**Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1456-1482**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135150

# 时间依赖记忆型经典反应扩散方程的吸引子

**李玉娜，汪 璇**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

## 摘 要

本文考虑了具有时间依赖记忆核的经典反应扩散方程，当非线性项满足次临界增长时，在时间依赖空间 $H_0^1(\Omega)\times L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$ 中方程解的长时间动力学行为。在新的理论框架下，利用积分估计方法以及分解技术得到了解的适定性和正则性，进而证明了时间依赖全局吸引子的存在性。

## 关键词

经典反应扩散方程，时间依赖记忆核，适定性，时间依赖全局吸引子，存在性

# Attractors for the Classical Reaction Diffusion Equation with Time-Dependent Memory Kernel

**Yuna Li, Xuan Wang**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. $23^{rd}$, 2023; accepted: May $24^{th}$, 2023; published: May $31^{st}$, 2023

## Abstract

**In this paper, we consider the long-time dynamical behavior of solutions for the clas-**

文章引用: 李玉娜, 汪璇. 时间依赖记忆型经典反应扩散方程的吸引子[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1456-1482.
DOI: 10.12677/pm.2023.135150

**sical reaction diffusion equation with time-dependent memory kernel when nonlinear term adheres to subcritical growth in the time-dependent space $H_0^1(\Omega)\times L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$. Under the new theorical framework, the well-posedness and the regularity of the solution, the existence of the time-dependent global attractors are proved by using the delicate integral estimation method and decomposition technique.**

## Keywords

**Classical Reaction Diffusion Equation, Quad Time-Dependent Memory Kernel, Well-Posed-Ness, Time-Dependent Global Attractors, Existence**



## 1. 引言

本文研究了具有时间依赖记忆核的经典反应扩散方程动力系统的解的长时间动力学行为

$$\partial_t u-\Delta u-\int_0^\infty k_t(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g,\ \ (x,t)\in\Omega\times(\tau,+\infty), \tag{1.1}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega}=0,\quad t\in(\tau,+\infty),\qquad u(x,\tau)=u_\tau(x,t),\quad x\in\Omega,\ t\in(-\infty,\tau]. \tag{1.2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为带有光滑边界的有界域.

假设时间依赖函数$k_t(s)$是非负的, 凸的, 可和的. 并且设 $\kappa(t)=\int_0^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s$, $\forall s\in\mathbb{R}^+,t\in\mathbb{R}$. 很明显 $\mu_t(s)=-\partial_s\kappa_t(s)$. 进一步, 假设映射 $(t,s)\mapsto\mu_t(s):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}^+$. 满足下述条件:

($\mathrm{H}_1$) 对于任意固定的 $t\in\mathbb{R}$, 映射 $s\mapsto\mu_t(s)$ 是非负的, 非增的, 绝对连续可和的. 定义

$$\kappa(t)=\int_0^\infty\mu_t(s)\mathrm{d}s,\ \inf_{t\in\mathbb{R}}\kappa(t)>0.$$

($\mathrm{H}_2$) 对于任意 $\tau\in\mathbb{R}$, 存在一个连续函数 $K_\tau:[\tau,\infty)\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$\mu_t(s)\leqslant K_\tau(t)\mu_\tau(s),\quad\forall t\geqslant\tau,\ \ a.e.\ \ s\in\mathbb{R}^+.$$

($\mathrm{H}_3$) 对于每一个固定的 $s>0$, 映射 $t\mapsto\mu_t(s)$ 对于所有的 $t\in\mathbb{R}$ 是可微的, 并且对于任意的紧

集 $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, 有

$$(t,s)\mapsto\mu_t(s)\in L^\infty(\mathcal{K}),\ (t,s)\mapsto\partial_t\mu_t(s)\in L^\infty(\mathcal{K}).$$

$(\mathrm{H}_4)$ 存在 $\delta>0$ 使得

$$\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s)+\delta\kappa(t)\mu_t(s)\leqslant 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\ \ a.e.\ \ s\in\mathbb{R}^+.$$

