Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1227-1233
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135126

Hans汉斯

基于弹性升阶变换法的一类可化为合流超几何方程的一阶非线性常微分方程的求解

付雪倩，李顺初，刘　盼，邵东凤，范　林

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年4月11日；录用日期：2023年5月12日；发布日期：2023年5月19日

摘　要

根据弹性的可分析一个变量对另一个变量的相对变化率的特性，本文创新性的引进了一种微分变换——弹性升阶变换，用于解决一类一阶非线性常微分方程的求解问题；它可将一阶非线性常微分方程转化为合流超几何方程，从而求得其解；并归纳总结出可扩展应用该方法的解题步骤。该方法为某些一阶非线性常微分方程的求解提供了一种新方法，从而扩大了微分方程的可解类。

关键词

非线性微分方程，合流超几何方程，微分变换，弹性升阶变换

Solving a Class of First-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations Which Can Be Transformed into Confluent Hypergeometric Equation Based on Elastic Upgrading Transformation Method

Xueqian Fu, Shunchu Li, Pan Liu, Dongfeng Shao, Lin Fan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 11th, 2023; accepted: May 12th, 2023; published: May 19th, 2023

Abstract

According to the characteristic of elasticity that can analyze the relative rate of change of one va-

文章引用: 付雪倩, 李顺初, 刘盼, 邵东凤, 范林. 基于弹性升阶变换法的一类可化为合流超几何方程的一阶非线性常微分方程的求解[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1227-1233. DOI: 10.12677/pm.2023.135126

riable to another, this paper innovatively introduces a differential transformation, the elastic upgrading transformation, for solving a class of first-order nonlinear ordinary differential equations. It can transform the first-order nonlinear ordinary differential equation into a confluent hypergeometric equation, and thus find its solution, and summarize the steps of applying the method to solve the problems. This method provides a new method for solving some first-order nonlinear ordinary differential equations, so that the solvable type of differential equations is expanded.

Keywords

Nonlinear Differential Equations, Confluent Hypergeometric Equation, Differential Transformation, Elastic Upgrading Transformation

1. 引言

众所周知，弹性理论最早是由英国著名经济学家马歇尔[1]首次提出，用于解释价格与需求的关系，在经济学中广泛运用，并占有重要的地位。弹性表达式由 Woods [2]提出用于代谢控制系统的分析。近年来，很多学者[3] [4]将弹性在物理学、经济学等领域中的应用进行了广泛研究。但是弹性能否用于求解常微分方程呢？

在通常的文献中[5] [6]，已有许多常微分方程的求解方法，如：分离变量法，积分因子法，常数变易法等。但是这些方法都只能用于求解某些常见的常微分方程，因此寻求更多的非线性微分方程的求解方法，成为了数学和物理学科中的热点课题。

利用积分变换求解微分方程也是一种大家公认的有效的方法之一，许多学者对其进行了广泛的研究。Ahmed [7]等人运用指数形式的积分函数变换，求解了二阶线性常微分方程的通解，并将其推广到了一般的二阶常微分方程的求解中；Maitama [8]等人提出了一种 Laplace 型积分变换 Shehu 变换，用于求解常微分方程和偏微分方程；Atangana 等人[9]提出了一种新的积分变换算子，并运用该积分变换算子得到了一类含有奇异性的分数阶常微分方程和偏微分方程的解；Kim [10]利用积分和 Laplace 变换验证了变系数常微分方程的解的形式，并为建立一般的积分变换理论提出了一点思考。Fatoorehchi 等人[11]研究了非线性常微分方程的解，并运用扩展的 Laplace 变换得到了 Riccati 方程、Clairaut’s 方程、Blasius 方程的解。Fatoorehchi [12]等人采用扩展 Laplace 变换研究了 Thomas-Fermi 方程，并得到了方程的半解析、半数值的解。

利用微分变换求解常微分方程也是一种有用的方法，也有多名学者在这方面做了相关的研究。虞继敏等人[13]通过变量代换，其实质也是一种微分变换，将三阶变系数常微分转化为微分方程组，结合刘维尔公式得到了三阶变系数常微分方程的通解；Agboola 等人[14]研究了三阶常微分方程的初值问题，并应用基于泰勒级数的微分变换得到了三阶常微分方程初值问题的解；Badani [15]采用一种微分变换得到了任意二阶和三阶线性非齐次常微分方程以及二阶非齐次柯西－欧拉方程的积分型闭型解，并将该方法应用于求解 n 阶线性非齐次常微分方程。

