Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1157-1172
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135121

与球 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间上的双线性 Calderón-Zygumd 算子及其交换子的有界性

李雪梅

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月2日；录用日期：2023年5月4日；发布日期：2023年5月11日

摘 要

本文主要讨论了双线性 $C-Z$ 算子 T 及其交换子 $[b_1, b_2, T]$ 在与球 **Banach** 函数空间相关的广义 **Morrey** 空间 $M_u(X)$ 上的有界性. 证明了 T 从乘积空间 $M_{u_1}(X_1) \times M_{u_2}(X_2)$ 到空间 $M_u(Y)$ 有界. 进一步, 也证明了由 $b_1, b_2 \in \mathrm{BMO}(X)$ 和 T 生成的交换子 $[b_1, b_2, T]$ 是从乘积空间 $M_{u_1}(X_1) \times M_{u_2}(X_2)$ 到空间 $M_u(Y)$ 有界的, 其中 $u = u_1 u_2$.

关键词

双线性 Calderón-Zygumd 算子，交换子，球 Banach 函数空间，广义 Morrey 空间，有界性

Boundedness of Bilinear $C-Z$ Operators and Its Commutator Generated by on Generalized Morrey Spaces Associated with Ball Banach Function Spaces

Xuemei Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 李雪梅. 与球 Banach 函数空间相关的广义 Morrey 空间上的双线性 Calderón-Zygumd 算子及其交换子的有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1157-1172. DOI: 10.12677/pm.2023.135121

Received: Apr. 2^{nd}, 2023; accepted: May 4^{th}, 2023; published: May 11^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the authors mainly discuss the boundedness of bilinear $C-Z$ operator T and its commutator $[b_1, b_2, T]$ on generalized Morrey spaces associated with ball Banach function spaces $M_u(X)$. The authors prove bilinear $C-Z$ operator T is bounded from product spaces $M_{u_1}(X_1) \times M_{u_2}(X_2)$ into spaces $M_u(Y)$. Further, they also prove that the commutator $[b_1, b_2, T]$ generated by $b_1, b_2 \in \mathrm{BMO}(X)$ and T are bounded from product spaces $M_{u_1}(X_1) \times M_{u_2}(X_2)$ into spaces $M_u(Y)$, where $u = u_1 u_2$.

Keywords

Bilinear $C-Z$ Operator, Commutator, Ball Banach Function Spaces, Generalized Morrey Space, Boundedness

1. 引言

调和分析作为数学的一个重要分支, 起初是由法国数学家 Fourier 利用三角级数理论研究热传导方程时引入的. 调和分析主要研究函数空间和算子理论, 近年来, 已成为现代数学的核心研究领域之一.

众所周知, Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 是最基本的平均算子, 它可以控制许多其他积分算子. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个局部可积函数, 则 Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}f$ 可定义为:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

其中 $B(x,r) = y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r$ 是一中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径为 $r > 0$ 的开球.

此外, $C-Z$ 奇异积分算子也是谐波分析中一类极其重要的算子, 1975 年, Cofiman 和 Meyer 首次介绍了多线性 $C-Z$ 积分算子的理论([1]). 此后, 多线性 $C-Z$ 积分算子在各种函数空间上有着广泛的应用. 例如: Hu 和 Meng 建立了多线性 $C-Z$ 算子在乘积 $\mathcal{H}^p$ 空间上的有界性([2]); Lu 和

Zhu 得到了多线性 $C-Z$ 算子在变指标 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{q,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上有界([3]) 以及 Wang 和 Liu 研究了多线性 $C-Z$ 算子在乘积广义 Morrey 空间 $(L^p(\omega), L^q)^\alpha$ 上的有界性([4]).

另一方面, 球 Banach 函数空间理论备受关注. 2017 年, Sawano 等人第一次得到了球 Banach 函数空间的定义([5]). 它包含各种函数空间, 例如: Lebesgue 空间, Morrey 空间, Orlize 空间以及加权变指标 Lebesgue 空间等. 为了研究二阶椭圆偏微分方程解的局部正则性, 1938 年, Morrey 首次引入 Morrey 空间的定义: 对于任意的 $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f\|_{M_q^p} = \sup_{x\in X, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|^q_L(B(x,r)), \quad 1 < q \le p \le \infty. \tag{2}$$

在这里, 我们可以使用一些函数来替换 $|B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ 和 $L^q(B(x,r))$, 得到其他的函数空间. 例如: 广义 Orlicz-Morrey 空间, 广义变指标 Morrey 空间和广义混合 Morrey 空间([6–10]).
近来, Ho,K-P 研究了奇异积分算子在 Morrey-Banach 空间上的弱型估计([11])且讨论了在球 Banach 函数空间上 Erdélyi-Kober 分数次积分算子的算子性质([12]), 以及魏明全获得了基于球 Banach 函数空间上的广义 Morrey 空间上的线性 $C-Z$ 算子的有界性([13]).

