Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1363-1369
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135139

Hans汉斯

G-期望框架下G-Lévy过程的Black-Scholes公式

郑 红，李 洋*

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月21日；录用日期：2023年5月22日；发布日期：2023年5月29日

摘 要

随着金融市场的蓬勃发展，Black-Scholes公式得到了广泛研究，我们考虑在G-期望框架下，对于G-布朗运动和G-跳过程共同驱动的线性随机微分方程，由G-伊藤公式和泰勒公式，严格得到了Black-Scholes公式并给出了证明。

关键词

Black-Scholes方程，G-期望，G-Lévy过程，G-伊藤公式

Black-Scholes Formula for G-Lévy Process under G-Expectation Framework

Hong Zheng, Yang Li*

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 21st, 2023; accepted: May 22nd, 2023; published: May 29th, 2023

Abstract

With the rapid development of the financial market, Black-Scholes formula has been widely studied. We consider that under the G-expectation framework, for the linear stochastic differential equation driven by G-Brownian motion and G-jump process, the Black-Scholes formula is strictly obtained and proved by G-Ito formula and Taylor formula.

Keywords

Black-Scholes Equation, G- Expectation, G-Lévy Process, G-Ito Formula

*通讯作者。

文章引用: 郑红, 李洋. G-期望框架下 G-Lévy 过程的 Black-Scholes 公式[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1363-1369.
DOI: 10.12677/pm.2023.135139

1. 引言

在过去的 30 年里，随机过程在数学金融的应用中得到了广泛的研究，除了随机过程的随机性外，还具有波动不确定性，这意味着波动率不是精确已知的，2007 年，Peng [1]引入了特殊的新的次线性期望——G-期望，G-期望是由生成元函数为 G 的非线性抛物型偏微分方程的解定义的，他在 G-期望框架下定义了 G-正态分布和 G-布朗运动，G-布朗运动非平凡地推广了经典运动。简而言之，G-布朗运动是在给定次线性期望下，具有独立且平稳增量的连续过程，可来模拟这种波动不确定性。自 2007 以来，G-期望和 G-布朗运动相关理论取得了重大进展。2008 年，Peng [2]证明了次线性期望下的大数定律和中心极限定理，并定义了关于 G-布朗运动的伊藤积分。之后，Peng [3]得到了 G-伊藤公式，证明了 G-布朗运动驱动的随机微分方程(简称 G-SDEs)和 G-布朗运动驱动的倒向随机微分方程(简称 G-BSDEs)解的存在唯一性。此后，G-期望空间和 G-伊藤积分的应用得到了许多研究者的广泛研究。Yang 和 Zhao [4]介绍了 G-期望下的 G-布朗运动和 G-正态分布的模拟，Chai [5]研究了 G-框架下随机微分方程的期权定价问题。虽然 G-布朗运动解决了许多金融问题，但一些依赖莱维过程的金融模型仍然没有解决。因此，Peng 和 Hu [6]研究了 G-莱维过程，这是 G-布朗运动的推广。Krzysztof [7]对 G-莱维过程引入了 G-伊藤公式和 G-鞅表示。王[8]研究了 G-期望下的 G-Jensen 不等式。王[9]研究比较定理与 G-期望下的亚洲期权定价。康[10]研究了 G-期望下的布朗运动鞅表示定理。

20 世纪 70 年代，随着金融市场的飞速发展，金融领域的定价问题广泛引起人们的兴趣。而期权定价问题的研究更是受人关注，特别是 Black 和 Scholes 得出欧式看涨期权的显示解。布莱克－斯科尔斯定价公式得到广泛应用，但是定价公式本身的一些假设与现实存在一定出入。随后，著名的布莱克－斯科尔斯公式受到了许多学者的重视。1976 年，在假设利率为常数的条件下，Merton [11]提出了股票价格的对数跳扩散模型，该模型被描述为布朗运动和复合泊松过程的结合。自此，关于带跳扩散的其它期权方面的研究也屡见不鲜。而随着 G-期望的迅速发展，G-框架下的欧式期权定价公式也得到了众多学者的关注，2010 年，Xv [12]等人给出了 G-几何布朗运动描述的资产价格变动，得到了欧式看涨期权定价公式。2014 年，Lu 和 Liu [13]利用 G-几何布朗运动描述的资产价格变动，进而得到 G-框架下的欧氏幂期权的定价公式。2021 年，Xin 和 Zheng [14]给出了 G-莱维下的布莱克－斯科尔斯定价公式，并给出相关模拟。关于 G-期望下的数值模拟的更多细节可参考[15]及其参考文献。

