Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1219-1226
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135125

Hardy-Littlewood极大算子在Wiener Amalgam空间中的有界性

吴育联，孙小春*，徐郜婷

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月11日；录用日期：2023年5月12日；发布日期：2023年5月19日

摘　要

本文应用 Wiener amalgam 空间的嵌入关系，证明了 Hardy-Littlewood 极大算子 M 的 $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ 有界性和 Wiener amalgam 空间中的弱 $(1,1)$ 性。

关键词

Hardy-Littlewood极大算子，Lebesgue空间，Wiener Amalgam空间

The Boundedness of the Hardy-Littlewood Maximal Operators in Wiener Amalgam Spaces

Yulian Wu, Xiaochun Sun*, Gaoting Xu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 11^{th}, 2023; accepted: May 12^{th}, 2023; published: May 19^{th}, 2023

Abstract

Using the embedding relationship of Wiener amalgam spaces, we proved that the

* 通讯作者。

文章引用: 吴育联，孙小春，徐郜婷. Hardy-Littlewood极大算子在Wiener Amalgam空间中的有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1219-1226. DOI: 10.12677/pm.2023.135125

Hardy-Littlewood maximal operator M is bounded from $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ to $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$. Meanwhile, we obtained that the Hardy-Littlewood maximal operator M is weak (1,1) in Wiener amalgam spaces.

Keywords

Hardy-Littlewood Maximal Operator, Lebesgue Spaces, Wiener Amalgam Spaces

1. 引言

Hardy-Littlewood 极大算子在不同函数空间中的有界性有众多的研究. Stein 在文献 [1]中具体给出了 Hardy-Littlewood 极大算子在 Lebesgue 空间中是强 (p, p) 型和弱 $(1, 1)$ 型算子. Kinnunen 在文献 [2]中证明了 Hardy-Littlewood 极大算子在 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性, 并得出点态估计的结果. Diening 在文献 [3]中证明了 Hardy-Littlewood 极大算子在变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 中的有界性. Bennett, DeVore 和 Sharpley 在文献 [4]证明了 BMO 空间中 Hardy-Littlewood 极大算子的有界性.

Wiener 在文献 [5]中首次定义了函数空间 $W(L^1, L^2)$ 和 $W(L^2, L^1)$; 在文献 [6] [7] 中又定义了函数空间 $W(L^1, L^\infty)$ 和 $W(L^\infty, L^1)$, 其中 amalgam 空间 $W(L^p, L^q)$ 的标准范数定义为

$$\|f\|_{W(L^p,L^q)} = \left(\sum_{n\in N} \left(\int_n^{n+1} |f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地, 当 $p = q$ 时, $W(L^p, L^p) = L^p$. 若 $p_1 \geq p_2, q_1 \leq q_2$, 则 $W(L^{p_1}, L^{q_1}) \hookrightarrow W(L^{p_2}, L^{q_2})$; 若 $p_1 \leq p_2, q_1 \leq q_2$, 则 $W(\mathcal{F}L^{p_1}, L^{q_1}) \hookrightarrow W(\mathcal{F}L^{p_2}, L^{q_2})$.

Feichtinger 在文献 [8]中将 Wiener 提出的 amalgam 空间 $W(L^p, L^q)$ 推广到一般拓扑群和一般局部域函数空间(或全空间)中, 并称该空间为 Wiener amalgam 空间. 进一步, Feichtinger 研究了 Wiener amalgam 空间的嵌入关系、卷积与对偶性质以及复插值结果.

Heil 在文献 [9]中定义了加权 Wiener amalgam 空间, 并证明了加权 Wiener amalgam 空间的相应性质.

随着 Wiener amalgam 空间的建立, 经典算子在 Wiener amalgam 空间上的有界性也有很多的

研究. Cordero, D$'$Elia 和 Trapasso 在文献 [10]中研究了关于 a 的 τ 伪微分算子 $Op_\tau(a)$ 在模空间和 Wiener amalgam 空间中的连续性. 魏明权和燕敦验在文献 [11]中证明了两类振荡积分算子在混合范数空间上的有界性. Cunanan 和 Tsutsui 在文献 [12]中利用频率一致分解算子和极大不等式研究了 Wiener amalgam 空间的迹算子的有界性, 还得出了标准 Wiener amalgam 空间和各向异性 Wiener amalgam 空间之间的嵌入关系. 本文研究 Hardy-Littlewood 极大算子在 $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ 中的有界性和 Wiener amalgam 空间中的弱 $(1,1)$ 性.

2. 预备知识

符号定义: 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 定义 $|x|^2 = x\cdot x$, 其中 $x\cdot y$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的标量积. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的无穷可微函数空间. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上光滑速降函数空间. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑对偶空间, 也称缓增分布空间.