受上述启发, 本文主要考虑了基于球 Banach 函数空间上的广义 Morrey 空间上的双线性 $C-Z$ 算子及其交换子的有界性.

在叙述主要结果之前, 我们先来回顾一些本文所需的定义.

定义1.1 [5] 一个 Banach 空间 $X \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的球 Banach 函数空间, 若 X 满足以下条件:

(1) $\|f\|_X = 0 \Longrightarrow f = 0 \ \ a.e.$,

(2) $|g| \le |f| \ \ a.e. \Longrightarrow \|g\|_X \le \|f\|_X$,

(3) $0 \le f_n \uparrow f \ \ a.e. \Longrightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$,

(4) $B \in \mathbb{B} \Longrightarrow \chi_B \in X$,

(5) $\forall B \in \mathbb{B}, \exists C(B) > 0$, 使得 $\int_B f(x)dx \le C(B)\|f\|_X, \forall f \in X$,

这里 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 表示所有在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数空间, $B = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0\}$ 表示开球集族.

定义1.2 [14] 对于任意的球 Banach 函数空间 X, X 的对偶空间 X' 定义为:

$$X' := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{X'} = \sup_{g\in X, \|g\|_X \le 1} \|fg\|_{L^1} < \infty\}. \tag{3}$$

注记1.3 若 X 是球 Banach 函数空间, 则 X' 也是球 Banach 函数空间.

定义1.4 [13] 设 X 是一个球 Banach 函数空间, 若 $u(x,r) : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个 Lebesgue 可测函数, 则与球 Banach 函数空间相关联的广义 Morrey 空间 $M_u(X)$ 定义为:

$$\|f\|_{M_u(X)} = \sup_{x\in X, r>0} \frac{1}{u(x,r)} \frac{1}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X} \|\chi_{B(x,r)} f\|_X < \infty, \quad f \in \mathcal{M}(X). \tag{4}$$

定义1.5 [15] 对于任意的球 Banach 函数空间 X,

(1) 若 Hardy – Littlewood 极大算子 M 在空间 X 上有界, 则表示为 $X \in \mathbb{M}$,

(2) 若 Hardy – Littlewood 极大算子 M 在空间 X' 上有界, 则表示为 $X \in \mathbb{M}'$.

定义1.6 [16] 核 $K(\cdot,\cdot,\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}^n\})$ 被称为双线性 $C-Z$ 核, 若 K 满足以下条件:

(1) 对所有的 $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 且 $x \neq y_i, (j = 1, 2)$, 存在一常数 C, 使得

$$|K(x, y_1, y_2)| \leq \frac{C}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n}}; \tag{5}$$

(2) 存在常数 $\delta > 0$ 和 $C > 0$, 使得对所有 $x, x', y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ 且 $|x - x'| \leq \frac{1}{2} \max\limits_{j=1,2}\{|x - y_j|\}$, 则

$$|K(x, y_1, y_2) - K(x', y_1, y_2)| \leq C \frac{|x - x'|^{\delta}}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n+\delta}}; \tag{6}$$

(3) 存在常数 $\delta > 0$ 和 $C > 0$, 使得对所有 $x, y_1, y_1', y_2 \in \mathbb{R}^n$ 且 $|y_1 - y_1'| \leq \frac{1}{2} \max\limits_{j=1,2}\{|x - y_j|\}$, 则

$$|K(x, y_1, y_2) - K(x, y_1', y_2)| \leq C \frac{|y_1 - y_1'|^{\delta}}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n+\delta}}; \tag{7}$$

(4) 存在常数 $\delta > 0$ 和 $C > 0$, 使得对所有 $x, y_1, y_2, y_2' \in \mathbb{R}^n$ 且 $|y_2 - y_2'| \leq \frac{1}{2} \max\limits_{j=1,2}\{|x - y_j|\}$, 则

$$|K(x, y_1, y_2) - K(x, y_1, y_2')| \leq C \frac{|y_2 - y_2'|^{\delta}}{(|x - y_1| + |x - y_2|)^{2n+\delta}}; \tag{8}$$

设 $f_1, f_2 \in L^\infty_C(\mathbb{R}^n)$, 双线性算子 T 称为核 K 满足条件 (5), (6), (7) 和 (8) 的双线性 $C-Z$ 算子, 定义为:

$$T(f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y_1, y_2) f_1(y_1) f_2(y_2) dy_1 dy_2, \quad x \notin (f_1) \bigcap (f_2), \tag{9}$$

其中 $L^\infty_C(\mathbb{R}^n)$ 是所有具有紧支集的 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数空间.