假设外力项 $g\in L^2(\Omega)$, 且非线性项 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$, 并且满足:

$$|f'(u)|\leqslant C(1+|u|^{p-1}),\ \forall u\in\mathbb{R},\quad f'(u)\geqslant C_1,\tag{1.3}$$

其中 $1\leqslant p\leqslant 3$, $C_1\geqslant 0$, $C$ 是一个正常数. 并且设 $f$ 满足耗散性条件

$$\liminf_{|u|\to\infty}f'(u)>-\lambda_1,\tag{1.4}$$

在这里, $\lambda_1>0$ 是严格正的 Dirichlet 算子的第一特征根, 设 $A=-\Delta$ 且定义域 $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 显然, 根据 (1.4) 可得以下关系: 存在 $0<\theta<1$ 和正常数 $c_f$, 有

$$\langle F(u),1\rangle\geqslant -\tfrac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\tag{1.5}$$

$$\langle f(u),u\rangle\geqslant\langle F(u),1\rangle-\tfrac{1}{2}(1-\theta)\|u\|_1^2-c_f,\tag{1.6}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$.

当方程 (1.1) 不包含记忆项时 (即$h_t\equiv 0$), 方程 (1.1) 则为经典反应扩散方程, 该方程在流体力学和热传导领域中有着广泛的应用, 见文献 [1–3]. 近年来, 有许多学者都在从事关于非经典扩散方程解的长时间行为的研究 [4–11] 及相关文献. 例如, 文献 [5] 的作者在非线性项为次临界指数增长的条件下, 证明了非经典扩散方程轨道吸引子的存在性. 文献 [6] 中, 在自治情形下对于非线性项满足临界指数增长, 当外力项属于空间 $H^{-1}(\Omega)$ 时, 讨论了全局吸引子的存在性; 在非自治情形下, 当外力项属于空间 $L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 时, 讨论了指数吸引子和一致吸引子的存在性.

当方程包含时间依赖记忆项 (即通常的衰退记忆项, 记忆核函数不依赖于 $t$) 时, (1.1) 描述了热流在衰退记忆影响下同类的, 固定的和各向同性的粘弹性热传导体中的传导过程. 这种合成模型来源于 [12] Coleman 和 Gurtin 建立的已经为人广泛接受的带记忆的热流理论框架. 文献 [8] 的作者在外力项仅属于 $H^{-1}(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$, 非线性项为临界指数增长时证明了非经典扩散方程全局吸引子的存在性以及正则性. 文献 [9] 中, 当非线性项 $f$ 满足任意阶多项式增长条件时, 在拓扑空间 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ 中证明了强吸引子的存在性.

而当方程包含时间依赖记忆项 (即记忆项依赖于 $t$) 时, 表示粘弹性材料的粘性随着时间的流逝会逐渐消失, 即出现老化现象, 如橡胶, 塑胶材料, 这使得我们的研究对象变得复杂而有趣. 时间依赖记忆核的存在给估计带来了本质性的困难. 首先, 由于记忆核函数依赖于时间, 定义变量 $\eta^t$ 的时间导数与以往不同. 其次, 用于含有非时间依赖记忆项的方程的经典方法和微分不等式无法进行方程 (1.1) 的耗散性估计和解过程的紧性验证. 为了克服以上困难, 我们借助文献 [13, 14] 的观点, 在新的

理论框架下, 利用积分估计方法以及分解技术成功克服了估计与证明过程中的实质性难题, 得到了解的适定性, 进而证明了时间依赖全局吸引子的存在性.

在随后的论述中, 为了简便起见, 定义 $C$ 为任意的正常数.

本文结构如下: 本文在第二节中，回顾了一些预备知识, 包含一些空间定义和系统的抽象结果. 在第三节中, 证明了时间依赖记忆型经典反应扩散方程解的适定性和正则性. 在第四节中, 证明了时间依赖记忆型经典反应扩散方程时间依赖全局吸引子的存在性.

