 + 2d_2x + 3d_2^2 + 2l) = -(x-d_2)^2(x-r_1)(x-r_2), \quad (3.3)$$

其中 r_1, r_2 为当 $h = H(d_2, 0)$ 时 $F_h(x) = 0$ 与 x 轴的两交点,

$$r_1 = -d_2 - \sqrt{-2l - 2d_2^2}, \quad r_2 = -d_2 + \sqrt{-2l - 2d_2^2}. \quad (3.4)$$

将(3.3)式代入(3.2), 则积分式可化为

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-d_2)^2(x-r_1)(x-r_2)}} = \int \frac{\sqrt{r_2-x}}{\sqrt{x-r_1}(x-d_2)(r_2-x)} dx. \quad (3.5)$$

此时有 $r_1 < d_2 < r_2$, 当 $x \in (r_1, d_2) \cup (d_2, r_2)$ 时, 令 $t = \sqrt{\frac{r_2-x}{x-r_1}}$, 我们可得

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{(d_2-r_1)(r_2-d_2)}} \left[\ln \left| t + \sqrt{\frac{r_2-d_2}{d_2-r_1}} \right| - \ln \left| t - \sqrt{\frac{r_2-d_2}{d_2-r_1}} \right| \right]. \quad (3.6)$$

于是, 当 $x \in (r_1, d_2)$ 时, 有

$$t = -\sqrt{\frac{r_2-d_2}{d_2-r_1}} \cdot \frac{e^{\Omega} + 1}{e^{\Omega} - 1}, \quad (3.7a)$$

而当 $x \in (d_2, r_2)$ 时, 有

$$t = -\sqrt{\frac{r_2-d_2}{d_2-r_1}} \cdot \frac{e^{\Omega} - 1}{e^{\Omega} + 1}. \quad (3.7b)$$

其中(3.7)中 $\Omega = \pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}(d_2-r_1)(r_2-d_2)}(\xi - \xi_0)$, 据(3.7a) (3.7b)分别解出 x , 并化简得

$$x(\xi) = d_2 - \frac{2(d_2-r_2)(d_2-r_1)}{4d_2 \pm (r_2-r_1) \cosh \sqrt{\frac{\mu_3}{6}(d_2-r_1)(r_2-d_2)}(\xi - \xi_0)}. \quad (3.8)$$

上式中 $x \in (r_1, d_2)$ 时, (3.8)式分母中取“-”号, 当 $x \in (d_2, r_2)$ 时(3.8)式分母中取“+”号, 将(3.4)代入上式, 化简得

$$U_{S1}^{\pm}(\xi) = d_2 - \frac{2(l+3d_2^2)}{2d_2 \pm \sqrt{-2l-2d_2^2} \cosh \sqrt{\frac{-\mu_3}{3}(l+3d_2^2)}(\xi - \xi_0)}. \quad (3.9)$$

综上, 我们可得如下定理。

定理 3.1: 设 $l < 0$, $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, $m \neq 0$, 当 Hamilton 能量 $h = H(d_2, 0)$ 时, 方程(1.3)有钟状孤波解

$$\begin{cases} u_{s1}^{\pm}(x, t) = U_{s1}^{\pm}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{s1}^{\pm}(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{s1}^{\pm}(\xi)). \end{cases} \quad (3.10)$$

(3.10)式中 $U_{s1}^{\pm}(\xi)$ 由(3.9)式给定, 对应于全局相图图 2, 图 3 中同宿轨。

由于, 当 $m = 0$ 时, 有 $d_2 = 0$, 此时(3.9)式可化为

$$\tilde{U}_{s1}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-2l} \cdot \operatorname{sech}\sqrt{\frac{-\mu_3 l}{3}}(\xi - \xi_0), \quad (3.11)$$

故我们有如下推论。

推论 1. 设 $l < 0$, $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, $m = 0$, 当 Hamilton 能量 $h = H(0, 0)$ 时, 方程(1.3)有钟状孤波解

$$\begin{cases} \tilde{u}_{s1}^{\pm}(x, t) = \tilde{U}_{s1}^{\pm}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ \tilde{v}_{s1}^{\pm}(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - \tilde{u}_{s1}^{\pm}(\xi)), \end{cases} \quad (3.12)$$

(3.12)式中 $U_{s1}^{\pm}(\xi)$ 由(3.11)给出, 对应于相图 1 中同宿轨线。

3.2. 图 7、图 8 同宿轨线对应的孤波解

先考虑图 7 中同宿轨对应的钟状孤波解的求解。此时 $\mu_3 < 0$, $m > 0$, 由于此时同宿轨对应的 Hamilton 能量 $H(d_3, 0) = \frac{\mu_2}{12}(d_3^4 + 2ld_3^2 + 4md_3)$, 又 d_3 是 $F_h(x) = 0$ 的二重根, 同时也为方程(2.9)的根, 有 $m = -d_3^3 - ld_3$, 故此时 $F_h(x)$ 可表达为

$$F_h(x) = (x - d_3)^2(x - \eta_1)(x - \eta_2), \quad (3.13)$$

其中 η_1, η_2 为此时 $F_h(x) = 0$ 与 x 轴的交点

$$\eta_1 = -d_3 - \sqrt{-2l - 2d_3^2}, \quad \eta_2 = -d_3 + \sqrt{-2l - 2d_3^2}, \quad (3.14)$$

且 $\eta_1 < \eta_2 < d_3$ 。将(3.13)式代入(3.2), 并在 (η_2, d_3) 上做类似于 3.1 段的积分和化简, 可得图 7 同宿轨对应的钟状解为

$$U_{s2}(\xi) = d_3 - \frac{2(l + 3d_3^2)}{2d_3 + \sqrt{-2l - 2d_3^2} \cosh\sqrt{\frac{\mu_3}{3}}(l + 3d_3^2)(\xi - \xi_0)}. \quad (3.15)$$

再考虑相图 8 同宿轨对应的钟状解。此时 $\mu_3 < 0, m < 0$, 同宿轨对应 Hamilton 能量值为 $H(d_1, 0)$ 。此时有

$$F_h(x) = (x - d_1)^2(x - \zeta_1)(x - \zeta_2), \quad (3.16)$$

其中 ζ_1, ζ_2 为 $F_h(x) = 0$ 与 x 轴交点的横坐标,

$$\zeta_1 = -d_1 - \sqrt{-2l - 2d_1^2}, \quad \zeta_2 = -d_1 + \sqrt{-2l - 2d_1^2}, \quad (3.17)$$

且 $d_1 < \zeta_1 < \zeta_2$ 。将(3.16)式代入(3.2a), 并在 (d_1, ζ_1) 上做类似于 3.1 段的积分和化简, 可得图 8 同宿轨对应的钟状解为

$$U_{S_3}(\xi) = d_1 - \frac{2(l + 3d_1^2)}{2d_1 - \sqrt{-2l - 2d_1^2} \cosh \sqrt{\frac{-\mu_3}{3}(l + 3d_1^2)}(\xi - \xi_0)}. \quad (3.18)$$

综上, 我们可得如下定理。

定理 3.2: 设 $l < 0$, $\mu_3 < 0$, $\Delta < 0$ 。

1) 当 $m > 0$, *Hamilton* 能量为 $h = H(d_3, 0)$ 时, 方程(1.3)有钟状孤波解

$$\begin{cases} u_{S_2}(x, t) = U_{S_2}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{S_2}(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{S_2}(\xi)), \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 $U_{S_2}(\xi)$ 由(3.15)式给定, 对应图 7 中同宿轨。

2) 当 $m < 0$, *Hamilton* 能量为 $H(d_1, 0)$ 时, 方程(1.3)有钟状孤波解

$$\begin{cases} u_{S_3}(x, t) = U_{S_3}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{S_3}(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{S_3}(\xi)), \end{cases} \quad (3.20)$$

其中 $U_{S_3}(\xi)$ 由(3.18)式给定, 对应图 8 中同宿轨。

3.3. 图 4、图 5 同宿轨线对应的孤波解

先考虑图 4 同宿轨对应的钟状解。

此时 $\mu_3 > 0$, $\Delta = 0$, $m > 0$, $d_2 = d_3$ 是 $\varphi(x) = 0$ 的二重根。根据多项式根与系数的关系有 $d_1 + 2d_3 = 0$,

$2d_1d_3 + d_3^2 = l$, $d_1d_3^2 = -m$ 。可推得 $d_2 = d_3 = \sqrt{\frac{-l}{3}}$, 且

$$H(d_3, 0) = \frac{\mu_3}{12}d_3^2(9d_3^2 + 2l) = \frac{\mu_3}{36}l^2.$$

又由 $\Delta = 0$ 即 $27m^2 + 4l^3 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\left(\frac{-l}{3}\right)\sqrt{\frac{-l}{3}} = \pm 2\left(\sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3$, 本段由于 $m > 0$, 取 $m = 2\left(\sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3$, 故有

$$F_h(x) = x^4 + 2lx^2 + 4mx - \frac{l^2}{3} = \left(x - \sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3 \left(x + 3\sqrt{\frac{-l}{3}}\right). \quad (3.21)$$

将上式代入(3.2a), 并注意到此时 $x \in \left(-3\sqrt{\frac{-l}{3}}, \sqrt{\frac{-l}{3}}\right)$, 可得