定义1.7 [16] 给定 $b_1, b_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则由 b_1, b_2, T 生成的交换子 $[b_1, b_2, T]$ 定义为:

$$[b_1, b_2, T](f_1, f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big(b_1(x) - b_1(y_1)\big)\big(b_2(x) - b_2(y_2)\big) f_1(y_1) f_2(y_2)}{\big(|x - y_1| + |x - y_2|\big)^{2n}} dy_1 dy_2. \tag{10}$$

2. 预备知识

引理2.1 [17] 设 X 是一个球 Banach 函数空间, 如果 $f \in X, g \in X'$, 则 fg 是可积的, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) g(x)| dx \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}. \tag{11}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.135121

引理2.2 [18] 设 X 是一个球 Banach 函数空间, 则

$$|B| \leq \|\chi_B\|_X \|\chi_B\|_{X'} \leq C|B|, \quad B \in \mathbb{B}, \tag{12}$$

设 ω 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非负局部可积函数, 则加权 Hardy 算子 H_ω 和加权加权 Hardy 极大算子 H_ω^* 分别定义为:

$$H_\omega g(t) := \int_t^\infty g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{13}$$

$$H_\omega^* g(t) := \int_t^\infty (1 + \ln \frac{s}{t}) g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{14}$$

引理2.3 [19] 给定一个非负递增函数 $g \in (0, \infty)$, 则不等式

$$ess \sup_{t>0} v_2(t) H_\omega g(t) \leq C ess \sup_{t>0} v_1(t) g(t)$$

成立, 当且仅当 $A = \sup\limits_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{\omega(s)ds}{\sup\limits_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty$, $A \sim C$.

引理2.4 [20] 给定一个非负递增函数 $g \in (0, \infty)$, 则不等式

$$ess \sup_{t>0} v_2(t) H_\omega^* g(t) \leq C ess \sup_{t>0} v_1(t) g(t)$$

成立, 当且仅当 $A = \sup\limits_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty (1 + \ln \frac{s}{t}) \frac{\omega(s)ds}{\sup\limits_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty$, $A \sim C$.

3. 空间 $M_u(X)$ 上的双线性算子 T

定理3.1 设 X_1, X_2 和 Y 是球 Banach 函数空间, 满足 $\|\chi_B\|_{Y'} \|\chi_B\|_{X_1} \|\chi_B\|_{X_2} \leq C$, 其中 $X_i \in \mathbb{M} \bigcup \mathbb{M}', (i = 1, 2)$. 假设 T 是由(9)所定义的双线性 $C - Z$ 算子, 若 $\|T(f_1, f_2)\|_Y \leq C\|f_1\|_{X_1} \|f_2\|_{X_2}$ 成立. 函数 $u_1, u_2 : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ 且满足条件

$$\int_r^\infty \frac{ess \inf\limits_{t<s<\infty} u_1(x, s) \|\chi_B(x, s)\|_X}{\|\chi_B(x, t)\|_X} \frac{dt}{t} \leq C u_2(x, r), \quad u = u_1 u_2, \tag{15}$$

则存在 $C > 0$, 使得对所有的 $f_1 \in X_1 \bigcap M_{u_1(X_1)}$ 和 $f_2 \in X_2 \bigcap M_{u_2(X_2)}$, 有

$$\|T(f_1, f_2)\|_{M_u(Y)} \leq C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)} \|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

在证明之前, 先给出一个有用的推论.

推论3.2 满足引理 2.3 的条件, 且 $v_2(t) = u_2(z, t)^{-1}, v_1(t) = u_1(z, t)^{-1} \|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1}, g(t) = \|\chi_{B(z,t)} f\|_X, \omega(t) = t^{-1} \|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1}$, 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in X, r>0} u_2(z, r)^{-1} \int_r^\infty \|f\chi_{B(z,t)}\|_X \|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1} \frac{dt}{t} \\
\leq \ & C \sup_{z \in X, r>0} u_1(z, r)^{-1} \|\chi_{B(z,r)}\|_X^{-1} \|f\chi_{B(z,t)}\|_X \\
= \ & \|f\|_{M_{u_1}(X)}
\end{aligned}$$

定理3.1的证明 设 $x \in B(z,r) \in \mathbb{B}$, 对 f_i 进行如下分解:

$$f_i = f_i^1 + f_i^\infty = f_i\chi_{2B} + f_i\chi_{X\setminus 2B}, \quad i = 1,2 \tag{16}$$

则

$$\begin{aligned}
\|T(f_1,f_2)\|_{M_u(Y)} &\le \|T(f_1^1,f_2^1)\|_{M_u(Y)} + \|T(f_1^1,f_2^\infty)\|_{M_u(Y)} \\
&+ \|T(f_1^\infty,f_2^1)\|_{M_u(Y)} + \|T(f_1^\infty,f_2^\infty)\|_{M_u(Y)} \\
&= : \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_3 + \mathrm{D}_4
\end{aligned}$$

