

# 符号图网拉普拉斯最大特征值的一个上界

刘 燕

福州大学, 数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2023年4月22日; 录用日期: 2023年5月24日; 发布日期: 2023年5月31日

## 摘 要

本文给出了符号图  $\Gamma$  的网拉普拉斯最大特征值  $\kappa_1$  的上界:

$$\kappa_1 \leq \max \left\{ \frac{d_i^\pm + \sqrt{(d_i^\pm)^2 + 8m_i^*d_i - 4M_i}}{2} : i \in V(\Gamma) \right\}, \text{ 其中 } d_i \text{ 为顶点 } i \text{ 的度; } d_i^\pm = d_i^+ - d_i^-, d_i^* = \max\{d_j^+, d_j^-\},$$

$$m_i^* = \frac{\sum_{ij \in E} d_j^*}{d_i}, M_i = \sum_{ij \in E} \left[ \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j \right| - \text{abs} \left( \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)} \right| - \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)} \right| \right) \right]; (\text{abs}) \text{ 表示绝对值函数;}$$

$\sigma(ij)$  表示边  $ij$  的符号;  $N_i, N_i^+$  和  $N_i^-$  分别表示顶点  $i$  的邻域、正邻域和负邻域;  $|U|$  表示集合  $U$  中所含元素的个数。

## 关键词

符号图, 网拉普拉斯矩阵, 最大特征值, 上界

# An Upper Bound for the Largest Net Laplacian Eigenvalue of Signed Graphs

Yan Liu

College of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: Apr. 22<sup>nd</sup>, 2023; accepted: May 24<sup>th</sup>, 2023; published: May 31<sup>st</sup>, 2023

## Abstract

An upper bound for the largest net Laplacian eigenvalue  $\kappa_1$  of a signed graph  $\Gamma$  is given:

$$\kappa_1 \leq \max \left\{ \frac{d_i^\pm + \sqrt{(d_i^\pm)^2 + 8m_i^* d_i - 4M_i}}{2} : i \in V(\Gamma) \right\} \text{ where } d_i \text{ is the degree of vertex } i; d_i^\pm = d_i^+ - d_i^-;$$

$$d_j^* = \max \{d_j^+, d_j^-\}; m_i^* = \frac{\sum_{ij \in E} d_j^*}{d_i}; M_i = \sum_{ij \in E} \left[ |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j| - \text{abs} \left( |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)}| - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)}| \right) \right];$$

(abs) is an absolute value function;  $\sigma(ij)$  denotes the sign of edge  $ij$ ;  $N_i, N_i^+$  and  $N_i^-$  denotes its neighbourhood, the positive neighbourhood and the negative neighbourhood of a vertex  $i$ , respectively;  $|U|$  denotes the number of elements in a set  $U$ .

## Keywords

Signed Graph, Net Laplacian Matrix, Largest Eigenvalue, Upper Bound

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. 引言

将普通图的每条边标上符号(+或者-), 所得到的图称为符号图。符号图最早是在 1953 年 Harary [1] 提出的。设  $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma), \sigma)$  为  $n$  阶符号图, 其中  $V(\Gamma) = \{1, 2, \dots, n\}$  表示顶点集,  $E(\Gamma) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  表示边集,  $e_i (i=1, 2, \dots, m)$  是顶点集的二元子集,  $\sigma: E(\Gamma) \rightarrow \{+1, -1\}$  为符号函数,  $G = (V(\Gamma), E(\Gamma))$  称为符号图  $\Gamma$  的底图, 因此也可将符号图记为  $\Gamma = (G, \sigma)$ 。

对任意的顶点  $i \in V(\Gamma)$ , 记  $d_i$  为顶点  $i$  的度,  $d_i^+$  和  $d_i^-$  分别表示  $i$  的正顶点度和负顶点度(即分别表示与顶点  $i$  相连的正边个数和负边个数), 易知  $d_i = d_i^+ + d_i^-$ 。网度  $d_i^\pm = d_i^+ - d_i^-$ 。对任意的顶点  $i$  和  $j$ , 若  $i$  和  $j$  相邻, 记为  $ij \in E$ ; 若称  $i$  和  $j$  不相邻, 记为  $ij \notin E$ ; 若  $i$  和  $j$  通过正边相邻, 记为  $ij \in E^+$ ; 若  $i$  和  $j$  通过负边相邻, 记为  $ij \in E^-$ 。  $N_i$  表示与顶点  $i$  相邻的顶点集合,  $N_i^+$  表示与顶点  $i$  通过正边相邻的顶点集合,  $N_i^-$  表示与顶点  $i$  通过负边相邻的顶点集合。关于符号图的其它记号, 读者可以参考[2]。