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{-l}{3}} - x\right)^3 \left(x + 3\sqrt{\frac{-l}{3}}\right)}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3(\sqrt{3}x + 3\sqrt{-l})}{l(\sqrt{3}x - \sqrt{-l})}}. \quad (3.22)$$

上式解出 x , 即可得

$$U_{S_4}^+(\xi) = x_{S_4}^+(\xi) = \sqrt{\frac{-l}{3}} - \frac{12\sqrt{-3l}}{9 - 2\mu_3 l (\xi - \xi_0)^2}. \quad (3.23)$$

类似地, 可求得图 5 同宿轨线对应的钟状解。

在图 5 情形, 此时 $\mu_3 > 0$, $\Delta = 0$, $m < 0$, $d_1 = d_2$ 是 $\varphi(x) = 0$ 的二重根。根据多项式根与系数的关系有 $d_3 + 2d_1 = 0$, $2d_1d_3 + d_1^2 = l$, $d_3d_1^2 = -m$ 。可推得 $d_1 = d_2 = -\sqrt{\frac{-l}{3}}$, 且

$$H(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{12} d_1^2 (9d_1^2 + 2l) = \frac{\mu_3}{36} l^2.$$

又由 $\Delta = 0$ 即 $27m^2 + 4l^3 = 0$, 可得 $m = -2\left(\sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3$,

$$F_h(x) = x^4 + 2lx^2 + 4mx - \frac{l^2}{3} = \left(x + \sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3 \left(x - 3\sqrt{\frac{-l}{3}}\right). \quad (3.24)$$

将上式代入(3.2), 并注意到 $x \in \left(-\sqrt{\frac{-l}{3}}, 3\sqrt{\frac{-l}{3}}\right)$, 可得(作变换 $t = \sqrt{\frac{3\sqrt{-l} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3x} + \sqrt{-l}}}$)

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}} (\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \sqrt{\frac{-l}{3}}\right)^3 \left(3\sqrt{\frac{-l}{3}} - x\right)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(\sqrt{3x} - 3\sqrt{-l})}{l(\sqrt{3x} + \sqrt{-l})}}. \quad (3.25)$$

上式解出 x , 即可得

$$U_{s_4}^-(\xi) = x_{s_4}^-(\xi) = -\left[\sqrt{\frac{-l}{3}} - \frac{12\sqrt{-3l}}{9 - 2\mu_3 l (\xi - \xi_0)^2}\right]. \quad (3.26)$$

综上所述可得如下定理。

定理 3.3: 设 $\mu_3 > 0$, $l < 0$, $\Delta = 0$ 。

1) 当 $m > 0$, Hamilton 能量为 $H(d_3, 0)$ 时, 方程(1.3)有孤波解

$$\begin{cases} u_{s_4}^+(x, t) = U_{s_4}^+(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{s_4}^+(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{s_4}^+(\xi)). \end{cases} \quad (3.27)$$

(3.27)式中 $U_{s_4}^+(\xi)$ 由(3.23)式给出, 对应相图 4 中同宿轨。

2) 当 $m < 0$, Hamilton 能量为 $H(d_1, 0)$ 时, 方程(1.3)有孤波解

$$\begin{cases} u_{s_4}^-(x, t) = U_{s_4}^-(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{s_4}^-(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{s_4}^-(\xi)). \end{cases} \quad (3.28)$$

(3.28)式中 $U_{s_4}^-(\xi)$ 由(3.26)式给出, 对应相图 5 中同宿轨。

3.4. 图 6 对称异宿轨线对应的扭状孤波解

此时 $\mu_3 < 0$, $m = 0$, 由于 d_1 为 $\varphi(x) = x^3 + lx = x(x^2 + l) = 0$ 的根, 有 $d_1^2 = -l$,

$h = H(d_1, 0) = \frac{\mu_3}{12}(d_1^4 + 2ld_1^2) = -\frac{\mu_3}{12}l^2$, 此时有

$$F_h(x) = x^4 + 2lx^2 - \frac{12}{\mu_3}h = x^4 + 2lx^2 + l^2 = (x + \sqrt{-l})^2 (x - \sqrt{-l})^2. \quad (3.29)$$

把(3.29)代入(3.2)式, 有

$$\pm \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \sqrt{-l})^2 (x - \sqrt{-l})^2}}. \quad (3.30)$$

由于此时 $-\sqrt{-l} < x < \sqrt{-l}$, (3.30)可以化为

$$\pm \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \int \frac{dx}{(\sqrt{-l} + x)(\sqrt{-l} - x)} = \frac{-1}{2\sqrt{-l}} \ln \frac{\sqrt{-l} - x}{\sqrt{-l} + x}. \quad (3.31)$$

上式进一步关于 x 解出, 可得图 6 异宿轨对应的扭状解

$$U_{SS}^\pm(\xi) = x_{SS}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{-l} \tanh \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_3}{3}} \cdot 2l(\xi - \xi_0) \right]. \quad (3.32)$$

由此, 我们可得如下定理。

定理 3.4: 设 $\mu_3 < 0$, $l < 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$, 则方程(2.7)有扭状孤波解

$$U_{SS}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{-l} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu_3 l}{3}} (\xi - \xi_0) \right),$$

从而方程(1.3)有扭状孤波解

$$\begin{cases} u_{SS}^\pm(x, t) = U_{SS}^\pm(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{SS}^\pm(x, t) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{SS}^\pm(\xi)). \end{cases} \quad (3.33)$$

值得指出, 文献[11]中, 曾求出方程(1.3)的钟状孤波解(1.4)式, 即文献[6]中的(9)式, 其特点是孤波解的渐近值为零。由本文定理 3.1 中(3.9) (3.10)知, 这相当于 $d_2 = \frac{\mu_2}{2\mu_3}$ 时的孤波解 $(u_{S1}^+(x, t), v_{S1}^+(x, t))$ 。

因为当 $d_2 = \frac{\mu_2}{2\mu_3}$ 为方程 $\varphi(x) = x^3 + lx + m = 0$ 的根时, 由于 $l = -\frac{12\mu_1\mu_3 + 3\mu_2^2}{4\mu_3^2}$, 有

$$l + 3d_2^2 = -\frac{3\mu_1}{\mu_3}, \quad l + d_2^2 = -\frac{2(6\mu_1\mu_3 + \mu_2^2)}{4\mu_3^2} = -\frac{6\mu_1\mu_3 + \mu_2^2}{2\mu_3^2}.$$

于是据(3.9)式, 有

$$u_{S1}^\pm(x, t) = \frac{6\mu_1}{\mu_2 \pm \frac{\mu_3}{|\mu_3|} \sqrt{\mu_2^2 + 6\mu_1\mu_3} \cosh \left[\sqrt{\mu_1} (\xi - \xi_0) \right]}. \quad (3.34)$$

注意到本文系数与文献[11]中系数有下列关系

$$a_2 = \mu_1, \quad \mu_2 = -3a_3, \quad \mu_3 = -6a_4. \quad (3.35)$$

把(3.35)代入(3.34)并化简得

$$u_{S1}^\pm(x, t) = \frac{2a_2}{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4} \cosh \left[\sqrt{a_2} (\xi - \xi_0) \right]}. \quad (3.36)$$

以上(3.36)式中的 $u_{s1}^+(x,t)$ 与[11]中的(9)式完全一致。

这表明，本文不仅得到了以往文献中所求出的方程(1.3)的孤波解，还求出了由定理 3.2~定理 3.4 所给出的方程(1.3)的新孤波解。

4. 方程(1.3)周期波解的求解

正如第二节所指出的，为求方程(1.3)满足关系(2.4)的周期波解，可转化为求方程(2.7)的周期解，而方程(2.7)的周期解，也可通过积分(3.2)并做恰当变换得到。

4.1. 图 1 和图 6 中闭轨对应的精确周期波解

1) 当 $\mu_3 > 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$ 时，对应于图 1。系统(2.8)在同宿轨线 L_1 和 L_2 所围区域内部的同一闭轨上有相等的 Hamilton 能量，记为

$$H(x, y) = H(\eta_1, 0) = \frac{\mu_3}{12}(\eta_1^2 + l)^2 - \frac{\mu_3 l^2}{12} = h_1,$$

其中 $(\eta_1, 0)$ 为周期轨线与 x 轴的交点，并且 $|\eta_1| < \sqrt{-l}$ 。此时 $\varphi(x) = x(x^2 + l) = 0$ 三个解分别为 $d_1 = -\sqrt{-l}$, $d_2 = 0$, $d_3 = \sqrt{-l}$ ，可得 $H(d_1, 0) = H(d_3, 0) < H(d_2, 0)$ 。对应的函数曲线和周期轨线如图 11 所示。

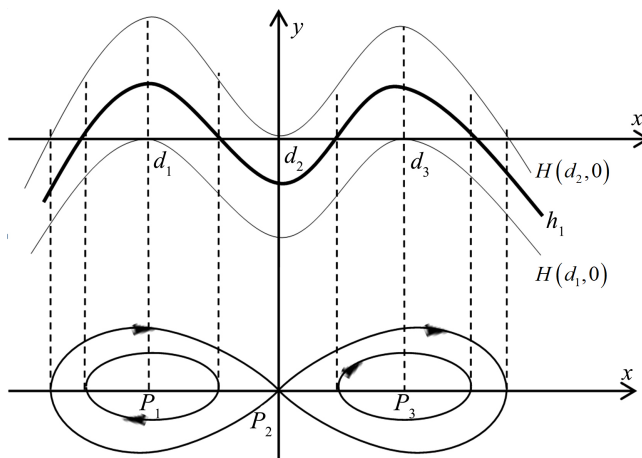


Figure 11. When $\mu_3 > 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$, corresponding diagram of $-F_h(x)$ curve family and bounded orbits