若 $f,g\in L^2$, 则两个函数 f,g 的内积定义为

$$< f,g >= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

它扩展到 $\mathbb{S}'\times\mathbb{S}$ 也可以由 $<\cdot,\cdot>$ 表示.

设 $1\le p\le\infty$, Fourier-Lebesgue 空间定义为

$$\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^n) = \{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n): \text{存在 } h\in L^p(\mathbb{R}^n), \hat{h} = f\}.$$

若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

平移算子和旋转变换定义为

$$T_h f(t) = f(t-h) \qquad \text{和} \qquad M_\omega f(t) = e^{2\pi i\omega t} f(t).$$

显然 $\mathcal{F}(T_h f) = M_{-h}\hat{f}$, $\mathcal{F}(M_\omega f) = T_\omega\hat{f}$, $M_\omega T_h = e^{2\pi ih\omega} T_h M_\omega$.

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,$g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1\le p,q\le\infty$, 定义 f,g 的卷积为

$$(f*g)(x) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

符号 $B_1\hookrightarrow B_2$ 表示函数空间 B_1 连续嵌入到函数空间 B_2 中.

先给出 Hardy-Littlewood 极大算子和 Wiener amalgam 空间的定义.

定义2.1 [13]若 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, f 的中心 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 定义为

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中 $B(x,r)$ 是以 x 为中心, r 为半径的开球, 即 $B(x,r) = \{y\in\mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$,(简记 $B(0,r)$ 为 $B(r)$). 算子 $M: f\mapsto Mf$ 称为 Hardy-Littlewood 极大算子.

Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 也可以通过卷积的形式表示.

定义2.1 [13]记 v_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 $B(1)$ 的测度, 那么

$$Mf(x) = \sup_{r>0}(|f| * \varphi_r)(x),$$

其中 $\varphi(y) = \frac{1}{v_n}\chi_{B(1)}(y)$, $\varphi_r(y) = \frac{1}{r^n}\varphi(\frac{y}{r})$.

定义2.2 [7]对于任给的 $f \in W(L^1, L^\infty)(\mathbb{R}^n)$, 关于窗口函数 $g \in W(L^\infty, L^1)(\mathbb{R}^n)$ 的短时 Fourier 变换(STFT)定义为

$$V_g f(x,\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}t =< f, M_\omega T_x g >, \quad (x,\omega) \in \mathbb{R}^n.$$

显然有 $V_g f(x,\omega) = (\widehat{f \cdot T_x \bar{g}})(\omega)$, $(x,\omega) \in \mathbb{R}^n$. 若 $g \in \mathbb{S}$ 且 $f \in \mathbb{S}'$, 则 $V_g f$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上是一致连续的.

定义2.3 [8]设 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且满足 $\|g\|_2 = 1$, $1 \le p, q \le \infty$, 定义 Wiener amalgam 空间 $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ 如下

$$\left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{W(\mathcal{F}L^p, L^q)} = \|\|fT_x g\|_{\mathcal{F}L^p}\|_{L^q_x} < \infty \right\},$$

该定义并不依赖于 g 的选择. 另外, 若 B, C 均为 Banach 空间, 则 Wiener amalgam 空间 $W(B,C)$ 可类似定义.

下面介绍本文主要用到的引理.

引理2.1 [9]设 $B_i, C_i (i = 1,2,3)$ 是 Banach 空间, $W(B_i, C_i)$ 为相应于 B_i, C_i 的 Wiener amalgam 空间.

(1)对于任意的 $f_1 \in B_1, g_1 \in B_2$, 存在常数 $c_1 > 0$, 使得

$$\|f_1 * g_1\|_{B_3} \le c_1 \|f_1\|_{B_1}\|g_1\|_{B_2},$$

且对于任意的 $f_2 \in C_1, g_2 \in C_2$, 存在常数 $c_2 > 0$, 使得

$$\|f_2 * g_2\|_{C_3} \le c_2 \|f_2\|_{C_1}\|g_2\|_{C_2},$$

则存在常数 $c > 0$, 使得对于任意的 $f \in W(B_1, C_1), g \in W(B_2, C_2)$, 有

$$\|f * g\|_{W(B_3,C_3)} \le c\|f\|_{W(B_1,C_1)}\|g\|_{W(B_2,C_2)}.$$

(2)若 $B_1 \hookrightarrow B_2$ 且 $C_1 \hookrightarrow C_2$, 则有 $W(B_1, C_1) \hookrightarrow W(B_2, C_2)$.