符号图  $\Gamma$  的网拉普拉斯矩阵定义为  $N(\Gamma) = D^\pm(\Gamma) - A(\Gamma)$ , 其中  $A(\Gamma)$  为符号图  $\Gamma$  的邻接矩阵,  $D^\pm(\Gamma)$  为符号图  $\Gamma$  的网度对角矩阵,  $D^\pm(\Gamma) = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, \dots, d_n^\pm)$ ,  $d_i^\pm = d_i^+ - d_i^-$ 。

在符号图谱理论中, 邻接矩阵和拉普拉斯矩阵受到了广泛的关注。与之相比, 网拉普拉斯矩阵(net Laplacian matrix)是近几年才出现的, 关于它的结果很少。(本文将 net Laplacian matrix 直接翻译成网拉普拉斯矩阵。注意: 由于该矩阵是近几年才开始被陆陆续续进行研究, 并未统一名称)。文献[3] [4]指出了符号图网拉普拉斯特征值在控制理论当中的应用。文献[5]给出了更多关于  $N(\Gamma)$  的谱的详细介绍, 同时通过对  $N(\Gamma)$  谱的详细分析, 强调了用网拉普拉斯代替符号图的拉普拉斯的一些优点, 它们大多是基于这样一个事实, 即关于(无符号)图的拉普拉斯的一些结果可以推广到网拉普拉斯上, 但不能推广到符号图网拉普拉斯上。若一些结果对网拉普拉斯成立, 那么它也在图的拉普拉斯的特殊情况下成立。符号图网拉普拉斯矩阵在控制理论当中有着重要的应用, 尤其是符号图网拉普拉斯谱。由于近几年才开始陆续研究符号图网拉普拉斯矩阵, 因此关于符号图网拉普拉斯最大特征值的上界相关结论很少。下面给出了已知的上界。记  $\kappa_1$  为  $N(\Gamma)$  的最大特征值。

在 2021 年, Ramezani 和 Stanić [6]给出了符号图网拉普拉斯最大特征值的上界:

$$\kappa_1 \leq \max \sqrt{2 \left( (d_i^+)^2 + (d_i^-)^2 + d_i m_i^* - T_i^\pm \right)} : i \in V(\Gamma), \tag{1.1}$$

其中  $m_i^* = \frac{\sum_{j \in E} d_j^*}{d_i}$ ,  $d_j^* = \max \{d_j^+, d_j^-\}$ ,  $T_i^\pm = \sum_{j \sim i} T_{ij}^{\sigma(i)}$ ;

以及

$$\kappa_1 \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \left( d_i^\pm + \sqrt{(d_i^\pm)^2 + 8d_i m_i^*} \right) : i \in V(\Gamma) \right\}. \tag{1.2}$$

下面将会给出符号图网拉普拉斯最大特征值的一个上界以及推导过程, 在这一过程中需要使用一些相关的引理。

在符号图中把边符号的乘积为正的路径称为正路径, 边符号的乘积为负的路径称为负路径。 $\omega_l^+(i, j)$  表示从顶点  $i$  到顶点  $j$  长为  $l$  的正路径的个数,  $\omega_l^-(i, j)$  表示从顶点  $i$  到顶点  $j$  长为  $l$  的负路径的个数。