图 11. $\mu_3 > 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$ 时， $-F_h(x)$ 函数曲线和周期轨线示意图

由于 $H(\eta_1, 0) = \frac{\mu_3}{12}(\eta_1^2 + l)^2 - \frac{\mu_3 l^2}{12} = h_1$ ，所以 $-\frac{\mu_3 l^2}{12} < h_1 < 0$ 。在(3.2)式中取 $h = h_1$ ，此时有

$$-F_{h_1}(x) = -\left(x^4 + 2lx^2 - \frac{12h_1}{\mu_3}\right) = l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3} - (x^2 + l)^2, \tag{4.1}$$

此时(3.2)式可化为

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}} d\xi = \frac{dx}{\sqrt{l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3} - (x^2 + l)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + l + \sqrt{l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3}}\right)\left(x^2 + l - \sqrt{l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3}}\right)}}. \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } A_1^2 = \sqrt{l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3}} - l, \quad B_1^2 = -\sqrt{l^2 + \frac{12h_1}{\mu_3}} - l, \quad \text{作变换 } t = \frac{x}{A_1} = \frac{U(\xi)}{A_1}, \quad \text{则(4.2)式可转化为} \\ \pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}} d\xi = \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - A_1^2)(x^2 - B_1^2)}} = \frac{dt}{A_1 \sqrt{[1-t^2] \cdot \left[t^2 - \left(\frac{B_1}{A_1} \right)^2 \right]}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

根据椭圆函数积分[30] [31]的性质易得如下引理。

引理 4.1: 若 $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}} = u$, 则 $t = \text{dn}(u, k_1)$, 其中 $k_1^2 + k'^2 = 1$ (k_1 为模数)。

在(4.3)式中令 $k_1' = \frac{|B_1|}{A_1}$, 经计算可得 $A_1^2 = \frac{-2l}{2-k_1^2}$, $B_1^2 = \frac{-2l(1-k_1^2)}{2-k_1^2}$, 则(4.3)式两边积分可得

$$U_{p_1}^{\pm}(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2l}{2-k_1^2}} \cdot \text{dn} \left(\sqrt{\frac{-\mu_3 l}{3(2-k_1^2)}} (\xi - \xi_0), k_1 \right), \quad (4.4)$$

其中模数 $k_1^2 = \frac{2\sqrt{\mu_3 l^2 + 12h_1}}{\sqrt{\mu_3 l^2 + 12h_1} - \sqrt{\mu_3} l}$ 。

注: $U_{p_1}^+(\xi)$ 与 $U_{p_1}^-(\xi)$ 分别表示根号前取“+”, “-”时的解, 以下相同。

2) 当 $\mu_3 < 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$ 时, 对应于图 6, 系统(2.8)存在对称异宿轨线 L_9 和 L_{10} , 在 L_9 和 L_{10} 共同包围区域内的同一周期轨线上有相等的 Hamilton 能量

$$H(x, y) = H(\eta_2, 0) = \frac{\mu_3}{12} (\eta_2^2 + l)^2 - \frac{\mu_3 l^2}{12} = h_2,$$

其中 $(\eta_2, 0)$ 为周期轨线与 x 轴的任一交点, $|\eta_2| < \sqrt{-l}$, 且可验 Hamilton 能量满足 $H(d_1, 0) = H(d_3, 0) > H(d_2, 0)$ 。对应的函数曲线和周期轨线如图 12 所示。

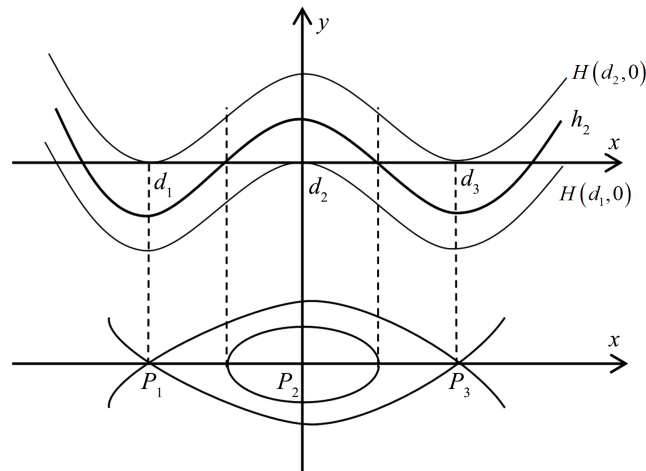


Figure 12. When $\mu_3 < 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$, corresponding diagram of $-F_{h_2}(x)$ curve family and bounded orbits

图 12. 当 $\mu_3 < 0$, $m = 0$, $\Delta < 0$ 时, $-F_{h_2}(x)$ 函数曲线和周期轨线示意图

由于 $H(\eta_2, 0) = \frac{\eta_3}{12}(\eta_2^2 + l)^2 - \frac{\mu_3 l^2}{12} = h_2$ ，所以 $0 < h_2 < -\frac{\mu_3 l^2}{12}$ 。在(3.2)式中取 $h = h_2$ ，此时有

$$F_{h_2}(x) = x^4 + 2lx^2 - \frac{12h_2}{\mu_3} = (x^2 + l)^2 - \left(l^2 + \frac{12h_2}{\mu_3} \right), \tag{4.5}$$

此时(3.2)式化为

$$\pm \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}} d\xi = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + l)^2 - \left(l^2 + \frac{12h_2}{\mu_3} \right)}}.$$

设 $A_2^2 = \sqrt{l^2 + \frac{12h_2}{\mu_3}} - l$ ， $B_2^2 = -\sqrt{l^2 + \frac{12h_2}{\mu_3}} - l$ ，作变换 $t = \frac{x}{A_2} = \frac{U(\xi)}{A_2}$ ，则(3.2)式可转化为

$$\pm \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}} d\xi = \frac{dt}{B_2 \sqrt{[1-t^2] \cdot \left[1 - \left(\frac{A_2}{B_2} \right)^2 t^2 \right]}}, \tag{4.6}$$

根据椭圆函数积分[30] [31]的性质易得如下引理。

引理 4.2: 若 $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = u$ ，则 $t = \text{sn}(u, k)$ ，(k 为模数)。

对照引理 4.2，在(4.6)式中令 $k_2 = \left| \frac{A_2}{B_2} \right|$ ，经计算可得 $A_2^2 = \frac{-2lk_2^2}{1+k_2^2}$ ， $B_2^2 = \frac{-2l}{1+k_2^2}$ ，并注意到 *Jacobi* 椭圆函数 $\text{sn}(u, k)$ 是奇函数，从而(4.6)式两边积分可得

$$U_{p_2}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2lk_2^2}{1+k_2^2}} \cdot \text{sn} \left(\sqrt{\frac{\mu_3 l}{3(1+k_2^2)}} \xi, k_2 \right), \tag{4.7}$$

其中模数 $k_2^2 = \frac{\mu_3 l + \sqrt{12\mu_3 h_2 + 3l^2 \mu_3^2}}{\mu_3 l - \sqrt{12\mu_3 h_2 + 3l^2 \mu_3^2}}$ 。

综上，我们可以得到如下定理。

定理 4.1: 设 $l < 0$ ， $\Delta < 0$ ， $m = 0$ 。

1) 当 $\mu_3 > 0$ 时，方程(1.3)有周期波解

$$\begin{cases} u_{p_1}^\pm(\xi) = U_{p_1}^\pm(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{p_1}^\pm(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{p_1}^\pm(\xi)). \end{cases} \tag{4.8}$$

其中 $U_{p_1}^\pm(\xi)$ 为方程(2.7)的周期解，由(4.4)式给出。

2) 当 $\mu_3 < 0$ 时，方程(1.3)有周期波解

$$\begin{cases} u_{p_2}^\pm(\xi) = U_{p_2}^\pm(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3} \\ v_{p_2}^\pm(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{p_2}^\pm(\xi)) \end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $U_{p_2}^{\pm}(\xi)$ 为方程(2.7)的周期解, 由(4.7)式给出。

4.2. 图 2, 图 3 周期轨线对应的精确周期波解

当 $\mu_3 > 0$, $m \neq 0$, $\Delta < 0$ 时, 由于在同宿轨线内包围的同一周期轨线上点有相等的 *Hamilton* 能量, 有

$$H(x, y) = H(\eta_3, 0) = h_3, \quad (4.10)$$

其中 $(\eta_3, 0)$ 为周期轨线与 x 轴的交点, $H(x, y)$ 由(2.12)式给定。据图 2, 图 3 可知 $P(d_i, 0)(i=1, 2, 3)$ 为系统(2.8)的 3 个奇点, 其横坐标满足 $d_1 < d_2 < d_3$ 。