特别地, 对于 $1 \le p_i, q_i \le \infty, i = 1,2$, 且 $p_1 \ge p_2, q_1 \le q_2$, 则有

$$W(L^{p_1}, L^{q_1}) \hookrightarrow W(L^{p_2}, L^{q_2}).$$

(3)对于任意的 $u \in W(B_1, C_1) \cap W(B_2, C_2)$ 且 $\theta \in [0,1]$, 则 $u \in W(B_3, C_3)$ 且

$$\|u\|_{W(B_3,C_3)} \leq \|u\|^{\theta}_{W(B_1,C_1)}\|u\|^{1-\theta}_{W(B_2,C_2)}$$

(4)若 B', C' 分别是 Banach 空间 B, C 的对偶拓扑空间, 且 C_0^∞ 在 B 和 C 中均稠密, 则 $W(B,C)$ 的对偶空间 $W(B,C)' = W(B',C')$.

引理2.2 [13] Hardy-Littlewood 极大算子 M 是弱 $(1,1)$ 型算子. 即存在常数 $C = C_n$, 使得对任意的 $\lambda > 0$ 及 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

引理2.3 若 $1 \leq p, q \leq \infty$, 则

$$W(\mathcal{F}L^p, L^q) * W(\mathcal{F}L^\infty, L^1) \hookrightarrow W(\mathcal{F}L^p, L^q),$$

即存在一个常数 C , 使得对于任意的 $f \in W(\mathcal{F}L^p, L^q)$, $g \in W(\mathcal{F}L^\infty, L^1)$, 有

$$\|f * g\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)} \leq C\|f\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)}\|g\|_{W(\mathcal{F}L^\infty,L^1)}.$$

证 由 Young 不等式有 $L^q * L^1 \hookrightarrow L^q$.

根据引理2.1(1)可知, 我们只需证: $\mathcal{F}L^p * \mathcal{F}L^\infty \hookrightarrow \mathcal{F}L^p$.

而 $\mathcal{F}L^p * \mathcal{F}L^\infty = \mathcal{F}(L^p \cdot L^\infty) \hookrightarrow \mathcal{F}L^p$, 即 $\mathcal{F}L^p * \mathcal{F}L^\infty \hookrightarrow \mathcal{F}L^p$.结论得证.

3. 定理及证明

首先给出 Hardy-Littlewood 极大算子在 Wiener amalgam 空间 $W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ 中的有界性.

定理3.1 对于 $1 < p, q < \infty$, 若 $f \in W(\mathcal{F}L^p, L^q)$, 则 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 $W(\mathcal{F}L^p, L^q) \to W(\mathcal{F}L^p, L^q)$ 有界的. 即

$$\|Mf\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)} \leq C\|f\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)}.$$

证 因为 $Mf(x) = \sup\limits_{r>0}(|f| * \varphi_r)(x)$, 由 Fourier 变换的基本性质和 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned}
\|\varphi_r(x)\|_{W(\mathcal{F}L^\infty,L^1)} &= \|\|\varphi_r(x)T_y g(x)\|_{\mathcal{F}L^\infty_x}\|_{L^1_y} \\
&\leq \|\|\varphi_r(x)T_y g(x)\|_{L^1_x}\|_{L^1_y} \\
&\leq \left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_r(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1_y} \\
&\leq C_1\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1_y},
\end{aligned}$$

其中 $C_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_r(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{v_n r^n}$.

下证 $\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_y^1}$ 可积.

由 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_y^1}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|g(x-y)|\chi_{B(x,\alpha)}(y))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\chi_{B(\alpha)}(y)\mathrm{d}y\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)\chi_{B(x,\alpha)}(y)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(\alpha)}\left|\chi_{B(\alpha)}(y)\right|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_2\|g\|_{W(L^2,L^2)},
\end{aligned}$$

其中 $\chi_{B(x,\alpha)}(y)$ 为窗口函数, $\alpha>0,B(x,\alpha)$ 是以 x 为球心, α 为半径的球.

而 $\|g\|_{W(L^2,L^2)}=\|g\|_{L^2}=1$, 所以 $\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_y^1}\le C_2$.

所以 $\|\varphi_r(x)\|_{W(\mathcal{F}L^\infty,L^1)}\le C$ $(C=C_1C_2)$, 即 $\varphi_r(x)\in W(\mathcal{F}L^\infty,L^1)$.

因此, 根据引理2.3可知

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)}&\le\|\varphi_r\|_{W(\mathcal{F}L^\infty,L^1)}\|f\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)}\\
&\le C\|f\|_{W(\mathcal{F}L^p,L^q)}.
\end{aligned}$$

定理得证.