## 2. 预备知识

借助文献 [14]的观点, 我们定义方程 (1.1) 的新的历史变量

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \int_0^s u(t-r)\mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ \eta_\tau(s-t+\tau) + \int_0^{t-\tau} u(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau. \end{cases} \tag{2.1}$$

令 $\mu_t(s) = -\partial_s k_t(s)$ 且 $k_t(\infty) = 0$, 则问题 (1.1), 问题 (1.2) 可以转化为系统

$$\partial_t u - \Delta u - \int_0^\infty \mu_t(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s + f(u) = g \ . \tag{2.2}$$

相应初-边界条件为

$$\begin{cases} u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > \tau, \\ \eta^t(x,s) = 0, & (x,s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,\ t > \tau, \\ u(x,t) = u_\tau(x,t), & x \in \Omega,\ t \leqslant \tau, \\ \eta^\tau(x,s) = \eta_\tau(x,s), & (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $u(\cdot)$ 满足以下条件: 存在正常数 $\mathcal{R}$ 和 $\varrho \leqslant \delta$, 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varrho s}\|\nabla u(-s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \mathcal{R}.$$

下面将使用 Pata 和 Squassina [15] 中的符号, 设 $A = -\Delta$ 且定义域 $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 考虑 Hilbert 紧嵌入空间族 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$, 并赋予相应的内积和范数

$$\langle u, v\rangle_s = \langle A^{\frac{s}{2}}u, A^{\frac{s}{2}}v\rangle,\ \|u\|_s = \|A^{\frac{s}{2}}u\|, \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in D(A^{\frac{s}{2}}),$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数, 那么, $H = L^2(\Omega)$, $V_1 = H_0^1(\Omega)$, $V_2 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

显然, 对于任意的 $s_1 > s_2$, 有紧嵌入 $D(A^{\frac{s_1}{2}}) \hookrightarrow D(A^{\frac{s_2}{2}})$, 以及对于所有的 $s \in [0, \frac{n}{2})$, 有连续嵌入 $D(A^{\frac{s}{2}}) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega)$.

对于每个固定的时间 $t$ 和每一个 $\sigma \in \mathbb{R}$, 根据记忆和 $\mu_t(\cdot)$ 的假设, 用 $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_\sigma)$ 表示 Hilbert

空间, 定义如下记忆空间

$$M_t^\sigma = L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_\sigma) = \{\xi^t : \mathbb{R}^+ \to V_\sigma \mid \int_0^\infty \mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2 \mathrm{d}s < +\infty\},$$

并赋予相应的内积和范数

$$\langle \eta^t, \xi^t\rangle_{M_t^\sigma} = \int_0^\infty \mu_t(s)\langle \eta^t(s), \xi^t(s)\rangle_\sigma \mathrm{d}s,$$
$$\|\xi^t\|^2_{M_t^\sigma} = \int_0^\infty \mu_t(s)\|\xi^t(s)\|_\sigma^2 \mathrm{d}s.$$

现在我们引入 Hilbert 空间族

$$\mathcal{H}_t^\sigma = V_{\sigma-1} \times M_t^\sigma,$$

相应的范数

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}_t^\sigma} = \|(u, \eta^t)\|^2_{\mathcal{H}_t^\sigma} = \|u\|^2_{\sigma-1} + \|\eta^t\|^2_{M_t^\sigma}.$$

特别地, $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^0$.

根据 $(\mathrm{H}_2)$, 对于任意的 $\eta^t \in M_\tau^\sigma$ 且每个 $t \geqslant \tau$,

$$\|\eta^t\|^2_{M_t^\sigma} \leqslant K_\tau(t)\|\eta^t\|^2_{M_\tau^\sigma}, \tag{2.4}$$

且有连续嵌入,

$$M_\tau^\sigma \hookrightarrow M_t^\sigma,$$

从而,

$$\mathcal{H}_\tau^\sigma \hookrightarrow \mathcal{H}_t^\sigma.$$

作用在 $M_t^\sigma$ 上的线性算子 $\mathbb{T}_t$ 定义如下

$$\mathbb{T}_t\eta^t = -\partial_s\eta^t \text{ 其定义域 } D(\mathbb{T}_t) = \{\eta^t \in M_\tau^\sigma | \partial_s\eta^t \in M_t^\sigma, \eta^t(0) = 0\}.$$