本文主要对 G-期望下的相关理论做了进一步的研究，我们考虑股票价格 S_t，令：

$$\mathrm{d}S_t = a(t)S_t\mathrm{d}t + b(t)S_t\mathrm{d}B_t + c(t,e)S_t\mathrm{d}N_t,\quad t\in[0,T],$$

其中 $a(t)$ 是利率，$b(t)$ 是波动率，$c(t,e)$ 是资产价格的跳跃范围，在 G-框架下，W_t 是 G-布朗运动，N_t 是 G-Lévy 过程。

本文其它部分构成如下：在第二节中，我们给出 G-期望框架下的相关概念，第三节中我们对 G-Lévy 过程下提出的 Black-Scholes 方程定理，并进行证明，最后，我们对我们的成果进行了总结。

2. 预备知识

G-随机分析

本章中，主要给出 G-随机分析的一些基本相关知识，设 Ω 为给定集合，设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上定义的实值函数

的线性空间，假设对于任意的常数 C 满足 $C\in\mathcal{H}$，如果 $X\in\mathcal{H}$，则 $|X|\in\mathcal{H}$，空间 $\mathcal{H}$ 被看作是一个随机变量组成的线性空间。

定义 2.1.1 [3] **(次线性期望)**一个非线性期望 $\mathbb{E}$ 是定义在随机变量空间 $\mathcal{H}$ 上，并满足以下条件的一个泛函 $\mathcal{H}\mapsto\mathbb{R}$

单调性：$\mathbb{E}[X]\geq\mathbb{E}[Y]$，如果 $X,Y\in\mathcal{H}$ 且 $X\geq Y$。

保常性：$\mathbb{E}[C]=C,\forall C\in\mathbb{R}$。

次可加性：$\mathbb{E}[X+Y]\leq\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$，$\forall X,Y\in\mathcal{H}$。

正齐次性：$\mathbb{E}[\lambda X]=\lambda\mathbb{E}[X],\forall\lambda\geq 0,X\in\mathcal{H}$。

$(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 被称为次线性期望空间。

定义 2.1.2 [3] **(分布函数)**设 $X=(X_1,\cdots,X_n)\in(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$。在 $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ 上设 $\mathbb{F}_X$：

$$\mathbb{F}_X[\varphi]:=\mathbb{E}[\varphi(X)],$$

其中 $\mathbb{E}[\varphi(X)]:\varphi\in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)\to(-\infty,+\infty)$，我们称 $\mathbb{F}_X$ 为随机变量 X 的分布函数。

定义 2.1.3 [3] **(同分布)**设 $X_1\in(\Omega_1,\mathcal{H}_1,\mathbb{E}_1)$ 和 $X_2\in(\Omega_2,\mathcal{H}_2,\mathbb{E}_2)$，当且仅当

$$\mathbb{E}_1[\varphi(X_1)]=\mathbb{E}_2[\varphi(X_2)],\ \forall\varphi\in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n),$$

记作 $X_1\sim X_2$。

定义 2.1.4 [3] **(相互独立)**设 $X=(X_1,\cdots,X_m)\in(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$，$Y=(Y_1,\cdots,Y_n)\in(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$，称 X 与 Y 独立，当且仅当

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(x,Y)]_{x=X}\right],\ \forall\varphi\in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n).$$

定义 2.1.5 [3] **(G-正态分布)**在 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上，记随机变量 X 服从标准 G-正态分布，其中 $X\sim N\left(0,\left[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2\right]\right)$，若满足

$$aX+b\overline{X}\sim\sqrt{a^2+b^2}X,\forall a,b\geq 0,$$

这里 $\overline{X}$ 是独立于 X 的随机变量. 其中 $\overline{\sigma}^2=\mathbb{E}[X^2]$，并且 $\underline{\sigma}^2=-\mathbb{E}[-X^2]$。