推论3.2 对于 $1<q\le\infty$, 若 $f\in W(L^1,L^q),\bar{g}\in W(L^\infty,L^1)$, 且 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 $L^p\to L^p$ 有界的, 则算子 M 也是 $W(L^1,L^q)\to W(\mathcal{F}L^\infty,L^q)$ 有界的.

证 令 $Q=[0,1)^n$ 表示单位方体, 则

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{W(\mathcal{F}L^\infty,L^q)}&=\|\|Mf(x)T_yg(x)\|_{\mathcal{F}L_x^\infty}\|_{L_y^q}\\
&\le\|\|Mf(x)T_yg(x)\|_{L_x^1}\|_{L_y^1}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)T_yg(x)|\mathrm{d}x\right)^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{Q+k}|Mf(x)T_yg(x)|\mathrm{d}x\right)^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sup_{Q+k}T_yg(x)\int_{Q+k}|Mf(x)|\mathrm{d}x\right)^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{Q+k} T_y g(x) \right)^q \left(\int_{Q+k} |Mf(x)| \mathrm{d}x \right)^q \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{Q+k} T_y g(x) \right)^q \left(\int_{Q+k} |f(x)| \mathrm{d}x \right)^q \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{Q+k} T_y g(x) \right\|_{L^\infty} \left\| \int_{Q+k} |f(x)| \mathrm{d}x \right\|_{L^q} \\
&\le \|\bar{g}\|_{W(L^\infty, L^1)} \|f\|_{W(L^1, L^q)}
\end{aligned}
$$

而 $\bar{g} \in W(L^\infty, L^1)$, 即$\|Mf\|_{W(\mathcal{F}L^\infty, L^q)} \le C\|f\|_{W(L^1, L^q)}$.
定理得证.

众所周知, Hardy-Littlewood 极大算子在 Lebesgue 空间是弱 $(1,1)$ 型算子. 根据 Wiener amalgam 空间与 Lebesgue 空间之间的关系,我们证明了 Hardy-Littlewood 极大算子在 Wiener amalgam 空间中也是弱 $(1,1)$ 型算子.

定理3.3 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 Wiener amalgam 空间中是弱 $(1,1)$ 型算子. 即存在常数 C , 使得对任意的 $\lambda > 0$ 及 $f \in W(L^1, L^1)$ 有

$$
|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{W(L^1, L^1)}.
$$

证 由于 $L^1 = W(L^1, L^1)$, 根据引理2.2 可知

$$
|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_{W(L^1, L^1)}.
$$

定理得证.

基金项目

国家自然科学基金(11601434)。

参考文献

[1] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton, 149-182.

[2] Kinnunen, J. (1997) The Hardy-Littlewood Maximal Function of a Sobolev Function. *Israel Journal of Mathematics*, **100**, 117-124. https://doi.org/10.1007/BF02773636

[3] Diening, L. (2004) Maximal Function on Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(\cdot)}$. *Mathematical Inequalities and Applications*, **7**, 245-253. https://doi.org/10.7153/mia-07-27

[4] Bennett, C., DeVore, R.A. and Sharpley, R.C. (1981) Weak-L^∞ and BMO. *Annals of Mathematics*, **113**, 601-611. https://doi.org/10.2307/2006999

[5] Wiener, N. (1926) On the Representation of Functions by Trigonometrical Integrals. *Mathematische Zeitschrift*, **24**, 575-616. https://doi.org/10.1007/BF01216799

[6] Wiener, N. (1932) Tauberian Theorems. *Annals of Mathematics*, **33**, 1-100. https://doi.org/10.2307/1968102

[7] Wiener, N. (1988) The Fourier Integral and Certain of Its Applications (Cambridge Mathematical Library). Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Feichtinger, H.G. (1983) Banach Convolution Algebras of Wiener Type. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **35**, 509-524.

[9] Heil, C. (2003) An Introduction to Weighted Wiener Amalgams. In: Krishna, M., Radha, R. and Thangavelu, S., Eds., *Wavelets and Their Applications*, Allied Publishers, New Delhi, 183-216.

[10] Cordero, E., D'Elia, L. and Trapasso, S.I. (2019) Norm Estimates for τ-Pseudodifferential Operators in Wiener Amalgam and Modulation Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **471**, 541-563. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.10.090

[11] Wei, M.Q. and Yan, D.Y. (2018) The Boundedness of Two Classes of Oscillator Integral Operators on Mixed Norm Space. *Advances in Mathematics (China)*, **47**, 71-80.

[12] Cunanan, J. and Tsutsui, Y. (2016) Trace Operators on Wiener Amalgam Spaces. *Journal of Function Spaces*, **2016**, Article ID: 1710260. https://doi.org/10.1155/2016/1710260

[13] 丁勇. 现代分析基础[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.