在 $\mu_3 > 0$ 情况, 易证 $m > 0, H(d_1, 0) < H(d_3, 0) < H(d_2, 0)$; $m < 0, H(d_3, 0) < H(d_1, 0) < H(d_2, 0)$ 。当 *Hamilton* 能量 h_3 满足

$$\max\{H(d_1, 0), H(d_3, 0)\} < h_3 < H(d_2, 0), \quad (4.11)$$

此时函数 $F_h(x)$ ((3.2)式中的函数)曲线与 x 轴有 4 个不同的交点, 即 $F_h(x) = 0$ 有 4 个互异实根 $x_1 < d_1 < x_2 < d_2 < x_3 < d_3 < x_4$, 进而 $F_h(x)$ 可表达为

$$F_h(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4). \quad (4.12)$$

由于 $x = U(\xi)$, $y = U'(\xi)$, 所求方程(2.7)的有界解满足 $\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 = -\frac{\mu_3}{6} F_h(U)$, 则在满足条件(4.11)的情况下, 由(3.2)式可求得下列两类周期波解。

(i) 当 $x_1 < U < x_2$ 时, 作变换

$$U = \frac{x_4(x_2 - x_1)\sin^2 \phi + x_1(x_4 - x_2)}{(x_2 - x_1)\sin^2 \phi + x_1(x_4 - x_2)},$$

代入(3.2)式, 可得

$$\sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \frac{-2}{\sqrt{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_3^2 \sin^2 \phi}},$$

这里 $k_3^2 = \frac{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}$ 。由 *Jacobi* 椭圆函数定义以及函数 $\text{sn}(u, k)$ 为奇函数性质, 可知

$$\text{sn}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{6}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}(\xi - \xi_0), k_3\right) = -\sin \phi,$$

可得方程(2.7)的有界解

$$U_{p_3}(\xi) = \frac{x_4(x_2 - x_1)\text{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_3}{6}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}(\xi - \xi_0), k_3\right) + x_1(x_4 - x_2)}{(x_2 - x_1)\text{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_3}{6}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}(\xi - \xi_0), k_3\right) + (x_4 - x_2)}. \quad (4.13)$$

(ii) 当 $x_3 < U < x_4$ 时, 作变换

$$U = \frac{x_1(x_4 - x_3)\sin^2 \phi + x_4(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_3)\sin^2 \phi + (x_3 - x_1)},$$

与情形(i)类似可得到方程(2.7)的有界解

$$U_{p4} = \frac{x_1(x_4 - x_3) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_3}{6}} (x_4 - x_2)(x_3 - x_1)(\xi - \xi_0), k_3 \right) + x_4(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_3) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_3}{6}} (x_4 - x_2)(x_3 - x_1)(\xi - \xi_0), k_3 \right) + (x_3 - x_1)}. \quad (4.14)$$

综上可得如下定理 4.2。

定理 4.2: 设 $l < 0$, $\Delta < 0$, $\mu_3 > 0$, $m \neq 0$ 成立, 当 Hamilton 能量 h 满足(4.11)时, 方程(1.3)有两个周期波解

$$\begin{cases} u_{p3}(\xi) = U_{p3}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{p3}(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{p3}(\xi)). \end{cases} \quad (4.15)$$

和

$$\begin{cases} u_{p4}(\xi) = U_{p4}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{p4}(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{p4}(\xi)). \end{cases} \quad (4.16)$$

其中 $U_{p3}(\xi) \in (x_1, x_2)$ 和 $U_{p4}(\xi) \in (x_3, x_4)$ 为方程(2.7)的有界解, 分别由(4.13)和(4.14)式给出。

4.3. 图 7, 图 8 周期轨线对应的精确周期波解

当 $\mu_3 < 0$, $m \neq 0$, $\Delta < 0$ 时, 由于在同宿轨线 $L_i (i=11,12)$ 内包围的同一周期轨线上点有相等的 Hamilton 能量, 有

$$H(x, y) = H(\eta_4, 0) = h_4, \quad (4.17)$$

其中 $(\eta_4, 0)$ 为周期轨线与 x 轴的交点。当 Hamilton 能量 h_4 满足如下条件

$$H(d_2, 0) < h_4 < \min\{H(d_1, 0), H(d_3, 0)\} \quad (4.18)$$

时(可证: $\mu_3 < 0$ 时, $m > 0$ 有 $H(d_2, 0) < H(d_3, 0) < H(d_1, 0)$, $m < 0$ 有 $H(d_2, 0) < H(d_1, 0) < H(d_3, 0)$), 函数 $F_h(x)$ ((3.2)式)的函数曲线与 x 轴有 4 个不同的交点, 即 $F_h(x) = 0$ 有 4 个互异实根

$x_1 < d_1 < x_2 < d_2 < x_3 < d_3 < x_4$, 从而 $F_h(x)$ 表达为(4.12)式。对应的函数曲线和周期轨线如图 13 所示。

(i) 当 $m < 0$, Hamilton 能量 h_4 满足条件 $H(d_2, 0) < h_4 < H(d_1, 0)$ 时, 作变换

$$U = \frac{x_3(x_4 - x_2) - x_4(x_3 - x_2) \sin^2 \phi}{(x_4 - x_2) - (x_3 - x_2) \sin^2 \phi},$$

可得方程(2.7)的有界解

$$U_{p5}(\xi) = \frac{x_3(x_4 - x_2) - x_4(x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}} (x_4 - x_2)(x_3 - x_1)(\xi - \xi_0), k_4 \right)}{(x_4 - x_2) - (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\mu_3}{6}} (x_4 - x_2)(x_3 - x_1)(\xi - \xi_0), k_4 \right)}, \quad (4.19)$$

这里 $k_4^2 = \frac{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}$ 。

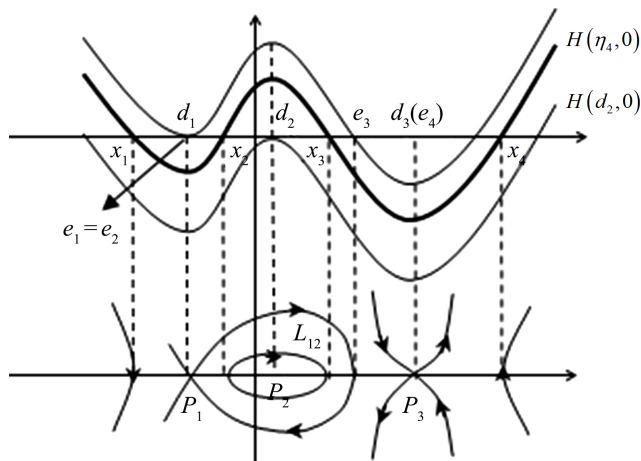


Figure 13. When $\mu_3 < 0, m < 0, \Delta < 0$, corresponding diagram of $-F_{h_4}(x)$ curve family and bounded orbits

图 13. 当 $\mu_3 < 0, m < 0, \Delta < 0$ 时, $-F_{h_4}(x)$ 函数曲线和周期轨线示意图

(ii) 当 $m > 0$, Hamilton 能量 h_4 满足条件 $H(d_2, 0) < h_4 < H(d_3, 0)$ 时, 作变换

$$U = \frac{x_2(x_3 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)\sin^2 \phi}{(x_3 - x_1) - (x_3 - x_2)\sin^2 \phi},$$

可得方程(2.7)的有界解

$$U_{P_6}(\xi) = \frac{x_2(x_3 - x_1) - x_1(x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{\mu_3}{6}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}(\xi - \xi_0), k_4\right)}{(x_3 - x_1) - (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{-\frac{\mu_3}{6}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}(\xi - \xi_0), k_4\right)}, \tag{4.20}$$

这里 $k_4^2 = \frac{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}$ 。

综上, 我们可以得到如下定理。

定理 4.3: 设 $l < 0, \Delta < 0, \mu_3 < 0, m \neq 0$ 成立, Hamilton 能量 h 满足(4.18)。

1) 当 $m < 0$ 时, 方程(1.3)有周期波解

$$\begin{cases} u_{P_5}(\xi) = U_{P_5}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{P_5}(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{P_5}(\xi)). \end{cases} \tag{4.21}$$

其中 $U_{P_5}(\xi) \in (x_2, x_3)$ 为方程(2.7)的有界解, 由(4.19)式给出。

2) 当 $m > 0$ 时, 方程(1.3)有周期波解

$$\begin{cases} u_{P_6}(\xi) = U_{P_6}(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{P_6}(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{P_6}(\xi)). \end{cases} \tag{4.22}$$

其中 $U_{p_6}(\xi) \in (x_2, x_3)$ 为方程(2.7)的有界解, 由(4.20)式给出。

4.4. 图 1~5 其余周期轨线对应的周期波解

当 $\mu_3 > 0$ 时, 在图 1~5 上还存在: 包围同宿轨线 $L_i (i=1,2,\dots,8)$ 的周期轨线, L_7 和 L_8 包围着的周期轨线以及 L_3 和 L_6 内部位于中心点附近包围中心的周期轨线。这些周期轨线可归为一类, 其特点是与 x 轴的交点仅有两个。