先来估计 D_1, 由 $\|T(f_1,f_2)\|_Y \le C\|f_1\|_{X_1}\|f_2\|_{X_2}$, $u = u_1u_2$, $\|\chi_{B(z,r)}\|_Y = \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}$ 以及式 (11),(12) 和推论 3.2, 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}T(f_1^1,f_2^1)\|_Y \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2} \\
=\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}|B(z,r)|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\int_{2r}^\infty \frac{dt}{t^{1+n}}|B(z,r)|\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}\int_{2r}^\infty \frac{dt}{t^{1+n}} \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}|B(z,r)|\int_{2r}^\infty \|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\frac{dt}{t^{1+n}}|B(z,r)|\int_{2r}^\infty \|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\frac{dt}{t^{1+n}} \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1'}\int_{2r}^\infty \|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\frac{dt}{t^{1+n}} \\
\times\ & \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2'}\int_{2r}^\infty \|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\frac{dt}{t^{1+n}} \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\int_{2r}^\infty \|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1'}\frac{dt}{t^{1+n}} \\
\times\ & \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\int_{2r}^\infty \|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}\frac{dt}{t^{1+n}} \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\int_{2r}^\infty \|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\times\ & \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\int_{2r}^\infty \|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
=\ & C\frac{1}{u_1(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\int_{2r}^\infty \|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\times\ & \frac{1}{u_2(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\int_{2r}^\infty \|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\le\ & C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)},
\end{aligned}$$

对上式两边同时取上确界, 得到 $\mathrm{D}_1 \le C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}$. 为了估计 D_2, 首先考虑 $|T(f_1^1,f_2^\infty)(x)|$ 且 $x \in B(z,r), y \in B^c(z,2r)$, 有 $\frac{1}{2}|z-y| \le |x-y| \le \frac{3}{2}|z-y|$, 运用式 (5),(9), (11),(12) 和 Fubini's 定理, 有

$$
\begin{aligned}
&|T(f_1^1, f_2^\infty)(x)| \\
\leq\ & C\int_{2B}\int_{X\setminus 2B}\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}dy_1dy_2 \\
\leq\ & C\int_{2B}|f_1(y_1)|dy_1\int_{X\setminus 2B}\frac{|f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n}}dy_2 \\
\leq\ & C\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'}\int_{X\setminus 2B}\frac{|f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n}}dy_2 \\
=\ & C|B(z,r)|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+n}}|B(z,r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1}\int_{X\setminus 2B}|f_2(y_2)|\int_{|z-y_2|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_2 \\
\leq\ & C|B(z,r)|\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\frac{dt}{t^{1+n}}|B(z,r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1}\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\leq|z-y_2|<t}|f_2(y_2)|dy_2\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1'}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\frac{dt}{t^{1+n}}|B(z,r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1} \\
\times\ & \int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|f_2(y_2)|dy_2\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t}|B(z,r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1} \\
\times\ & \int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\leq\ & Cr^n\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t}\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t},
\end{aligned}
$$

进一步, 由式 (4), 推论 3.2 和 $\|\chi_{B(z,r)}\|_Y = \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}$, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_2 =\ & \sup_{z\in X, r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|T(f_1^1, f_2^\infty)\chi_{B(z,r)}\|_Y \\
\leq\ & C\sup_{z\in X, r>0} r^n\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\frac{1}{u_1(z,r)}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\times\ & \frac{1}{u_2(z,r)}\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\leq\ & C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.
\end{aligned}
$$

类似于 D_2 的估计, 很容易得到

$$\mathrm{D}_3 \leq C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

接下来估计 D_4, 运用式 (5),(9),(11),(12) 和 Fubini's 定理, 得到

$$
\begin{aligned}
& |T(f_1^\infty, f_2^\infty)| \\
\leq\ & \int_{X\backslash 2B}\int_{X\backslash 2B} |K(x,y_1,y_2)||f_1^\infty(y_1)||f_2^\infty(y_2)|dy_1dy_2 \\
\leq\ & C\int_{(X\backslash 2B)^{2n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{|f_i(y_i)|}{|x-y_i|^n}dy_i \\
\leq\ & C\int_{(X\backslash 2B)^{2n}}\prod_{i=1}^{2}\frac{|f_i(y_i)|}{|z-y_i|^n}dy_i \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}\int_{X\backslash 2B}|f_i(y_i)|\int_{|z-y_i|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_i \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\leq|z-y_i|<t}|f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t},
\end{aligned}
$$

进而, 由式 (4) 和推论 3.2 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_4 &= \sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|T(f_1^\infty,f_2^\infty)\chi_{B(z,r)}\|_Y \\
&\leq C\prod_{i=1}^{2}\sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u_i(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_i}}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_i}\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\leq C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.
\end{aligned}
$$

结合 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\mathrm{D}_3$ 的估计, 定理 3.1 证毕.