则根据 $(\mathrm{H}_1)$, 对每个固定的 $t$, 函数 $s \mapsto \mu_t(s)$ 是几乎处处可微的, 且$\partial_s\mu_t(s) \leqslant 0$. 类比 [14], 我们有

$$\langle \mathbb{T}_t\eta^t, \eta^t\rangle_{M_t^\sigma} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \partial_s\mu_t(s)\|\eta^t(s)\|^2_\sigma \mathrm{d}s \leqslant 0, \quad \forall \eta^t \in D(\mathbb{T}_t). \tag{2.5}$$

显然 $\mathbb{T}_t$ 是耗散算子. 事实上, $\mathbb{T}_t$ 是空间 $M_t^\sigma$ 上的右平移半群的无穷小算子, 显然

$$\mathbb{T}_\tau \subset \mathbb{T}_t \ . \tag{2.6}$$

且 $\{\mathbb{T}_t\}_{t\geqslant\tau}$ 是伴随 $t$ 增加地嵌入.

由 (2.1) 式, 可知

$$\partial_t \eta^t(s) = -\partial_s \eta^t(s) + u(t) = \mathbb{T}_t \eta^t + u(t). \tag{2.7}$$

下面的抽象结果将用来证明问题 (2.2), (2.3) 对应的解的紧性和耗散性.

**引理 2.1** [9,16] 设$X, B$ 和 $Y$ 是三个 Banach 空间. 对于 $T > 0$, 如果 $X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y$, 且

$$\mathrm{W} = \{u \in L^p([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Y)\},\ r > 1,\ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\mathrm{W}_1 = \{u \in L^\infty([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Y)\},\ r > 1.$$

那么,

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];B),\ W_1 \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];B).$$

**引理 2.2** [3,13,17] 假设 $\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ 是一个非负函数, 并且满足: 如果存在 $s_0 \in \mathbb{R}^+$, 使得对于所有的 $s \geqslant s_0$, 有$\mu(s) = 0$ 成立. 此外, 设 $B_0, B_1, B_2$ 是 Banach 空间, 其中 $B_0, B_1$ 是自反的, 且满足

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_2.$$

如果 $\mathcal{C} \subset L^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_1)$ 满足

(i) $\mathcal{C}$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R}; B_0) \cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+; B_2)$ 有界;

(ii) $\sup\limits_{\eta \in \mathcal{C}} \|\eta(s)\|^2_{B_1} \leqslant h(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $h(s) \in L^1_\mu(\mathbb{R}^+)$,

那么 $\mathcal{C}$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; B_1)$ 相对紧.

**引理 2.3** [18] 设 $(M, \mathrm{d})$ 是度量空间, 且 $U(t,\tau)$ 是 $M$ 中的 Lipschitz 连续动态过程, 即对于适当的常数 $C$ 和 $K$ 其独立于 $m_i, \tau$ 和 $t$ 有

$$\mathrm{d}(U(t,\tau)m_1, U(t,\tau)m_2) \leqslant C\mathrm{e}^{K(t-\tau)}\mathrm{d}(m_1, m_2),$$

对一些 $\nu_1, \nu_2 > 0$ 和 $L_1, L_2 > 0$, 有

$$\mathrm{dist}_M(U(t,\tau)M_1, U(t,\tau)M_2) \leqslant L_1\mathrm{e}^{-\nu_1(t-\tau)},$$

$$\mathrm{dist}_M(U(t,\tau)M_2, U(t,\tau)M_3) \leqslant L_2\mathrm{e}^{-\nu_2(t-\tau)},$$

那么

$$\mathrm{dist}_M(U(t,\tau)M_1, U(t,\tau)M_3) \leqslant L\mathrm{e}^{-\nu(t-\tau)},$$

其中$\nu = \frac{\nu_1\nu_2}{K+\nu_1+\nu_2}$ 且 $L = CL_1 + L_2$.