大家共知，积分变换中的 Fourier 变换具有强烈的实际应用背景，而微分变换中是否也存在相当的具有实际应用背景的某种变换呢？目前已有相关学者尝试利用弹性变换法对微分方程进行求解，但是他们

只是针对 Laguerre 方程、Chebyshev 方程和 Legendre 方程等进行了研究[16] [17] [18] [19]。本文从研究弹性的微分性质出发，引入了一种新的微分变换——弹性升阶变换，创新性地将其应用于求解一类可化为合流超几何方程的一阶非线性常微分方程。

文章结构如下：首先给出了弹性的微分性质以及关于合流超几何方程的知识；其次给出并证明了本文的主要定理；然后归纳总结出弹性升阶变换求解步骤；紧接着将归纳总结出的弹性升阶变换求解步骤进行举例应用；最后对论文做出了总结和进一步的认识。

2. 预备知识

定义 1 对于可微函数 $y=f(x)$，且 $f(x)\neq 0$ 有

$$\eta=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

其中 η 称为 $y=f(x)$ 相对于 x 的弹性函数，它在某点 x_0 的值称为弹性系数，记作 η_{x_0}。

引理 1 若 η 为 $y=f(x)$ 相对于 x 的弹性函数，且 $f(x)\neq 0$ 二阶可微，则有

$$\eta'=\frac{x}{y}y''-\frac{x}{y^2}(y')^2+\frac{1}{y}y' \tag{2}$$

证明 由定义 1 知

$$\eta=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

从而有

$$\begin{aligned}\eta'&=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{y-xy'}{y^2}y'+\frac{x}{y}y''\\&=\frac{x}{y}y''-\frac{x}{y^2}(y')^2+\frac{1}{y}y'\end{aligned}$$

即引理 1 得证。

引理 2 合流超几何方程

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0 \tag{3}$$

其中 α 为参数，$\gamma\neq$ 整数。其通解为：

$$y=AF(\alpha,\gamma,x)+Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x) \tag{4}$$

其中 A,B 为常数，且 $B\neq 0$。$F(\alpha,\gamma,x)$ 为第一类合流超几何函数，可以表示为

$$F(\alpha,\gamma,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!(\gamma)_k}x^k$$

其中 $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$，且 $(\alpha)_0=1$。特别地，$\alpha=\gamma$ 时有 $F(\alpha,\alpha,x)=\mathrm{e}^x$。

证明 见参考文献[20]。

引理 3 合流超几何函数的微分性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\alpha,\gamma,x)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,x)$$

证明 见参考文献[20]。

3. 主要定理及其证明

定理 1 形如

$$xz' + z^2 + (\gamma - x - 1)z - \alpha x = 0 \tag{5}$$

一阶非线性常微分方程，其中 α 为参数，$\gamma \neq$ 整数，它的解可以表示为：

$$z = \frac{x\left[C\dfrac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,x) + (1-\gamma)x^{-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,1-\gamma,x)\right]}{CF(\alpha,\gamma,x) + x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x)} \tag{6}$$

其中 C 为常数。

证明 对于一阶非线性常微分方程

$$xz' + z^2 + (\gamma - x - 1)z - \alpha x = 0$$

首先，对其做微分变换，令

$$z = \frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y \neq 0$$

其中 y 为关于 x 的函数。对 z 求关于 x 的导数可以得到

$$z' = \frac{x}{y}y'' - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 x + \frac{y'}{y} \tag{7}$$

然后，将(7)式带入原方程，可得

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{8}$$

由引理 2 知(8)式为以 α 为参数，$\gamma \neq$ 整数的合流超几何方程。像这种 z 关于 x 的一阶常微分方程，若把 z 当作另外一个变量 y 的弹性，则可以将 z 关于 x 的一阶非线性常微分方程转化为 y 关于 x 的二阶线性常微分方程，这即是所谓的弹性升阶变换的思想。