4. 空间 $M_u(X)$ 上的双线性 C-Z 算子的交换子 $[b_1,b_2,T]$

在给出主要定理之前, 首先回顾一下有界平均振荡函数空间 BMO 的定义(见文献 [21]).

定义4.1 一个局部可积函数 $f\in \mathrm{BMO}(X)$, 若 f 满足

$$
\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{B\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|dy<\infty, \tag{17}
$$

其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$.

注4.2 如果 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 X' 上有界, 则

$$
\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(X)} = \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}} = \|\cdot\|_*
$$

且有

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)} = \sup_{B \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\chi_B(f - f_B)\|_X}{\|\chi_{B(z,r)}\|_X}. \tag{18}$$

引理4.3 [22] 设 $f \in \mathrm{BMO}(X)$, 则对于 $0 < 2r < t$, 有

$$|f_{B(x,r)} - f_{B(x,t)}| \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}} \ln \frac{t}{r}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

定理4.4 设设 X_1, X_2 和 Y 是球 Banach 函数空间, 满足 $\|\chi_B\|_{Y'}\|\chi_B\|_{X_1}\|\chi_B\|_{X_2} \leq C$, 其中 $X_i \in \mathbb{M}\bigcup\mathbb{M}', (i = 1, 2)$. 假设 $b_1, b_2 \in \mathrm{BMO}(X)$, 则由$T$ 和 b_1, b_2 生成的双线性 C-Z 算子的交换子 $[b_1, b_2, T]$ 是由(10)所定义, 若 $\|[b_1, b_2, T](f_1, f_2)\|_Y \leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{X_1}\|f_2\|_{X_2}$ 成立. 函数 $u_1, u_2 : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ 且满足条件

$$\int_r^\infty (1 + \ln \frac{t}{r}) \frac{ess \inf\limits_{t<s<\infty} u_1(x, s)\|\chi_B(x, s)\|_X}{\|\chi_B(x, t)\|_X} \frac{dt}{t} \leq Cu_2(x, r), \quad u = u_1u_2, \tag{20}$$

则存在 $C > 0$, 使得对所有的 $f_1 \in X_1 \bigcap M_{u_1(X_1)}$ 和 $f_2 \in X_2 \bigcap M_{u_2(X_2)}$, 有

$$\|[b_1, b_2, T](f_1, f_2)\|_{M_u(Y)} \leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

在证明之前, 先给出一个有用的推论.

推论4.5 满足引理 2.4 的条件, 且 $v_2(t) = u_2(z, t)^{-1}, v_1(t) = u_1(z, t)^{-1}\|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1}, g(t) = \|\chi_{B(z,t)}f\|_X, \omega(t) = t^{-1}\|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1}$, 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in X, r>0} u_2(z, r)^{-1} \int_r^\infty (1 + \ln \frac{t}{r})\|f\chi_{B(z,t)}\|_X\|\chi_{B(z,t)}\|_X^{-1} \frac{dt}{t} \\
\leq \;& C \sup_{z\in X, r>0} u_1(z, r)^{-1}\|\chi_{B(z,r)}\|_X^{-1}\|f\chi_{B(z,t)}\|_X \\
= \;& \|f\|_{M_{u_1}(X)}.
\end{aligned}$$

定理4.4的证明 设 $x \in B(z, r) \in \mathbb{B}$, 对 f_i 进行如下分解:

$$f_i = f_i^1 + f_i^\infty = f_i\chi_{2B} + f_i\chi_{X\setminus 2B}, \quad i = 1, 2$$

则运用式 (4),(10) 和 Monkowski 不等式, 得到

$$\begin{aligned}
\|[b_1, b_2, T](f_1, f_2)\|_{M_u(Y)} &\leq \|[b_1, b_2, T](f_1^1, f_2^1)\|_{M_u(Y)} + \|[b_1, b_2, T](f_1^1, f_2^\infty)\|_{M_u(Y)} \\
&+ \|[b_1, b_2, T](f_1^\infty, f_2^1)\|_{M_u(Y)} + \|[b_1, b_2, T](f_1^\infty, f_2^\infty)\|_{M_u(Y)} \\
&= : \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4
\end{aligned}$$

先来估计 E_1, 由 $\|[b_1, b_2, T](f_1, f_2)\|_Y \leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{X_1}\|f_2\|_{X_2}, u = u_1u_2,$
$\|\chi_{B(z,r)}\|_Y = \|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}$ 以及式 (11),(12) 和推论 3.2, 得到