**引理 2.4** [5] (积分型 Gronwall 不等式) 设$\tau \in \mathbb{R}$是固定的, $\Lambda : [\tau, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数,

对于某些 $\varepsilon>0$ 以及任意的 $b>a\geqslant\tau$, 以下积分不等式成立:

$$\Lambda(b)+2\varepsilon\int_a^b\Lambda(y)\mathrm{d}y\leqslant\Lambda(a)+\int_a^b q_1(y)\Lambda(y)\mathrm{d}y+\int_a^b q_2(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $q_1,\ q_2\geqslant 0$ 且 $q_i\in L^1_{loc}[\tau,+\infty)(i=1,2)$ 满足, 存在 $c_1,\ c_2\geqslant 0$, 使得

$$\int_a^b q_1(y)\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon(b-a)+c_1,\ \sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}q_2(y)\mathrm{d}y\leqslant c_2,$$

那么

$$\Lambda(t)\leqslant e^{c_1}\left[|\Lambda(\tau)|e^{-\varepsilon(t-\tau)}+\frac{c_2e^{\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\right],\quad\forall t\geqslant\tau.$$

如 [7, 9, 11, 19]中所述, 我们引入了以下关于时间依赖动力系统的概念和抽象的结果, 用于研究解的长期动力学.

**定义 2.5** 设 $X_t$ 是一族赋范空间, 对于双参数算子族 $\{U(t,\tau):X_\tau\to X_t,\tau\leqslant t,\tau\in\mathbb{R}\}$ 若满足如下性质:

(i) 对于任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, $U(\tau,\tau)=\mathrm{I}d$ 是 $X_t$ 上的恒等映射;

(ii) 对于任意的 $t\geqslant s\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}$, 有 $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$,
则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

设 $X_t$ 是赋范空间族, 对于每个 $t\in\mathbb{R}$, $X_t$ 的 $R$-球由下式定义:

$$\mathbb{B}_t(R)=\{z\in X_t|\|z\|_{X_t}\leqslant R\}.$$

我们用 $\mathrm{dist}_{X_t}(A,B)$ 表示从集合 $A\subset X_t$ 到集合 $B\subset X_t$ 的 Hausdorff 半距离:

$$\mathrm{dist}_{X_t}(A,B)=\sup_{x\in A}\mathrm{dist}_{X_t}(x,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|_{X_t}.$$

**定义 2.6** 族 $\mathfrak{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 中的有界集 $C_t\subset X_t$ 被称为一致有界, 如果存在一个常数 $R>0$, 使得 $C_t\subset\mathbb{B}_t(R)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

**定义 2.7** 一致有界族 $\mathfrak{B}_t=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为是关于过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集, 如果对于每个 $R>0$, 存在一个 $t_0=t_0(R)\leqslant t$ 且 $R_0>0$ 使得

$$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathbb{B}_t(R_0).$$

当它拥有一个时间依赖吸收集时, 则称过程 $U(t,\tau)$ 是耗散的.

**定义 2.8** 最小族 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ , 如果 $\mathfrak{A}$ 满足以下性质:

(i) 对于任意的 $t\in\mathbb{R}$, 每一个 $A_t$ 在 $X_t$ 中都是紧的;

(ii) $\mathfrak{A}$ 是拉回吸引的, 它是一致有界的, 并且对于每一个一致有界集族 $\mathfrak{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\operatorname{dist}_{X_t}(U(t,\tau)C_\tau,A_t)=0;$$

成立. 则称它是关于过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸引子.

**定义 2.9** [8,19] 如果 $U(t,\tau)$ 是渐近紧的, 即集 $\mathbb{K}$ 非空,

$$\mathbb{K}=\{\mathfrak{K}=\{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}|\ \text{每个}\ K_t\ \text{在}\ X_t\ \text{中紧}\ ,\ \mathfrak{K}\ \text{是拉回吸引子}\ \}$$

那么时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}$ 存在且有 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 特别地, $\mathfrak{A}$ 是唯一的.