**引理 1.1** ([7])  $\Gamma$  为  $n$  阶符号图,  $A(\Gamma)$  为符号图  $\Gamma$  的邻接矩阵, 则矩阵  $A^l(\Gamma)$  的第  $(i, j)$  项为

$$\left[ A^l(\Gamma) \right]_{(i,j)} = \omega_l^+(i, j) - \omega_l^-(i, j).$$

**引理 1.2** 若  $\Gamma$  为  $n$  阶符号图,  $A(\Gamma)$  为符号图  $\Gamma$  的邻接矩阵,  $x$  为  $n$  维列向量,  $x_i$  是  $x$  中最大的分量且  $x_i > 0$ , 则

$$\begin{aligned} \left[ A^2(\Gamma)x \right]_i &= \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k \\ &\leq \sum_{ij \in E} \left[ \text{abs} \left( \left| N_i^{\sigma(i)} \cap N_j^{\sigma(i)} \right| - \left| N_i^{\sigma(i)} \cap N_j^{-\sigma(i)} \right| \right) - \left| N_i^{\sigma(i)} \cap N_j \right| \right] x_i + \sum_{j \in E} d_j x_j. \end{aligned}$$

证明 由引理 1.1 可知

$$\begin{aligned} \left[ A^2(\Gamma)x \right]_i &= \sum_{k=1}^n \left( \omega_2^+(i, k) - \omega_2^-(i, k) \right) x_k \\ &= \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k, \end{aligned}$$

对等式右边的每一项分别进行放缩, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k &= \sum_{ij \in E^+} \sum_{\substack{jk \in E^+ \\ ik \in E^+}} x_k + \sum_{ij \in E^+} \sum_{\substack{jk \in E^+ \\ ik \notin E^+}} x_k \\ &= \sum_{ij \in E^+} \left| N_i^+ \cap N_j^+ \right| x_j + \sum_{ij \in E^+} \sum_{\substack{jk \in E^+ \\ ik \notin E^+}} x_k \\ &\leq \sum_{ij \in E^+} \left| N_i^+ \cap N_j^+ \right| x_j + \sum_{ij \in E^+} \left( d_j^+ - \left| N_i^+ \cap N_j^+ \right| \right) x_i, \end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k &\leq \sum_{ij \in E^-} \left| N_i^- \cap N_j^- \right| x_j + \sum_{ij \in E^-} \left( d_j^- - \left| N_i^- \cap N_j^- \right| \right) x_i, \\ \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k &\geq \sum_{ij \in E^+} \left| N_i^+ \cap N_j^- \right| x_j - \sum_{ij \in E^+} \left( d_j^- - \left| N_i^+ \cap N_j^- \right| \right) x_i, \end{aligned}$$

$$\sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k \geq \sum_{ij \in E^-} |N_i^- \cap N_j^+| x_j - \sum_{ij \in E^-} (d_j^+ - |N_i^- \cap N_j^+|) x_i,$$

最后将每一项进行相加，可得

$$\begin{aligned} [A^2(\Gamma)x]_i &= \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k \\ &\leq \sum_{ij \in E^+} (|N_i^+ \cap N_j^+| - |N_i^+ \cap N_j^-|) x_j + \sum_{ij \in E^-} (|N_i^- \cap N_j^-| - |N_i^- \cap N_j^+|) x_j \\ &\quad + \sum_{ij \in E^+} (d_j^+ - |N_i^+ \cap N_j^+| + d_j^- - |N_i^+ \cap N_j^-|) x_i + \sum_{ij \in E^-} (d_j^- - |N_i^- \cap N_j^-| + d_j^+ - |N_i^- \cap N_j^+|) x_i \\ &= \sum_{ij \in E} (|N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)}| - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)}|) x_j + \sum_{ij \in E} (d_j - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)}| - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)}|) x_i \\ &\leq \sum_{ij \in E} \left[ \text{abs}(|N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)}| - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)}|) - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j| \right] x_i + \sum_{ij \in E} d_j x_i. \end{aligned}$$

注：引理 1.2 借鉴了文献[8]中定理 3.3 的证明过程。

## 2. 符号图网拉普拉斯最大特征值的一个新上界

由于符号图网拉普拉斯矩阵的特征值(尤其是最大特征值)在控制理论当中有着重要的应用, 本文研究了符号图网拉普拉斯最大特征值的上界, 给出了网拉普拉斯最大特征值的一个新上界。