再由引理 2 知合流超几何方程的通解为

$$y = AF(\alpha,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x)$$

其中 A, B 为常数且 $B \neq 0$。

最后，由于 $z = \dfrac{x}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即可得到原方程的通解为

$$z = \frac{x\dfrac{\mathrm{d}\left[AF(\alpha,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x)\right]}{\mathrm{d}x}}{AF(\alpha,\gamma,x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x)} \tag{9}$$

通过引理 3 对(9)式进行化简得

$$z = \frac{x\left[C\dfrac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,x) + (1-\gamma)x^{-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,1-\gamma,x)\right]}{CF(\alpha,\gamma,x) + x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma,x)}$$

其中 C 为常数，且 $C = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$。

即定理 1 得证。

4. 弹性升阶变换求解步骤

通过对定理 1 的证明，我们可以归纳总结出利用弹性升阶变换法求解一类可化为合流超几何方程的一阶非线性常微分方程的求解步骤：

第一步：判断所求方程是否为形如(5)式的一阶非线性常微分方程；

第二步：利用弹性升阶变换法令 $z=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y\neq 0$，并求出 z'；

第三步：将 z, z' 带入到原一阶非线性常微分方程，将其转化为合流超几何方程；

第四步：通过引理 2 求得合流超几何方程的通解；

第五步：对合流超几何方程的解求弹性，即得到原一阶非线性常微分方程的通解。

通过以上的求解步骤，可以得到如下的基于弹性升阶变换法求解一类可化为河流超比方程的一阶非线性常微分方程的求解流程图(图 1)：

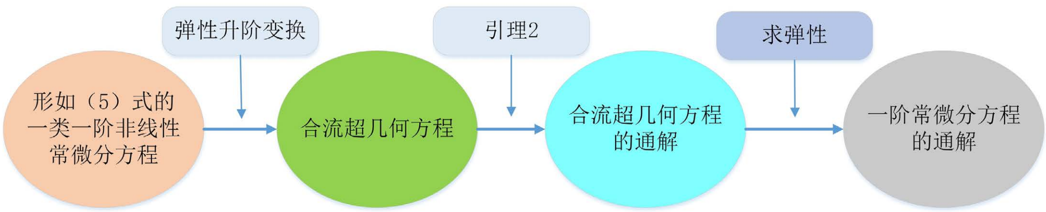

Figure 1. Upgrading transformation method solution flow chart
图 1. 弹性升阶变换求解流程图

5. 举例

求解下列一阶非线性常微分方程的通解

$$xz'+z^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)z-x=0 \tag{10}$$

第一步：容易知道(10)式为形如(5)式的一阶非线性常微分方程。

第二步：利用弹性升阶变换法，令

$$z=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y\neq 0 \tag{11}$$

并求得

$$z'=\frac{x}{y}y''-\left(\frac{y'}{y}\right)^2 x+\frac{y'}{y} \tag{12}$$

第三步：将(11)、(12)式代入(10)式，则可以将 z 关于 x 的一阶非线性常微分方程转化为 y 关于 x 的二阶线性常微分方程

$$xy''+\left(\frac{1}{2}-x\right)y'-y=0 \tag{13}$$

通过引理 2 容易知道(13)式为 $\alpha=1, \gamma=\frac{1}{2}$ 的合流超几何方程。

第四步：通过引理 2 知(13)式的通解为

$$
\begin{aligned}
y &= AF\left(1,\frac{1}{2},x\right)+B\sqrt{x}F\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},x\right) \\
&= AF\left(1,\frac{1}{2},x\right)+B\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中 A,B 为常数，且 $B\neq 0$。

第五步：对合流超几何方程的解求弹性，即 $z=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则可以得到原一阶非线性常微分方程的通解为

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{2AxF\left(2,\frac{3}{2},x\right)+B\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{2}+x\right)}{AF\left(1,\frac{1}{2},x\right)+B\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{4CxF\left(2,\frac{3}{2},x\right)+\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}\left(1+2x\right)}{2CF\left(1,\frac{1}{2},x\right)+2\sqrt{x}\mathrm{e}^{x}}
\end{aligned}
$$

其中 $C=\frac{A}{B},B\neq 0$。

6. 结论

1) 本文以合流超几何方程为例，说明了弹性升阶变换可将某些一阶非线性常微分方程线性化，从而获得其解。

2) 从我们解决问题的思路中不难看出，只要通过弹性升阶变换后得到的方程可解，都可以采用该方法进行求解；显而易见，这种做法扩大了微分方程的可解类。

3) 弹性升阶变换求解非线性常微分方程的实质也是一种微分变换，但以往的微分变换只能对方程进行降阶求解，因此通过弹性升阶变换求解微分方程不仅克服了以往的方法不能升阶的困难，而且为微分方程的求解增加了一种新方法。

参考文献

[1] Marshall, A. (1920) Principles of Economics. Macmillan and Co, London.