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}[b_1,b_2,T](f_1^1,f_2^1)\|_Y \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|[b_1,b_2,T](f_1^1,f_2^1)\|_Y \\
\le\ & C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2} \\
=\ & C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\prod_{i=1}^{2}|B(z,r)|\|f_i\chi_{B(z,2r)}\|_{X_i}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\le\ & C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\prod_{i=1}^{2}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_i'}\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\le\ & C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\prod_{i=1}^{2}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_i}\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
=\ & C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\frac{1}{u_1(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\times\ & \frac{1}{u_2(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
\le\ & C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)},
\end{aligned}
$$

上式两边同时取上确界, 有 $E_1 \le C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}$. 为了估计 E_2, 首先考虑 $|[b_1,b_1,T](f_1^1,f_2^\infty)(x)|$, 对于 $\forall x\in B(z,r), y\in B^c(z,2r)$, 有 $\frac{1}{2}|z-y|\le|x-y|\le\frac{3}{2}|z-y|$, 由式 (5),(10),(11),(12),(18),(19) 和 Fubini's 定理, 得到

$$
\begin{aligned}
& |[b_1,b_1,T](f_1^1,f_2^\infty)(x)| \\
\le\ & \int_{2B}\int_{X\setminus 2B}|K(x,y_1,y_2)||b_1(x)-b_1(y_1)||b_2(x)-b_1(y_2)||f_1^1(y_1)||f_2^\infty(y_2)|dy_1dy_2 \\
\le\ & C\int_{B(z,2r)}\int_{B^c(z,2r)}\frac{|b_1(x)-b_1(y_1)||b_2(x)-b_1(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}dy_1dy_2 \\
\le\ & C\int_{B(z,2r)}|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)|dy_1\int_{B^c(z,2r)}\frac{|b_2(x)-b_1(y_2)||f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n}}dy_2 \\
\le\ & C\Big(|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\int_{B(z,2r)}|f_1(y_1)|dy_1+\int_{B(z,2r)}|b_1(y_1)-(b_1)_{B(z,2r)}||f_1(y_1)|dy_1\Big) \\
\times\ & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{B^c(z,2r)}\frac{|f_2(y_2)|}{|z-y_2|^{2n}}dy_2+\int_{B^c(z,2r)}\frac{|b_2(y_2)-(b_2)_{B(z,2r)}||f_2(y_2)|}{|z-y_2|^{2n}}dy_2\Big) \\
\le\ & C\Big(|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'} \\
& +\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}(b_1(\cdot)-(b_1)_{B(z,2r)})\|_{X_1'}\Big) \\
\times\ & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{B^c(z,2r)}|f_2(y_2)|\int_{|z-y|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_2 \\
& +\int_{B^c(z,2r)}|b_2(y_2)-(b_2)_{B(z,2r)}||f_2(y_2)|\int_{|z-y|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & C\Big(|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'} \\
& +\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\frac{\|\chi_{B(z,2r)}(b_1(\cdot)-(b_1)_{B(z,2r)})\|_{X_1'}}{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'}}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'}\Big) \\
\times \quad & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\le|z-y|<t}|f_2(y_2)|dy_2\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\le|z-y|<t}|b_2(y_2)-(b_2)_{B(z,2r)}||f_2(y_2)dy_2|\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\le \quad & C\Big(|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'} \\
& +\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|b_1\|_*\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'}\Big) \\
\times \quad & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|f_2(y_2)|dy_2\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|b_2(y_2)-(b_2)_{B(z,2r)}||f_2(y_2)dy_2|\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\le \quad & C\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1'}\Big(\|b_1\|_*+|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\Big) \\
\times \quad & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|b_2(y_2)-(b_2)_{B(z,t)}||f_2(y_2)dy_2|\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|(b_2)_{B(z,2r)}-(b_2)_{B(z,t)}||f_2(y_2)dy_2|\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\le \quad & C|B(z,r)|\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\int_{2r}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}|B(z,2r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1}\Big(\|b_1\|_*+|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\Big) \\
\times \quad & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\|(b_2(\cdot)-(b_2)_{B(z,t)})\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +\int_{2r}^{\infty}|(b_2)_{B(z,2r)}-(b_2)_{B(z,t)}|\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\le \quad & C|B(z,r)|\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\frac{dt}{t^{n+1}}|B(z,2r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1}\Big(\|b_1\|_*+|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\Big) \\
\times \quad & \Big(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +\int_{2r}^{\infty}\frac{\|(b_2(\cdot)-(b_2)_{B(z,t)})\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}}{\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2'}}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +\int_{2r}^{\infty}|(b_2)_{B(z,2r)}-(b_2)_{B(z,t)}|\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad C\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1'}\frac{dt}{t^{n+1}}|B(z,2r)|\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}^{-1}\\
&\quad\times\left(\|b_1\|_*+|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\right)\\
&\quad\times\left(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right.\\
&\quad\left.+\|b_2\|_*\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right)\\
&\leq \quad Cr^n\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t}\left(\|b_1\|_*+|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}|\right)\\
&\quad\times\left(|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right.\\
&\quad\left.+\|b_2\|_*\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right),
\end{aligned}
$$