以 $\mu_3 > 0, \Delta < 0, m < 0$ 情况为例($\mu_3 < 0$ 的其他情况类似)。如图 14 所示, 当 Hamilton 能量 h_5 的取值范围为: $h_5 > H(d_2, 0)$ 或 h_5 值介于 $H(d_1, 0)$ 和 $H(d_3, 0)$ 之间时, (3.2)式取函数

$$-F_h(x) = -x^4 - 2lx^2 - 4mx + \frac{12h_5}{\mu_3}, \tag{4.23}$$

$-F_h(x)$ 与 x 轴有 2 个不同的交点 $\gamma_2 < \gamma_1$ 。此时(4.23)式可表示为

$$-F_h(x) = (\gamma_1 - x)(x - \gamma_2) \left((x - \alpha)^2 + \beta^2 \right), \tag{4.24}$$

其中 $2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \beta > 0$ 。

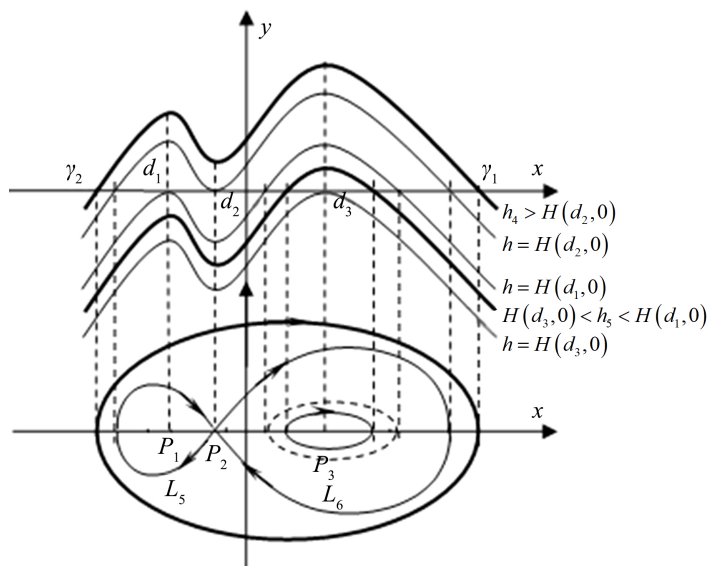


Figure 14. When $\mu_3 > 0, \Delta < 0, m < 0$, corresponding diagram of $-F_{h_5}(x)$ curve family and bounded orbits

图 14. $\mu_3 > 0, \Delta < 0, m < 0$ 时, $-F_{h_5}(x)$ 函数曲线和周期轨线示意图

将(4.24)式拆分为

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = \varepsilon_1(x - \sigma_1)^2 + (1 - \varepsilon_1)(x - \sigma_2)^2, \tag{4.25}$$

$$(\gamma_1 - x)(x - \gamma_2) = \varepsilon_2(x - \sigma_1)^2 - (1 + \varepsilon_2)(x - \sigma_2)^2, \tag{4.26}$$

其中 $\sigma_i = \alpha \frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}, (i=1,2), \varepsilon_1 = \frac{\lambda_2(1 + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \varepsilon_2 = \frac{1 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, 而 λ_1, λ_2 是方程

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \lambda^2 - 4(\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2))\lambda - 4\beta^2 = 0 \quad (4.27)$$

的两个实根。由于 $x = U(\xi)$, $y = U'(\xi)$, 令 $s = \frac{x - \sigma_1}{x - \sigma_2} = \frac{U(\xi) - \sigma_1}{U(\xi) - \sigma_2}$, 由(3.2)式可得

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\xi - \xi_0) = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \int \frac{ds}{\sqrt{\left(s^2 + \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)\left(s^2 - \left(\frac{1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)\right)}}$$

再令 $s^2 = \frac{1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2(1 - t^2)}$ 和 $k_5^2 = \frac{\varepsilon_2(1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, 得

$$\pm \sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\sigma_1 - \sigma_2)(\xi - \xi_0) = \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k_5^2 t^2)}}$$

由 *Jacobi* 椭圆函数积分, 计算可得

$$U(\xi) = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2}} \cdot \text{cn}\left(\sqrt{\frac{\mu_3}{6}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\sigma_1 - \sigma_2)(\xi - \xi_0), k_5\right)}$$

化简可得到方程(2.7)的有界解

$$U_{p7}^\pm(\xi) = \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \alpha - \frac{\rho}{2\alpha \pm 2\alpha \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 + \lambda_2}} \cdot \text{cn}\left(\sqrt{\frac{\mu_3 \rho}{6}}(\xi - \xi_0), k_5\right)}, \quad (4.28)$$

其中 $\rho = \sqrt{[\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)^2][\beta^2 + (\alpha - \gamma_2)^2]}$, $\lambda_1 < \lambda_2$ 满足方程(4.27), k_5 由下式给出

$$k_5^2 = \frac{1}{2} - \frac{\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2)}{2\sqrt{[\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)^2][\beta^2 + (\alpha - \gamma_2)^2]}}. \quad (4.29)$$

特别指出

1) 当 $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, $m = 0$ 时, 此时(4.25)式为

$$-F_h(x) = \left(-l + \sqrt{l^2 + \frac{12h_5}{\mu_3} - x^2}\right) \left(l + \sqrt{l^2 + \frac{12h_5}{\mu_3} + x^2}\right). \quad (4.30)$$

此时直接将(4.30)式代入(3.2)式, 求积分得到图 1 中包围同宿轨线 L_1 和 L_2 的周期轨线所对应的方程(2.7)的有界解为

$$\tilde{U}_{p7}^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2l\tilde{k}_1^2}{2\tilde{k}_1^2 - 1}} \cdot \text{cn}\left(\sqrt{\frac{-\mu_3 l}{3(2\tilde{k}_1^2 - 1)}}(\xi - \xi_0), \tilde{k}_1\right), \quad (4.31)$$

其中 $\tilde{k}_1^2 = \frac{\sqrt{\mu_3}l + \sqrt{\mu_3 l^2 + 12h_4}}{2\sqrt{\mu_3 l^2 + 12h_4}} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 。

2) 对比(4.23)和(4.24)式, 可得 $2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $2l = \beta^2 - 3\alpha^2 + \gamma_1\gamma_2$ 以及 $4m = 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma_1\gamma_2)$ 。

当 $\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2) < 0$, $k_3^2 > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2) = \beta^2 + 3\alpha^2 + \gamma_1\gamma_2 = 2l + 6\alpha^2 = 2(l + 3\alpha^2) < 0, \text{ 即 } \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 < \frac{-l}{3}, \text{ 且}$$

$$\gamma_2 < d_1 = \frac{-d - \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2} < d_2 = d < d_3 = \frac{-d + \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2}.$$

此时(4.28)式对应于系统(2.8)的包围同宿轨线 $L_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 的周期轨线。

当 $\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2) > 0$, $k_3^2 < \frac{1}{2}$ 时, 得 $\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 > \frac{-l}{3}$, 且

$$d_1 = d < d_2 = \frac{-d - \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2} < \gamma_2 < \gamma_1 < d_3 = \frac{-d + \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2}.$$

此时(4.28)式对应于系统(2.8)的 L_7, L_8 包围着的周期轨线, 以及 L_5 和 L_6 内部位于中心点附近包围中心的周期轨线。

综上, 我们可以得到如下定理。

定理 4.4 若条件(1): $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, *Hamilton* 能量 $h > H(d_2, 0)$ 或 $h \in (H(d_3, 0), H(d_1, 0))$ 成立, 或条件(2): $\mu_3 > 0$, $l < 0$, $\Delta = 0$, 且 *Hamilton* 能量 $h \neq H(d_2, 0)$ 成立, 则方程(2.7)有周期解 $U_{p7}^\pm(\xi)$, 由(4.28)给定, 从而方程(1.3)有周期波解

$$\begin{cases} u_{p7}^\pm(\xi) = U_{p7}^\pm(\xi) - \frac{\mu_2}{2\mu_3}, \\ v_{p7}^\pm(\xi) = \frac{2}{\varepsilon}(c - u_{p7}^\pm(\xi)). \end{cases} \quad (4.32)$$

5. Hamilton 能量与方程(1.3)的周期波解和孤波解的关系

5.1. 方程(1.3)的周期波解和孤波解与 Hamilton 能量取极限的关系

5.1.1. 图 1 对称同宿轨内周期波解与孤波解的演变关系

当 $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, $m = 0$ 时, 全局相图 1 有对称同宿轨 L_1 和 L_2 。在第三节我们已求得 L_1 和 L_2 对应的方程(1.3)的孤波解 $(\tilde{u}_{s1}^\pm, \tilde{v}_{s1}^\pm)$, 它们由(3.12)给出。同宿轨 L_1 和 L_2 内闭轨对应的周期波解由定理 4.1 结论(1)给出。由定理 4.1 结论(1)知, 方程(1.3)的周期波解 $(u_{p1}^\pm(\xi), v_{p1}^\pm(\xi))$ 中 $U_{p1}^\pm(\xi)$ 对应的 *Hamilton* 能量

$h \in \left(-\frac{\mu_3 l^2}{12}, 0\right)$, $k_1^2 = \frac{2\sqrt{\mu_3 l^2 + 12h}}{\sqrt{\mu_3 l^2 + 12h} - \sqrt{\mu_3} l} (l < 0)$, 而孤波解(3.12)式中 \tilde{U}_{s1}^\pm 对应的 *Hamilton* 能量此时为