这里字母 G 表示函数

$$G(\alpha):=\frac{1}{2}\mathbb{E}[\alpha X^2]=\frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2\alpha^+-\underline{\sigma}^2\alpha^-\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R},G(\cdot):=S(d)\to\mathbb{R}$$

其中是单调的线性泛函，$S(d)$ 表示由 d 维对称矩阵构成的集合，则存在有界闭凸子集 $\sum\subset S_+(d)=\{\theta\in S(d),\theta\geq 0\}$，使得

$$G(A)=\frac{1}{2}\sup_{B\in\sum}(A,B),A\in S(d).$$

下面我们给出 G-布朗运动的定义。

定义 2.1.6 [3] **(G-布朗运动)**设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的一个 d 维过程，满足下列性质

1) $B_0(\omega)=0$；

2) $\forall t,s\geq 0$，$B_{t+s}-B_t$ 和 B_s 是同分布的，$B_{t+s}-B_t$ 独立于 $(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})$，$\forall n\in N$ $0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n\leq t$；

3) $\mathbb{E}[B_t]=\mathbb{E}[-B_t]=0$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\mathbb{E}\left[|B_t|^3\right]t^{-1}=0$；

则 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为 G-布朗运动。

注：记新的 G-布朗运动 $B_s^a=(a,B_s)=\sum_{i=1}^m a_i B_s^i$，其中 $a=(a_1,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$， $B_s=(B_s^1,\cdots,B_s^m)^{\mathrm{T}}$

定义 2.1.7 [3] **(G-Lévy 过程)**设 $(G_t)_{t\ge0}$ 为次线性期望空间 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的 d 维可料过程。如果 G_t 满足以下性质，则称 G_t 为 G-Lévy 过程。

$$G_0=0;$$

独立增量：$\forall t,s\ge0$，增量 $G_{t+s}-G_t$ 是独立的；

平稳增量：增量 $G_{t+s}-G_t$ 的分布是稳定的，不依赖于 t；

对于每个 $t\ge0$， $G_t=G_t^c+G_t^d$， G_t^c 是个连续过程， G_t^d 是个跳过程；

两个过程 G^c 和 G^d 满足以下条件 $\lim\limits_{t\to0}\mathbb{E}\left[\left|G_t^c\right|^3\right]t^{-1}=0$， $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\left|G_t^d\right|\wedge N\right]\le Ct$，对所有的 $t\ge0$。

引理 2.1.1 [3] **(G-伊藤公式)**假设 B_t 是 m 维 G-布朗运动。设 $g\in C^2(\mathbb{R}^d)$ 是有界的，导数也是有界的，并且 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^i\partial x^j}$ 是一致的 Lipschitz 函数。$s\in[0,T]$ 是给定的， X_t^i 是 $X_t=(X_t^1,\cdots,X_t^d)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个分量

$$X_t^i=X_0^i+\int_0^t a_s^i\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^m\int_0^t\eta_s^{i,j}\mathrm{d}\langle B\rangle_s^j+\sum_{j=1}^m\int_0^t\sigma_s^{i,j}\mathrm{d}B_s^j+\int_0^t\int_{\mathcal{E}}c(e,s)N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s),$$

其中 a^i 是 $a=(a^1,\cdots,a^d)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个元素， $\eta^{i,j}$ 和 $\sigma^{i,j}$ 分别是是 $\eta=(\eta^{i,j})_{d\times m}$ 和 $\sigma=(\sigma^{i,j})_{d\times m}$ 的第 i 行、第 j 列元素。设 $B_t=(B_t^1,\cdots,B_t^m)$ 是 m 维 G-布朗运动和 N_t 是 G-Lévy 跳过程，我们有

$$\begin{aligned}g(X_t)-g(X_0)=&\sum_{i=1}^d\left[\int_0^t\frac{\partial g}{\partial x^i}(X_s)a_s^i\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^m\int_0^t\frac{\partial g}{\partial x^i}(X_s)\sigma_s^{i,j}\mathrm{d}B_s^j\right]\\&+\int_0^t\left[\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^m\frac{\partial g}{\partial x^i}(X_s)\eta_s^{i,j}+\frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^d\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2 g}{\partial x^i\partial x^j}(X_s)\sigma_s^{i,j}\sigma_s^{l,j}\right]\mathrm{d}\langle B\rangle_s^j\\&+\int_0^t\int_{\mathcal{E}}\left[g(X_{s-}+c(e,s))-g(X_{s-})\right]N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s)\end{aligned}$$