进而, 由式 (4),(18) 和推论 4.5, 以及 $\|\chi_{B(z,r)}\|_Y=\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}$, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_2 \quad &= \sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|[b_1,b_2,T](f_1^1,f_2^{\infty})\chi_{B(z,r)}\|_Y\\
&\leq C\sup_{z\in X,r>0}r^n\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|b_1\|_*\frac{1}{u_1(z,r)}\int_{2r}^{\infty}\|f_1\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_1}^{-1}\frac{dt}{t}\\
&\quad\times\left(\|b_2\|_*\frac{1}{u_2(z,r)}\int_{2r}^{\infty}\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right.\\
&\quad\left.+\|b_2\|_*\frac{1}{u_2(z,r)}\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_2\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_2}^{-1}\frac{dt}{t}\right)\\
&\leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.
\end{aligned}
$$

用类似于在 E_2 估计中使用的方法, 容易得到

$$
\mathrm{E}_3\leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.
$$

最后估计 E_4, 对于 $\forall x\in B(z,r), y\in B^c(z,2r)$, 可以得到 $\frac{1}{2}|z-y|\leq|x-y|\leq\frac{3}{2}|z-y|$. 运用式 (5),(10),(11),(12),(18),(19),(20) 和推论 4.5 以及 Fuibin's 定理, 有

$$
\begin{aligned}
&|[b_1,b_1,T](f_1^{\infty},f_2^{\infty})(x)|\\
\leq\ & C\int_{(X\setminus 2B)^2}\frac{|b_1(x)-b_1(y_1)||b_2(x)-b_2(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n}}dy_1dy_2\\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}\int_{X\setminus 2B}\frac{|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|}{|x-y_i|^n}dy_i\\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{X\setminus 2B}\frac{|f_i(y_i)|}{|z-y_i|^n}dy_i+C\prod_{i=1}^{2}\int_{X\setminus 2B}\frac{|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,r)}||f_i(y_i)|}{|z-y_i|^n}dy_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{X\setminus 2B}|f_i(y_i)|\int_{|z-y|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_i \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\int_{X\setminus 2B}|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,r)}||f_i(y_i)|\int_{|z-y|}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}}dy_i \\
=\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\leq|z-y|<t}|f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}}dy_i \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\int_{2r}^{\infty}\int_{2r\leq|z-y|<t}|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,r)}||f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}}dy_i \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,r)}||f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}} \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i'}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\Big(\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,t)}||f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \quad +\int_{2r}^{\infty}\int_{B(z,t)}|(b_i)_{B(z,r)}-(b_i)_{B(z,t)}||f_i(y_i)|dy_i\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\Big(\int_{2r}^{\infty}\|\big(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,t)}\big)\chi_{B(z,t)}\|_{X_i'}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \quad +\int_{2r}^{\infty}|(b_i)_{B(z,r)}-(b_i)_{B(z,t)}|\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i'}\frac{dt}{t^{n+1}}\Big) \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\Big(\int_{2r}^{\infty}\frac{\|\big(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,t)}\big)\chi_{B(z,t)}\|_{X_i'}}{\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i'}}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& \quad +\int_{2r}^{\infty}|(b_i)_{B(z,r)}-(b_i)_{B(z,t)}|\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t}\Big) \\
\leq\ & C\prod_{i=1}^{2}|b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}|\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
& +C\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_*\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t}
\end{aligned}
$$

进一步, 由式 (4),(18) 和推论 4.5, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_4 &= \sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|[b_1,b_2,T](f_1^\infty,f_2^\infty)\chi_{B(z,r)}\|_Y \\
&\le C\prod_{i=1}^{2}\sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\big(b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}\big)\chi_{B(z,r)}\|_Y \\
&\quad\times\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\quad+ C\prod_{i=1}^{2}\sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}\|_Y\|b_i\|_* \\
&\quad\times\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\le C\prod_{i=1}^{2}\sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\frac{\|\big(b_i(x)-(b_i)_{B(z,r)}\big)\chi_{B(z,r)}\|_Y}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|\chi_{B(z,r)}\|_Y \\
&\quad\times\int_{2r}^{\infty}\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\quad+ C\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_*\sup_{z\in X,r>0}\frac{1}{u(z,r)}\int_{2r}^{\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\|f_i\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,t)}\|_{X_i}^{-1}\frac{dt}{t} \\
&\le C\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_*\|f_i\|_{M_{u_i}(X_i)}.
\end{aligned}$$

结合 $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3$ 的估计, 定理 4.4 证毕.