**引理 1.3** 设  $\Gamma$  为  $n$  阶符号图,  $\kappa_1$  为  $\Gamma$  的网拉普拉斯最大特征值, 则

$$\kappa_1 \leq \max \left\{ \frac{d_i^+ + \sqrt{(d_i^+)^2 + 8m_i^* d_i - 4M_i}}{2} : i \in V(\Gamma) \right\} \tag{1.3}$$

其中  $d_i^\pm = d_i^+ - d_i^-$ ,  $d_j^* = \max\{d_j^+, d_j^-\}$ ,  $m_i^* = \frac{\sum_{ij \in E} d_j^*}{d_i}$ 。

$$M_i = \sum_{ij \in E} \left[ |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j| - \text{abs}(|N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)}| - |N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)}|) \right].$$

证明 令  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是矩阵  $N(\Gamma)$  的属于特征值  $\kappa_1$  的特征向量, 设  $x_i$  为  $x$  中绝对值最大的分量. 不失一般性, 假设  $x_i > 0$ 。

由  $N(\Gamma) = D^\pm(\Gamma) - A(\Gamma)$ ,  $N(\Gamma)x = \kappa_1 x$ ,  $[N(\Gamma)x]_i = \kappa_1 x_i$ , 可得

$$\kappa_1 x_i = d_i^\pm x_i - \sum_{ij \in E^+} x_j + \sum_{ij \in E^-} x_j \tag{1.4}$$

等式  $N(\Gamma)x = \kappa_1 x$  两边同时左乘  $N(\Gamma)$ , 得到  $N^2(\Gamma)x = \kappa_1 N(\Gamma)x = \kappa_1^2 x$ , 将  $N(\Gamma) = D^\pm(\Gamma) - A(\Gamma)$  代入且取第  $i$  个分量, 可得

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 x_i &= (d_i^\pm)^2 x_i - d_i^\pm \sum_{ij \in E^+} x_j + d_i^\pm \sum_{ij \in E^-} x_j - \sum_{ij \in E^+} d_j^\pm x_j + \sum_{ij \in E^-} d_j^\pm x_j \\ &\quad + \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k, \end{aligned} \tag{1.5}$$

将(1.4)式的两边同时乘以  $d_i^\pm$  代入(1.5)式, 可得

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 x_i &= \kappa_1 d_i^\pm x_i - \sum_{ij \in E^+} d_j^\pm x_j + \sum_{ij \in E^-} d_j^\pm x_j + \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k \\ &\quad - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k, \end{aligned}$$

对任意顶点  $j$ , 由于  $x_i > 0$ , 则  $|x_j| \leq x_i$ , 因此  $\sum_{j \sim i}^+ d_j^\pm x_j \geq -\sum_{j \sim i}^+ |d_j^\pm| x_i$ ,  $\sum_{j \sim i}^- d_j^\pm x_j \leq \sum_{j \sim i}^- |d_j^\pm| x_i$ 。

再由引理 1.2 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^+} x_k + \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^+} \sum_{jk \in E^-} x_k - \sum_{ij \in E^-} \sum_{jk \in E^+} x_k \\ & \leq \sum_{ij \in E} \left[ \text{abs} \left( \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)} \right| - \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)} \right| \right) - \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j \right| \right] x_i + \sum_{ij \in E} d_j x_i, \end{aligned}$$

令  $M_i = \sum_{ij \in E} \left[ \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j \right| - \text{abs} \left( \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)} \right| - \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)} \right| \right) \right]$ , 则有

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 x_i & \leq \kappa_1 d_i^\pm x_i + \sum_{ij \in E^+} |d_j^\pm| x_i + \sum_{ij \in E^-} |d_j^\pm| x_i + \sum_{ij \in E} d_j x_i - M_i x_i \\ & = \kappa_1 d_i^\pm x_i + \sum_{ij \in E} |d_j^\pm| x_i + \sum_{ij \in E} d_j x_i - M_i x_i, \end{aligned}$$

因为  $x_i > 0$ , 所以

$$\kappa_1^2 \leq \kappa_1 d_i^\pm + \sum_{ij \in E} |d_j^\pm| + \sum_{ij \in E} d_j - M_i,$$