3. G-Lévy 过程下的 Black-Scholes 公式

在本节中，我们考虑以下股票价格 S_t，使：

$$\mathrm{d}S_t=a(t)S_t\mathrm{d}t+b(t)S_t\mathrm{d}B_t+c(t,e)S_t\mathrm{d}N_t,\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

其中 $a(t)$ 是利率系数， $b(t)$ 是波动率系数， $c(t,e)$ 是资产价格的跳跃系数， B_t 是 G-布朗运动， N_t 是 G-框架下的 G-Lévy 过程。

在本小节中，将结合 G-伊藤公式和泰勒公式，证明得到 G-Lévy 过程下的 Black-Scholes 偏微分方程。

定理 3.1 (Black-Scholes 公式)：假设 $u=u(S_t,t)$ 是期权价格， S_t 是股票价格。对于式(1)，我们可以得到 G-Lévy 过程下的积分偏微分方程(integral-PDE)过程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+aS\frac{\partial u}{\partial S}+\left(u\left(S\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln(1+c(t,e))\lambda(\mathrm{d}e)\right\},t\right)-u(S,t)\right)+G\left(b^2S\frac{\partial u}{\partial S}+b^2S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right)-au=0.$$

其中 $a(t),b(t),c(t,e)\in\mathbb{R}$， $G(p)=\frac{1}{2}\left((p)^+\bar{\sigma}^2-(p)^-\underline{\sigma}^2\right)$。

证明：我们在 $[0,T]$ 上定义时间分割， $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots<t_N=T$， $\Delta t=t_{n+1}-t_n$。令函数 $u(S,t)$ 是足够光滑的， $\Delta\langle B\rangle_n=\langle B\rangle_{t_{n+1}}-\langle B\rangle_{t_n}$ 和 $\Delta B_n=B_{t_{n+1}}-B_{t_n}$，利用 G-伊藤公式，可以得到式(1)的显式解：

$$S_{t_{n+1}}=S_a\exp\left\{\int_{t_n}^{t_{n+1}}a(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}b^2(t)\mathrm{d}\langle B\rangle_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}b(t)\mathrm{d}B_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\left[\ln\left(1+c(t,e)\right)\right]N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)\right\}. \tag{2}$$

在 G-期望空间中，我们有以下乘积法则：

$$\mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}B_t=\mathrm{d}\langle B\rangle_t,\mathrm{d}N_t\cdot\mathrm{d}N_t=\lambda(\mathcal{E})\mathrm{d}t+\left(\lambda(\mathcal{E})\mathrm{d}t\right)^2,\mathrm{d}N_t\cdot\mathrm{d}t=0,\mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}N_t=0.$$

那么，期权定价公式如下形式：

$$u(S_a,t_n)=\frac{1}{r}\mathbb{E}\left[\left[u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u(S_n,t_n)\right]\mid S_{t_n}=S_a\right]+\frac{1}{r}u(S_a,t_n). \tag{3}$$

接下来，我们介绍 G-Lévy 过程下的布莱克－斯科尔斯模型。用泰勒公式对 $u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)$ 进行展开，我们有

$$\begin{aligned}&u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u(S_a,t_n)\\&=\frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial S}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2u(S_a,t_n)}{\partial S^2}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^2\\&\quad+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^ju(S_a,t_n)}{\partial S^j}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^j+O(\Delta t_n)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

将式(2)代入式(4)可得

$$\begin{aligned}&u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u(S_a,t_n)\\&=\frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial S}\left(S_a\exp\left\{X^n\right\}-S_a\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2u(S_a,t_n)}{\partial S^2}\left(S_a\exp\left\{X^n\right\}-S_a\right)^2+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^ju(S_a,t_n)}{\partial S^j}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^j+O(\Delta t_n)^2,\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$X^n=\int_{t_n}^{t_{n+1}}a(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}b^2(t)\mathrm{d}\langle B\rangle_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}b(t)\mathrm{d}B_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\left[\ln\left(1+c(t,e)\right)\right]N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s).$$