基金项目

西北师范大学2022年度研究生科研资助项目(2022KYZZ-S121)。

参考文献

[1] Coifman, R.R. and Meyer, Y. (1975) On Commutators of Singular Integrals and Bilinear Singular Integrals. *Transactions of the AMS*, **212**, 315-331. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1975-0380244-8

[2] Hu, G.E. and Meng, Y. (2012) Multilinear Calderón-Zygmund Operator on Products of Hardy Spaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **28**, 281-294. https://doi.org/10.1007/s10114-012-0240-y

[3] Lu, Y. and Zhu, Y.P. (2014) Boundedness of Multilinear Calderón-Zygmund Singular Operators on Morrey-Herz Spaces with Variable Exponents. *Acta Mathematica Sinica*, **30**, 1180-1194. https://doi.org/10.1007/s10114-014-3410-2

[4] Wang, P.W. and Liu, Z.G. (2017) Weighted Norm Inequalities for Multilinear Calderón-Zygmund Operators in Generalized Morrey Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article No. 48. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1325-z

[5] Sawano, Y., Ho, K.-P., Yang, D. and Yang, S. (2017) Hardy Spaces for Ball Quasi-Banach Function Spaces. *Dissertationes Mathematicae*, **525**, 1-102. https://doi.org/10.4064/dm750-9-2016

[6] Fu, Z., Lin, Y. and Lu, S. (2008) λ-Central BMO Estimates for Commutators of Singular Integral Operators with Rough Kernels. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **24**, 373-386. https://doi.org/10.1007/s10114-007-1020-y

[7] Fu, Z., Lu, S., Wang, H. and Wang, L. (2019) Singular Integral Operators with Rough Kernels on Central Morrey Spaces with Variable Exponent. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **44**, 505-522. https://doi.org/10.5186/aasfm.2019.4431

[8] Tao, J., Yang, D. and Yang, D. (2019) Boundedness and Compactness Characterizations of Cauchy Integral Commutators on Morrey Spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 1631-1651. https://doi.org/10.1002/mma.5462

[9] Tao, J., Yang, D. and Yang, D. (2020) Beurling-Ahlfors Commutators on Weighted Morrey Spaces and Applications to Beltrami Equations. *Potential Analysis*, **53**, 1467-1491. https://doi.org/10.1007/s11118-019-09814-7

[10] Yang, M., Fu, Z. and Sun, J. (2019) Existence and Large Time Behavior to Coupled Chemotaxis-Fluid Equations in Besov-Morrey Spaces. *Journal of Differential Equations*, **266**, 5867-5894. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.050

[11] Ho, K.-P. (2019) Weak Type Estimates of Singular Integral Operators on Morrey-Banach Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **91**, Article No. 20. https://doi.org/10.1007/s00020-019-2517-3

[12] Ho, K.-P. (2021) Erdélyi-Kober Fractional Integral Operators on Ball Banach Function Spaces. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **145**, 93-106. https://doi.org/10.4171/RSMUP/72

[13] Wei, M.Q. (2022) Linear Operators and Their Commutators Generated by Calderón-Zygmund Operators on Generalized Morrey Spaces Associated with Ball Banach Function Spaces. *Positivity*, **26**, Article No. 84. https://doi.org/10.1007/s11117-022-00949-3

[14] Ho, K.-P. (2021) Nonlinear Commutators on Morrey-Banach Spaces. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, **12**, Article No. 48. https://doi.org/10.1007/s11868-021-00419-6

[15] Ho, K.-P. (2020) Definability of Singular Integral Operators on Morrey-Banach Spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **72**, 155-170. https://doi.org/10.2969/jmsj/81208120

[16] Wang, W. and Xu, J. (2017) Multilinear Calderón-Zygmund Operators and Their Commutators with BMO Functions in Variable Exponent Morrey Spaces. *Frontiers of Mathematics*, **12**, 1235-1246. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0653-0

[17] Bennett, C. and Sharpley, R.C. (1988) Interpolation of Operators. Academic Press, Cambridge.

[18] Izuki, M. and Noi, T. (2016) Boundedness of Fractional Integrals on Weighted Herz Spaces with Variable Exponent. *Journal of Inequalities and Applications*, **2016**, Article No. 199. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1142-9

[19] Guliyev, V.S. (2012) Generalized Weighted Morrey Spaces and Higher Order Commutators of Sublinear Operators. *European Journal of Mathematics*, **3**, 33-61.

[20] Guliyev, V.S. (2013) Generalized Local Morrey Spaces and Fractional Integral Operators with Rough Kernel. *Journal of Mathematical Sciences*, **193**, 211-227. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1448-9

[21] Duoandikoetxea, J. (2001) Fourier Analysis (Translated and Revised from the 1995 Spanish Original by David Cruz-Uribe). *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/gsm/029

[22] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000