[2] Woods, J.H. and Sauro, H.M. (1997) Elasticities in Metabolic Control Analysis: Algebraic Derivation of Simplified Expressions. *Computer Applications in the Biosciences*: *CABIOS*, **13**, 123-130. https://doi.org/10.1093/bioinformatics/13.2.123

[3] Wiratni, W. and Kono, H.O. (2005) Determination of Intrinsic Minimum Bubbling Velocity in Fine Powder Aerations Based on Experimentally Measured Elastic Deformation Coefficients. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **83**, 418-424. https://doi.org/10.1002/cjce.5450830304

[4] 王军, 詹韵秋. “五大发展理念”视域下中国经济增长质量的弹性分析[J]. 软科学, 2018, 32(6): 26-29.

[5] E.卡姆克. 常微分方程手册[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[6] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[7] Ahmed, Z. and Kalim, M. (2018) A New Transformation Technique to Find the Analytical Solution of General Second Order Linear Ordinary Differential Equation. *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, **5**, 109-114. https://doi.org/10.21833/ijaas.2018.04.014

[8] Maitama, S. and Zhao, W. (2019) New Integral Transform: Shehu Transform a Generalization of Sumudu and Laplace Transform for Solving Differential Equations. *International Journal of Analysis and Applications*, **17**, 167-190.

[9] Atangana, A. and Kilicman, A. (2013) A Novel Integral Operator Transform and Its Application to Some FODE and FPDE with Some Kind of Singularities. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID: 531984.

https://doi.org/10.1155/2013/531984

[10] Kim, H. (2016) The Form of Solution of ODEs with Variable Coefficients by Means of the Integral and Laplace Transform. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, **12**, 2901-2904.

[11] Fatoorehchi, H. and Abolghasemi, H. (2016) Series Solution of Nonlinear Differential Equations by a Novel Extension of the Laplace Transform Method. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 1299-1319. https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1045421

[12] Fatoorehchi, H. and Alidadi, M. (2017) The Extended Laplace Transform Method for Mathematical Analysis of the Thomas-Fermi Equation. *Chinese Journal of Physics*, **55**, 2548-2558. https://doi.org/10.1016/j.cjph.2017.10.001

[13] 虞继敏, 郑继明, 关中博. 变系数三阶线性微分方程的一种解法[J]. 高等数学研究, 2010, 13(3): 13-15.

[14] Agboola, O.O., Opanuga, A.A. and Gbadeyan, J.A. (2015) Solution of Third Order Ordinary Differential Equations Using Differential Transform Method. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, **11**, 2511-2516.

[15] Badani, D. (2014) On Closed-Form Solutions to a Class of Ordinary Differential Equations. *International Journal of Advanced Mathematical Sciences*, **2**, 57-70. https://doi.org/10.14419/ijams.v2i1.1556

[16] Fan, L., Li, S.C., Shao, D.F., *et al*. (2022) Elastictransformation Method for Solving the Initial Value Problem of Variable Coefficient Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Aims Mathematics*, **7**, 11972-11991. https://doi.org/10.3934/math.2022667

[17] Zheng, P.S., Tang, J., Leng, L.H., *et al*. (2023) Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients by Elastic Transformation Method. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 1297-1320. https://doi.org/10.1007/s12190-022-01791-2

[18] Zheng, P.S., Luo, J., Li, S.C., *et al*. (2022) Elastic Transformation Method for Solving Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients. *Aims Mathematics*, **7**, 1307-1320. https://doi.org/10.3934/math.2022077

[19] 李顺初, 邵东凤, 范林, 等. 基于弹性降阶变换法求解一类可化为Legendre方程的微分方程初值问题[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2022, 37(4): 1-7.

[20] 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 2002.