对 $a(t),b^2(t),\left[\ln\left(1+c(t,e)\right)\right]$ 在 $t=t_{n+1}$ 处进行泰勒展开得

$$\begin{aligned}X^n&=\int_{t_n}^{t_{n+1}}a(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}b^2(t)\mathrm{d}\langle B\rangle_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}b(t)\mathrm{d}B_t+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\left[\ln\left(1+c(t,e)\right)\right]N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s)\\&=a(t_n)\Delta t_n-\frac{1}{2}b^2(t_n)\Delta\langle B\rangle_n+b(t_n)\Delta B_n+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\left[\ln\left(1+c(t_n,e)\right)\right]N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s)+O(\Delta t_n)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

由 $\exp\left\{X^n\right\}$ 的泰勒展开和(5)可得

$$\begin{aligned}&u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u(S_a,t_n)\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(t_n)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\right]\Delta t-S_a\frac{b^2(t_n)}{2}\frac{\partial u}{\partial S}\Delta\langle B\rangle_n+S_a\frac{\partial u}{\partial S}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c(t_n,e)\right)N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s)\\&\quad+b(t_n)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\Delta B_n+\frac{1}{2}\left[S_a\frac{\partial u}{\partial S}+S_a^2\frac{\partial^2u}{\partial S^2}\right]\left(X^n\right)^2+O(\Delta t)^{\frac{3}{2}}+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^ju(S_a,t_n)}{\partial S^j}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^j\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a(t_n)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\right]\Delta t-S_a\frac{b^2(t_n)}{2}\frac{\partial u}{\partial S}\Delta\langle B\rangle_n+S_a\frac{\partial u}{\partial S}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c(t_n,e)\right)N(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s)\\&\quad+b(t_n)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\Delta B_n+\frac{1}{2}\left[S_a\frac{\partial u}{\partial S}+S_a^2\frac{\partial^2u}{\partial S^2}\right]\left(X^n\right)^2+O(\Delta t)^{\frac{3}{2}}+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^ju(S_a,t_n)}{\partial S^j}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^j,\end{aligned}$$

因为对 $p\in\mathrm{N}$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}}\left[\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\right]N\left(\mathrm{d}e,\mathrm{d}s\right)\right)^p\right]=\left[\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right]^p\left(\Delta t\right)+O\left(\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j!}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^j u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^j}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^j\mid S_{t_n}=S_a\right]-O\left(\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\left(u\left(S_a\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right\},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)\right)\Delta t\\&\quad-\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^j}\left(S_a\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right\}-S_a\right)^j,\end{aligned}$$

将上式代入方程(3)，我们可得

$$\begin{aligned}&u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a\left(t_n\right)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\right]\Delta t-S_a\frac{b^2\left(t_n\right)}{2}\frac{\partial u}{\partial S}\Delta\langle B\rangle_n\\&\quad+S_ab\left(t_n\right)\frac{\partial u}{\partial S}\Delta B_n+\frac{1}{2}\left[S_a\frac{\partial u}{\partial S}+S_a^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right]\left(\frac{b^4\left(t_n\right)}{4}\left(\Delta\langle B\rangle_n\right)^2+b^2\left(t_n\right)\left(\Delta B_n\right)^2\right)\\&\quad+\left(u\left(S_a+S_a\exp\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right),t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)\right)\Delta t+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

将上式代入(5)得

$$\begin{aligned}u=\frac{1}{r}\mathbb{E}\Bigg[&\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\left(t_n\right)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\right)\Delta t-\frac{b^2\left(t_n\right)}{2}S_a\frac{\partial u}{\partial S}\left(\Delta\langle B\rangle_n\right)+b\left(t_n\right)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\left(\Delta B_n\right)\\&+\left(u\left(S_a\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right\},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)\right)\Delta t\\&+\frac{1}{2}\left[S_a\frac{\partial u}{\partial S}+S_a^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right]\left(\frac{b^4\left(t_n\right)}{4}\left(\Delta\langle B\rangle_n\right)^2+b^2\left(t_n\right)\left(\Delta B_n\right)^2\mid S_{t_n}=S_a\right]+\frac{1}{r}u+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

其中 $r=1+a\left(t\right)\Delta t$ 和 $a\left(t\right)$ 是无风险利率，根据 G-期望的性质和 $u=u\left(S_a,t_n\right)$ 和 $\Delta B_n\sim N\left(0,\left[\underline{\sigma}^2\Delta t,\bar{\sigma}^2\Delta t\right]\right)$，可得