$H(d_2, 0) = 0$, 当 $h \rightarrow 0^-$, $k_1^2 = \frac{2\sqrt{\mu_3 l^2}}{\sqrt{\mu_3 l^2} - \sqrt{\mu_3} l} \rightarrow 1$, 所以方程(1.3)的周期波解 $(u_{p1}^\pm(\xi), v_{p1}^\pm(\xi))$ 在 $h \rightarrow 0^-$ 时

有

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} U_{p1}^\pm(\xi) = \lim_{k_1 \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{-2l}{2 - k_1^2}} \operatorname{dn} \left(\sqrt{\frac{-\mu_3 l}{3(2 - k_1^2)}} \xi, k_1 \right) = \pm \sqrt{-2l} \cdot \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{-\mu_3 l}{3}} \xi \right) = \tilde{U}_{s1}^\pm(\xi), \quad (5.1a)$$

故有

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} (u_{p1}^\pm(\xi), v_{p1}^\pm(\xi)) = (\tilde{u}_{s1}^\pm(\xi), \tilde{v}_{s1}^\pm(\xi)), \quad (5.1b)$$

即当 *Hamilton* 能量 $h \rightarrow H(d_2, 0)^-$ 时, 方程(1.3)的周期波解演变为钟状孤波解 $(\tilde{u}_{s1}^\pm(\xi), \tilde{v}_{s1}^\pm(\xi))$ 。

5.1.2. 非对称同宿轨内周期波解和孤波解的演变关系

这里仅讨论图 3 和图 8 两种情形，其余情形的讨论类似。

1) 在图 3 情形

此时 $\mu_3 > 0$, $\Delta < 0$, $m < 0$ 。当 Hamilton 能量 $h = H(d_2, 0)$ 时，有同宿轨线 L_5 与 L_6 ，它们对应的方程(1.3)的钟状孤波解 $(u_{s1}^\pm(\xi), v_{s1}^\pm(\xi))$ 由(3.10)式给出。当 Hamilton 能量 $h \in (H(d_1, 0), H(d_2, 0))$ 时，系统(2.8)存在同宿轨线包围着的周期轨线，相应的周期波解为 $(u_{p3}(\xi), v_{p3}(\xi))$ 、 $(u_{p4}(\xi), v_{p4}(\xi))$ ， L_5 与 L_6 分别由(4.15)和(4.16)式给出。此时，系统(2.8)有 3 个奇点 $P_i(d_i, 0) (i=1, 2, 3)$ ，其中 $d_i (i=1, 2, 3)$ 可表示为

$$d_1 = \frac{-d_2 - \sqrt{-3d_2^2 - 4l}}{2}, \quad d_2, d_3 = \frac{-d_2 + \sqrt{-3d_2^2 - 4l}}{2}. \quad (5.2)$$

当 $h = H(d_2, 0)$ 时，(3.2)式中函数 $Y = -F_h(x)$ 与 x 轴的交点横坐标为

$$e_1 = -d_2 - \sqrt{-2l - 2d_2^2}, \quad e_2 = e_3 = d_2, \quad e_4 = -d_2 + \sqrt{-2l - 2d_2^2}, \quad (5.3)$$

显然， $d_i (i=1, 2, 3)$ 与 $e_j (j=1, 2, 3, 4)$ 有关系： $e_1 < d_1 < e_2 = e_3 = d_2 < d_3 < e_4$ 。当 Hamilton 能量 $h \in (H(d_1, 0), H(d_2, 0))$ 时，位于两个同宿轨内的周期轨线与 x 轴的交点的横坐标 $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ 满足方程

$$-F_h(x) = -x^4 - 2lx^2 - 4mx + \frac{12h}{\mu_3} = 0,$$

且

$$e_1 < x_1 < x_2 < e_2 = e_3 < x_3 < x_4 < e_4.$$

由于函数 $-F_h(x)$ 关于能量 h 具连续性，故 $-F_h(x) = 0$ 的零点 x_i 关于 h 也具连续性，于是，当 $h \rightarrow H^-(d_2, 0)$ 时， $x_1 \rightarrow e_1$, $x_2 \rightarrow e_2 = d_2$, $x_3 \rightarrow e_3 = d_2$, $x_4 \rightarrow e_4$ ，且模数 $k_3 \rightarrow 1$ 。由此可得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow H^-(d_2, 0)} U_{p4}(\xi) &= \lim_{k_3 \rightarrow 1} U_{p4}(\xi) \\ &= \frac{e_1(e_4 - e_2) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\mu_3}{3}} (e_4 - e_2)(e_2 - e_1) \xi \right) + e_4(e_2 - e_1)}{(e_4 - e_2) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\mu_3}{3}} (e_4 - e_2)(e_2 - e_1) \xi \right) + (e_2 - e_1)} \\ &= d_2 - \frac{\sqrt{2}(l + 3d_2^2)}{\sqrt{2}d_2 + \sqrt{-l - d_2^2} \cdot \cosh \left(\sqrt{-\frac{2\mu_3}{3}} (l + 3d_2^2) \xi \right)} = U_{s1}^+(\xi) \end{aligned}$$

同理可得 $\lim_{h \rightarrow H^-(d_2, 0)} U_{p3}(\xi) = \lim_{k_3 \rightarrow 1} U_{p3}(\xi) = U_{s1}^-(\xi)$ 。

故当 $h \rightarrow H^-(d_2, 0)$ 时，方程(1.3)的周期波解 $(u_{p3}(\xi), v_{p3}(\xi))$ 和 $(u_{p4}(\xi), v_{p4}(\xi))$ 分别趋于钟状孤波解 $(u_{s1}^-(\xi), v_{s1}^-(\xi))$ 和 $(u_{s1}^+(\xi), v_{s1}^+(\xi))$ 。

2) 在图 8 情形

此时 $\mu_3 < 0$, $\Delta < 0$, $m < 0$ ，如图 13 所示，当 Hamilton 能量 $h = H(d_1, 0)$ 时， $Y = F_h(x)$ 与 x 轴有 3 个交点，且满足 $e_1 = e_2 = d_1 < e_3 < e_4$ ，此时方程(2.7)有对应于同宿轨 L_2 的钟状解(3.18)，而当 Hamilton 能量 $h \in (H(d_2, 0), H(d_1, 0))$ 时，方程(2.7)有周期解 $U_{p5}(\xi)$ ，由(4.19)式给出。此时函数 $F_h(x)$ 与 x 轴有 4 个交点，这些交点的横坐标 x_i 与 $e_i (i=1, 2, 3, 4)$ 有关系(如图 13 所示)

$$x_1 < e_1 = e_2 < x_2 < e_3 < x_3 < e_4 < x_4,$$

故由函数的连续性知, 当 $h \rightarrow H(d_1, 0)$ 时, $x_1 \rightarrow e_1, x_2 \rightarrow e_2, x_3 \rightarrow e_3, x_4 \rightarrow e_4$, 且模数 $k_4 \rightarrow 1$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow H(d_1, 0)} U_{p5}(\xi) &= \lim_{k_4 \rightarrow 1} U_{p5}(\xi) \\ &= \frac{e_3(e_4 - e_2) - e_4(e_3 - e_2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{-\frac{2\mu_3}{3}}(e_4 - e_2)(e_3 - e_1)\xi\right)}{(e_4 - e_2) - (e_3 - e_2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{-\frac{2\mu_3}{3}}(e_4 - e_2)(e_3 - e_1)\xi\right)} \\ &= d_1 - \frac{\sqrt{2}(l + 3d_1^2)}{\sqrt{2}d_1 - \sqrt{-l - d_1^2} \cdot \cosh\left(\sqrt{-\frac{2\mu_3}{3}}(l + 3d_1^2)\xi\right)} = U_{s3}(\xi) \end{aligned}$$

故当 $h \rightarrow H(d_1, 0)$ 时, 方程(1.3)的周期波解 $(u_{p5}(\xi), v_{p5}(\xi))$ 演化成 $(u_{s3}(\xi), v_{s3}(\xi))$ 。

5.1.3. 包围同宿轨的闭轨对应的周期波解与孤波解的极限关系

本段中, 我们仅以图 3 中包围同宿轨的闭轨为例来进行讨论, 其余情形类似。

此时 $\mu_3 > 0, \Delta < 0, m < 0$ 。当 Hamilton 能量 $h = H(d_2, 0)$ 时, 同宿轨线 L_5, L_6 对应的方程(1.3)的钟状孤波解为 $(u_{s1}^+(\xi), v_{s1}^+(\xi))$, 它由(3.10)式给出。当 $h > H(d_2, 0)$ 时, 系统(2.8)存在包围同宿轨线 L_5 和 L_6 的闭轨, 它对应的周期波解 $(u_{p7}^+(\xi), v_{p7}^+(\xi))$ 由(4.28)式给出。

此时有 $\beta^2 + (\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2) < 0$, 即 $\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 < \frac{-l}{3}$, 相应地(4.29)式的 $k_5^2 > \frac{1}{2}$, 周期轨与 x 轴的交点横坐标 γ_1, γ_2 满足

$$\gamma_2 < d_1 = \frac{-d - \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2} < d_2 = d < d_3 = \frac{-d + \sqrt{-3d^2 - 4l}}{2} < \gamma_1.$$