又因为  $|d_j^\pm| + d_j = \begin{cases} 2d_j^+; & d_j^+ \geq d_j^- \\ 2d_j^-; & d_j^+ \leq d_j^- \end{cases}$ , 取  $d_j^* = \max\{d_j^+, d_j^-\}$ , 因此

$$\kappa_1 \leq \left\{ \frac{d_i^\pm + \sqrt{(d_i^\pm)^2 + 8m_i^* d_i - 4M_i}}{2} : i \in V(\Gamma) \right\},$$

取所有顶点的最大值, 可得

$$\kappa_1 \leq \max \left\{ \frac{d_i^\pm + \sqrt{(d_i^\pm)^2 + 8m_i^* d_i - 4M_i}}{2} : i \in V(\Gamma) \right\}.$$

□

### 3. 上界的比较

上一节给出了符号图网拉普拉斯最大特征值的一个新上界, 下面将该上界与已知的上界进行比较。首先将本文的上界(1.3)与上界(1.2)进行比较。上界(1.3)与上界(1.2)相比, 相差了  $-4M_i$ , 观察到

$$M_i = \sum_{ij \in E} \left[ \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j \right| - \text{abs} \left( \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{\sigma(ij)} \right| - \left| N_i^{\sigma(ij)} \cap N_j^{-\sigma(ij)} \right| \right) \right] \geq 0;$$

因此本文的上界(1.3)改进上界(1.2)。

接下来将上界(1.3)与上界(1.1)进行比较。下面通过具体例子说明对于某些符号图而言, 本文的上界(1.3)要优于上界(1.1)。

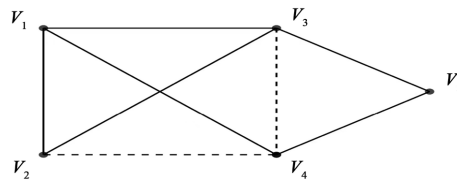


Figure 1. Signed graph  $\Gamma_1$

图 1. 符号图  $\Gamma_1$

令  $N(\Gamma_1)$  为上图 1 所示的符号图  $\Gamma_1$  的网拉普拉斯矩阵, 由上图 1 可知

$$N(\Gamma_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

通过 Maple 计算可得  $\kappa(\Gamma_1) = 4.508$ 。利用上界(1.1)计算符号图  $\Gamma_1$  的网拉普拉斯最大特征值的上界为  $\kappa_1 = 5.477$ , 利用本文的上界(1.3)计算  $\Gamma_1$  的网拉普拉斯最大特征值的上界为  $\kappa_1 = 5.123$ , 从而对于符号图  $\Gamma_1$  来说本文的上界(1.3)优于上界(1.1)。

## 参考文献

- [1] Harary, F. (1953) On the Notion of Balance of a Signed Graph. *Michigan Mathematical Journal*, **2**, 143-146. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917>
- [2] Zaslavsky, T. (1982) Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **4**, 47-74. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(82\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6)
- [3] Stanić, Z. (2020) Net Laplacian Controllability for Joins of Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **285**, 197-203. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.05.011>
- [4] Gao, H., Ji, Z. and Hou, T. (2018) Equitable Partitions in the Controllability of Undirected Signed Graphs. 2018 *IEEE 14th International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Anchorage, AK, 12-15 June 2018, 532-537. <https://doi.org/10.1109/ICCA.2018.8444164>
- [5] Stanić, Z. (2020) On the Spectrum of the Net Laplacian Matrix of a Signed Graph. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, **63**, 205-213.
- [6] Ramezani, F. and Stanić, Z. (2022) Some Upper Bounds for the Net Laplacian Index of a Signed Graph. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 243-250. <https://doi.org/10.1007/s41980-020-00514-2>
- [7] Zaslavsky, T. (2010) Matrices in the Theory of Signed Simple Graphs. In: Acharya, B.D., Katona, G.O.H. and Nešetřil, J., Eds., *Advances in Discrete Mathematics and Applications: Mysore, 2008 (ICDM-2008, Mysore, India)*, Vol. 13, Ramanujan Mathematical Society, Mysore, 207-229.
- [8] Stanić, Z. (2019) Bounding the Largest Eigenvalue of Signed Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **573**, 80-89. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.03.011>