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{r}\right)u=&\frac{\Delta t}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+a\left(t_n\right)S_a\frac{\partial u}{\partial S}+\left(u\left(S_a\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t_n,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right\},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)\right)\right]\\&+\frac{\Delta t}{r}G\left\{b^2\left(t_n\right)S_a^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+b^2\left(t_n\right)S_a\frac{\partial u}{\partial S}\right\}+O\left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $G\left(p\right)=\frac{1}{2}\left(\left(p\right)^+\bar{\sigma}^2-\left(p\right)^-\underline{\sigma}^2\right)$.由此，得到积分偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+aS\frac{\partial u}{\partial S}+\left(u\left(S\exp\left\{\int_{\mathcal{E}}\ln\left(1+c\left(t,e\right)\right)\lambda\left(\mathrm{d}e\right)\right\},t\right)-u\left(S,t\right)\right)+G\left(b^2S\frac{\partial u}{\partial S}+b^2S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}\right)-au=0.$$

定理即证。

4. 总结

本文考虑在 G-期望框架下，利用 G-伊藤公式和 G-期望等性质，对于 G-布朗运动和 G-莱维过程共同

驱动的线性随机微分方程，严格得到了 Black-Scholes 公式并给出了证明，和从传统的期权定价公式相比较，考虑在更一般的非线性期望(G-期望)理论下，能够更好的描述复杂的金融市场，利用 G-伊藤公式和 Taylor 公式，结合 G-Lévy 过程(G-布朗运动和 G-跳过程)的随机分析理论，得到 G-布朗运动和 G-跳过程共同驱动的随机微分方程的 Black-Scholes 公式，对于后续在金融期权等相关领域具有重要的研究意义和应用价值。

参考文献

[1] Peng, S. (2007) *G*-Expectation, *G*-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Itô Type. In: Benth, F.E., Di Nunno, G., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T., Eds., *Stochastic Analysis and Applications*, *Abel Symposia*, Vol. 2, Springer, Berlin, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[2] Peng, S. (2008) A New Central Limit Theorem under Sublinear Expectation. (Preprint)

[3] Peng, S. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty: With Robust CLT and G-Brownian Motion. Springer, Berlin.

[4] Yang, J. and Zhao W. (2016) Numerical Simulations for *G*-Rownian Motion. *Frontiers of Mathematics in China*, **11**, 1625-1643. https://doi.org/10.1007/s11464-016-0504-9

[5] Chai, C. (2019) Application of G-Brown Motion in the Stock Price. *Journal of Mathematical Finance*, **10**, 27-34. https://doi.org/10.4236/jmf.2020.101003

[6] Hu, M. and Peng, S. (2009) G-Lévy Processes under Sublinear Expectations. (Preprint)

[7] Krzysztof, P. (2012) Itô Calculus and Jump Diffusions for G-Lévy Processes. (Preprint)

[8] Wang, W. (2009) Properties of G-Convex Function under the Framework of G-Expectations. *Journal of Shandong University*, **44**, 43-46.

[9] Wang, Y. (2018) Research of the Comparison Theorem and Asian Option Pricing under the G-Expectation. Master's Thesis, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing.

[10] Kang, Y. (2012) Brownian Motion Martingale Representation Theorem under the G-Expectation. Master's Thesis, Northwest Normal University, Lanzhou.

[11] Merton, R.C. (1976) Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2

[12] 刘莹莹. 由 G-布朗运动驱动的某些欧式期权的定价及相关问题[D]: [硕士学位论文]. 上海: 东华大学, 2014.

[13] 陆允生, 刘莹莹. 由 G-布朗运动驱动的某些欧式期权的定价[J]. 苏州科技学院学报(自然科学版), 2014, 31(3): 6-9+23.

[14] Xin, Y. and Zheng, H. (2021) Black-Scholes Model under G-Lévy Process. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **9**, 3202-3210. https://doi.org/10.4236/jamp.2021.912209

[15] Yang, J. and Zhao, W. (2016) Numerical Simulations for the *G*-Brownian Motion. *Frontiers of Mathematics in China*, **11**, 1625-1643. https://doi.org/10.1007/s11464-016-0504-9