当 $h \rightarrow H^+(d_2, 0)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\rightarrow -d_2 - \sqrt{-2l - 2d_2^2}, \quad \gamma_1 \rightarrow -d_2 + \sqrt{-2l - 2d_2^2}, \\ \alpha &= -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \rightarrow d_2, \quad \beta \rightarrow 0, \\ \rho &\rightarrow \frac{-l - 3d^2}{2d^2}, \quad \lambda_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_2 \rightarrow -\frac{l + 3d^2}{l + d^2}, \quad k_5 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow H^+(d_2, 0)} U_{p7}^+(\xi) &= \lim_{k_5 \rightarrow 1} U_{p7}^+(\xi) \\ &= \lim_{k_5 \rightarrow 1} \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \alpha - \frac{2\alpha\rho}{1 + \sqrt{\frac{1 + \lambda_1}{1 + \lambda_2}} \cdot \operatorname{cn}\left(\alpha\sqrt{\frac{2\mu_3\rho}{3}}\xi, k_5\right)} \\ &= d_2 - \frac{\sqrt{2}(l + 3d_2^2)}{\sqrt{2}d_2 \pm \sqrt{-l - d_2^2} \cdot \cosh\left(\sqrt{-\frac{\mu_3}{3}}(l + 3d_2^2)\xi\right)} = U_{s1}^+(\xi) \end{aligned}$$

故当 $h \rightarrow H^+(d_2, 0)$ 时, 方程(1.3)的包围同宿轨线的周期波解 $(u_{p7}^+(\xi), v_{p7}^+(\xi))$ 演化成钟状孤波解 $(u_{s1}^+(\xi), v_{s1}^+(\xi))$ 。

5.2. 周期波解向孤波解演变的三维示意图

1) 当 $\mu_3 > 0$, $l < 0$, $m < 0$, $\Delta < 0$ 时, 对应于全局相图 3, 由前面的讨论可知, 当 $h = H(d_2, 0)$ 时, 方程(1.3)有钟状孤波解 $(u_{S1}^{\pm}(\xi), v_{S1}^{\pm}(\xi))$ 。当 $H(d_1, 0) < h < H(d_2, 0)$ 时, 方程(1.3)有周期波解 $(u_{P3}(\xi), v_{P3}(\xi))$ 和 $(u_{P4}(\xi), v_{P4}(\xi))$, 且当 $h \rightarrow H(d_2, 0)$ 时有 $(u_{P3}(\xi), v_{P3}(\xi)) \rightarrow (u_{S1}^{-}(\xi), v_{S1}^{-}(\xi))$, $(u_{P4}(\xi), v_{P4}(\xi)) \rightarrow (u_{S1}^{+}(\xi), v_{S1}^{+}(\xi))$ 。由于这两个周期波解演变为孤波解时具类似性, $v(\xi)$ 与 $u(\xi)$ 又有关系式(2.4), 故我们只需画出当 $h \rightarrow H(d_2, 0)$ 时, $u_{P4}(\xi)$ 演变为 $u_{S1}^{+}(\xi)$ 的示意图即可。现令 $\mu_3 = 4$, $l = -3$, $m = -1$, $c = 1$, $\varepsilon = 2$, 此时 $d_2 = -0.3472963553$, $H(d_2, 0) = 0.2266815969$ 。当 Hamilton 能量 $h \rightarrow H^{-}(d_2, 0)$ 时, $u_{P4}(\xi)$ 演变为 $u_{S1}^{+}(\xi)$ 的三维示意图如图 15~18 所示:

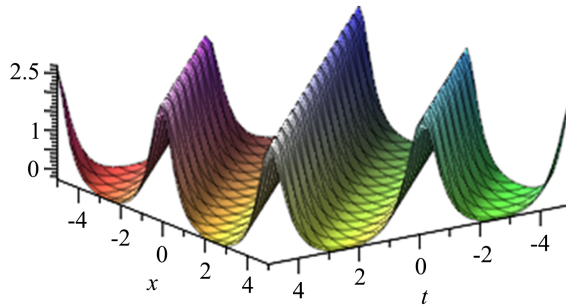


Figure 15. When $h = 0.21668$, the diagram of $u_{P4}(\xi)$

图 15. $h = 0.21668$ 时 $u_{P4}(\xi)$ 图像

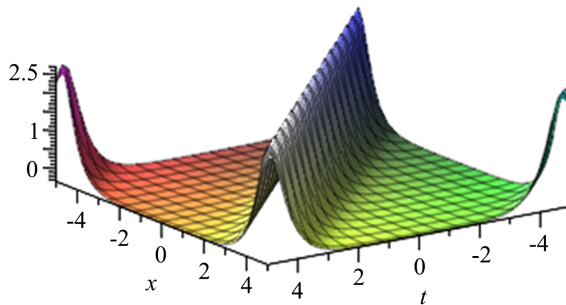


Figure 16. When $h = 0.22668$, the diagram of $u_{P4}(\xi)$

图 16. $h = 0.22668$ 时 $u_{P4}(\xi)$ 图像

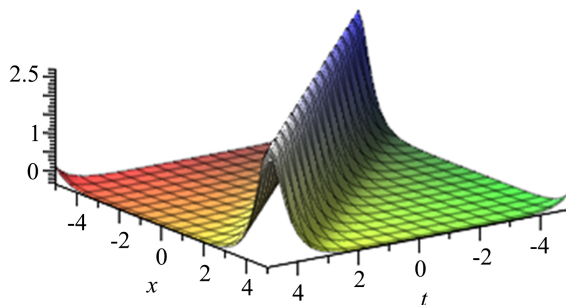


Figure 17. When $h = 0.2266815$, the diagram of $u_{P4}(\xi)$

图 17. $h = 0.2266815$ 时 $u_{P4}(\xi)$ 图像

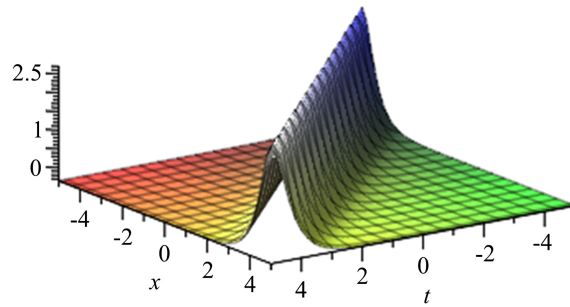


Figure 18. When $h = H(d_2, 0)$, the diagram of $u_{s1}^+(\xi)$

图 18. $h = H(d_2, 0)$ 时 $u_{s1}^+(\xi)$ 图像

2) 当 $\mu_3 < 0, l < 0, m = 0, \Delta < 0$ 时, 对应于图 6, 当 $h = H(d_1, 0) = H(\sqrt{-l}, 0) = -\frac{\mu_3 l^2}{12}$ 时, 方程(1.3) 有扭状孤波解 $(u_{s5}^\pm(\xi), v_{s5}^\pm(\xi))$, 当 $0 < h < -\frac{\mu_3 l^2}{12}$ 时, 方程(1.3) 有周期波解 $(u_{p2}^\pm(\xi), v_{p2}^\pm(\xi))$ 。且有 $\lim_{h \rightarrow H^-(d_1, 0)} u_{p2}^\pm(\xi) = u_{s5}^\pm(\xi), \lim_{h \rightarrow H^-(d_1, 0)} v_{p2}^\pm(\xi) = v_{s5}^\pm(\xi)$ 。我们只需画出当 $h \rightarrow H(d_1, 0)$ 时, $u_{p2}^-(\xi)$ 演变为 $u_{s5}^-(\xi)$ 的示意图。令 $\mu_3 = -4, l = -3, m = 0, c = 1, \varepsilon = 2$, 此时 $H(d_1, 0) = -\frac{\mu_3 l^2}{12} = 3$ 。当 Hamilton 能量 $h \rightarrow 3^-$ 时, $u_{p2}^-(\xi)$ 演变为 $u_{s5}^-(\xi)$ 的三维示意图如图 19~22 所示:

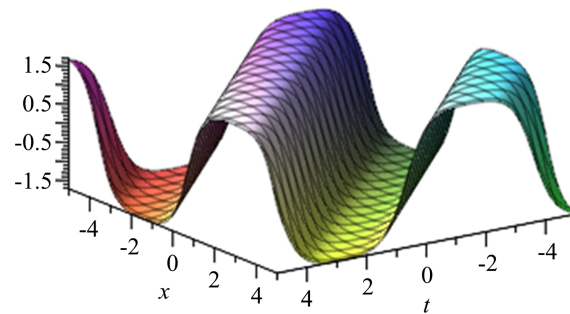


Figure 19. When $h = 2.999$, the diagram of $u_{p2}^-(\xi)$

图 19. $h = 2.999$ 时 $u_{p2}^-(\xi)$ 图像

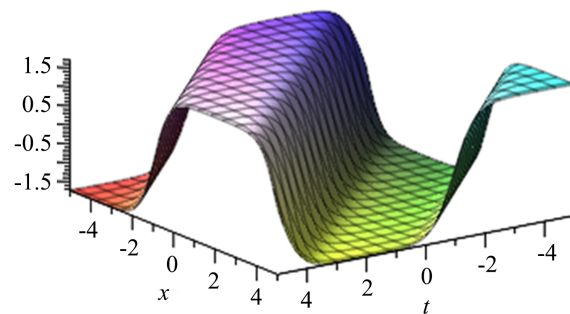


Figure 20. When $h = 2.99999$, the diagram of $u_{p2}^-(\xi)$

图 20. $h = 2.99999$ 时 $u_{p2}^-(\xi)$ 图像

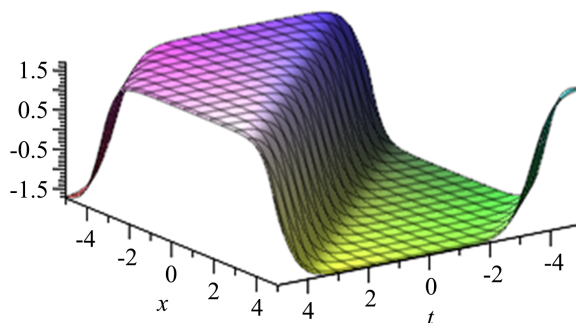


Figure 21. When $h = 2.99999999$, the diagram of $u_{p_2}^-(\xi)$

图 21. $h = 2.99999999$ 时 $u_{p_2}^-(\xi)$ 图像

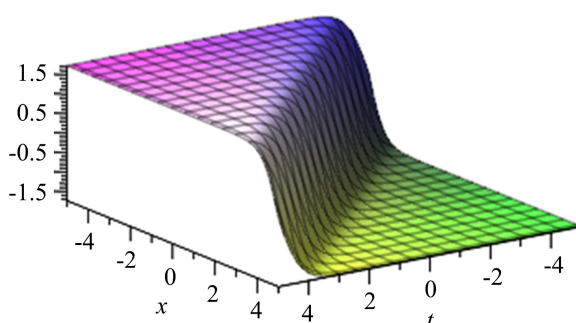


Figure 22. When $h = 3$, the diagram of $u_{s_5}^-(\xi)$

图 22. $h = 3$ 时 $u_{s_5}^-(\xi)$ 图像

6. 结论

本文我们运用平面动力系统定性分析和首次积分法相结合的方法, 求出了耦合 KdV 型方程在各种不同条件下具有的全部周期波解和孤波解, 尤其是我们求出了该方程的两类新孤波解给出, 以及扭状孤波解, 还求出了非对称同宿轨线所围的闭轨对应的新周期波解及包围同宿轨线的闭轨对应的新周期波解。更发现了所研方程为什么能产生孤波解和周期波解, 实际上是该方程解的振幅对应的 Hamilton 系统的能量变化起着关键的作用, 本文的方法是非常有意义的。此外, 由于当 $v = 0$ 时耦合 KdV 型方程即化为组合 KdV 方程, 从本文结果易推得组合 KdV 方程的相应结论, 限于篇幅, 本文省略。

参考文献

- [1] Hirota, R. and Satsuma, J. (1981) Soliton Solutions of a Coupled KdV Equation. *Physics Letters A*, **85**, 407-408. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(81\)90423-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(81)90423-0)
- [2] Lu, B., Pan, Z., Qu, B. and Jiang, X. (1993) Solitary Wave Solutions for Some Systems of Coupled Nonlinear Equations. *Physics Letters A*, **180**, 61-64. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90495-L](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90495-L)
- [3] Guha-Roy, C., Bagchi, B. and Sinha, D.K. (1986) Traveling Wave Solutions and the Coupled Korteweg-de Vries Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **27**, 2558-2560. <https://doi.org/10.1063/1.527324>
- [4] Guha-Roy, C. (1987) Solitary Wave Solutions of a System of Coupled Nonlinear Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **28**, 2087-2088. <https://doi.org/10.1063/1.527419>
- [5] Guha-Roy, C. (1988) Exact Solutions to a Coupled Nonlinear Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, **27**, 447-450. <https://doi.org/10.1007/BF00669393>
- [6] Lu, D.C. and Yang, G.J. (2007) Compact on Solutions and Peakon Solutions for a Coupled Nonlinear Wave Equation. *International Journal of Nonlinear Science*, **4**, 31-36.

- [7] Wadati, M. (1975) Wave Propagation in Nonlinear Lattice I. *Journal of the Physical Society of Japan*, **38**, 673-680. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.38.673>
- [8] Yao, S.W., Zafar, A., Urooj, A., Tariq, B. and Shakeel, M. (2023) Novel Solutions to the Coupled KdV Equations and the Coupled System of Variant Boussinesq Equations. *Results in Physics*, **45**, Article ID: 106249. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106249>
- [9] Zahrani, A., Matinfar, M. and Eslami, M. (2022) Bivariate Chebyshev Polynomials to Solve Time-Fractional Linear and Nonlinear KdV Equations. *Journal of Mathematics*, **2022**, Article ID: 6554221. <https://doi.org/10.1155/2022/6554221>
- [10] Ayati, Z. and Badiepour, A. (2022) Two New Modifications of the Exp-Function Method for Solving the Fractional-Order Hirota-Satsuma Coupled KdV. *Advances in Mathematical Physics*, **2022**, Article ID: 6304896. <https://doi.org/10.1155/2022/6304896>
- [11] Wadati, M. (1975) Wave Propagation in Nonlinear Lattice II. *Journal of the Physical Society of Japan*, **38**, 681-686. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.38.681>
- [12] Toda, M. (1970) Wave in Nonlinear Lattice. *Progress of Theoretical Physics Supplements*, **45**, 174-200. <https://doi.org/10.1143/PTPS.45.174>
- [13] Zhang, W., Ling, X., Li, X. and Li, S. (2019) The Orbital Stability of Solitary Wave Solutions for the Generalized Gardner Equation and the Influence Caused by the Interactions between Nonlinear Terms. *Complexity*, **2019**, Article ID: 4209275. <https://doi.org/10.1155/2019/4209275>
- [14] Zhang, Y. and Ma, W. (2015) Rational Solutions to a KdV-Like Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **256**, 252-256. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.027>
- [15] Ma, W. and Zhou, Y. (2018) Lump Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations via Hirota Bilinear Forms. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2633-2659. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.033>
- [16] Gambo, B., Bouetou, B. and Kuetche, K.V. (2010) Dynamical Survey of a Generalized-Zakharov Equation and Its Exact Travelling Wave Solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 203-211. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.05.044>
- [17] Zhang, Z., Liu, Z., Miao, X. and Chen, Y. (2011) Qualitative Analysis and Traveling Wave Solutions for the Perturbed Nonlinear Schrodinger's Equation with Kerr Law Nonlinearity. *Physics Letters A*, **375**, 1275-1280. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.11.070>
- [18] Ye, C. and Zhang, W. (2011) New Explicit Solutions for (2+1) Dimensional Soliton Equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, **44**, 1063-1069. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.08.011>
- [19] Geyer, A. and Villadelprat, J. (2015) On the Wave Length of Smooth Periodic Traveling Waves of the Camassa-Holm Equation. *Journal of Differential Equation*, **259**, 2317-2332. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.027>
- [20] Hattam, L.L. and Clarke, S.R. (2015) A Stability Analysis of Periodic Solutions to the Steady Forced Korteweg-de Vries-Burgers Equation. *Wave Motion*, **59**, 42-51. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2015.07.006>
- [21] Yu, L. and Tian, L. (2014) Loop Solutions, Breaking Kink (or Anti-Kink) Wave Solutions, Solitary Wave Solutions and Periodic Wave Solutions for the Two-Component Degasperis-Procesi Equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14**, 140-148. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.06.006>
- [22] Marangell, R. and Miller, P.D. (2015) Dynamical Hamiltonian-Hopf Instabilities of Periodic Traveling Waves in Klein-Gordon Equations. *Physica D*, **308**, 87-93. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.06.006>
- [23] Tang, Y. and Zai, W. (2015) New Exact Periodic Solitary-Wave Solutions for the (3 + 1)-Dimensional Generalized KP and BKP Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **70**, 2432-2441. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.09.017>
- [24] Gani, M.O. and Ogawa, T. (2016) Stability of Periodic Traveling Waves in the Aliev-Panfilov Reaction-Diffusion System. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **33**, 30-42. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.09.002>
- [25] Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q. (2003) The JEFE Method and Periodic Solutions of Two Kinds of Nonlinear Wave Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **8**, 67-75. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(02\)00082-5](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(02)00082-5)
- [26] Zhang, W., Zhao, Y., Liu, G. and Ning, T. (2010) Periodic Wave Solutions for Pochhammer-Chree Equation with Five Order Nonlinear Term and Their Relationship with Solitary Wave Solutions. *International Journal of Modern Physics B*, **19**, 3769-3783. <https://doi.org/10.1142/S0217979210056268>
- [27] Sahoo, S. and Saha, R. (2017) New Double-Periodic Solutions of Fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson Equation in Shallow Water Waves. *Nonlinear Dynamics*, **88**, 1869-1882. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3349-9>
- [28] Nemytskii, V. and Stepanov, V. (1989) Qualitative Theory of Differential Equations. Dover, New York.

-
- [29] Zhang, Z., Ding, T., Huang, W. and Dong, Z. (1992) *Qualitative Theory of Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence.
- [30] Byrd, P.F. and Friedman, M.D. (1971) *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>
- [31] Lawden, D.F. (1989) *Elliptic Functions and Applications*, Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3980-0>