**定义 2.10** 对于一个函数 $t\to Z(t)$, 且 $Z(t)\in X_t$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的有界完全轨道 (CBT), 当且仅当

(i) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|Z(t)\|_{X_t}<\infty$;

(ii) $Z(t)=U(t,\tau)Z(\tau),\forall\,\tau\leqslant t,\ \tau\in\mathbb{R}$.

**定义 2.11** 时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 不变, 如果对于所有的 $\tau\leqslant t$,

$$U(t,\tau)A_\tau=A_t.$$

**定义 2.12** [7,9,11] 如果时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的, 那么它包含过程 $U(t,\tau)$ 的所有完全有界轨道的集合 CBT, 也就是说,

$$\mathfrak{A}=\{Z|t\to Z(t)\in X_t\ \text{并且}\ Z(t)\ \text{是过程}\ U(t,\tau)\ \text{的 CBT}\}.$$

## 3. 解的适定性和正则性

为了得到解的耗散估计和适定性, 我们需要证明以下初步结果.

**引理 3.1** 设

$$\Gamma(u,\eta_\tau)=3(t-\tau)^2\kappa(\tau)\|u\|^2_{L^\infty([\tau,T];V_\sigma)}+2\|\eta_\tau\|^2_{M^\sigma_\tau}.$$

那么, 我们有 $\eta^t\in M^\sigma_\tau\subset M^\sigma_t$ 且

$$\|\eta^t\|^2_{M^\sigma_\tau}\leqslant\Gamma(u,\eta_\tau),\quad\forall\,t\in[\tau,T],$$

且

$$\|\eta^t\|^2_{M^\sigma_t}\leqslant\Gamma(u,\eta_\tau)K_\tau(t)\in L^1([\tau,T]).$$

**引理 3.2** 如果 $\eta_\tau\in D(\mathbb{T}_\tau)$, 那么 $\eta^t\in D(\mathbb{T}_\tau)$, 对于每个$t\in[\tau,T]$, $\eta^t\in W^{1,\infty}([\tau,T];M^\sigma_\tau)$ 且

不等式

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_\tau \eta^t + u(t)$$

在 $M_\tau^\sigma$ 中成立.

**证明** 使用 $\eta_\tau \in D(\mathbb{T}_\tau) \subset M_\tau^\sigma$, 我们得到

$$\partial_s \eta^t(s) = \begin{cases} u(t-s), & s \leqslant t-\tau, \\ \partial_s \eta_\tau(s-t+\tau), & s > t-\tau, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\partial_t \eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s), & s \leqslant t-\tau, \\ u(t) - \partial_s \eta_\tau(s-t+\tau), & s > t-\tau. \end{cases} \tag{3.2}$$

由 (2.1) 式可知

$$\eta^t(0) = 0.$$

此外, 因为 $\mu_\tau(\cdot)$ 是非增的, 且 $\eta_\tau \in D(\mathbb{T}_\tau) \subset M_\tau^\sigma$, 我们有

$$\begin{aligned} \|\partial_s \eta^t\|_{M_\tau^\sigma}^2 &= \int_0^{t-\tau} \mu_\tau(s) \|u(t-s)\|_\sigma^2 \mathrm{d}s + \int_{t-\tau}^\infty \mu_\tau(s) \|\partial_s \eta_\tau(s-t+\tau)\|_\sigma^2 \mathrm{d}s \\ &\leqslant \kappa(\tau) \|u\|_{L^\infty([\tau,T];V_\sigma)}^2 + \|\partial_s \eta_\tau\|_{M_\tau^\sigma}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此, $\partial_s \eta^t \in M_\tau^\sigma$, 即, $\eta^t \in D(\mathbb{T}_\tau)$.

与上述估计相似, 我们有

$$\operatorname*{ess\ sup}_{t \in [\tau,T]} \|\partial_t \eta^t\|_{M_\tau^\sigma} < \infty.$$

应用引理 3.1 我们发现 $\eta^t \in W^{1,\infty}([\tau,T]; M_\tau^\sigma)$.

由 (3.1) 式和 (3.2) 式, 有

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_\tau \eta^t + u(t)$$

在 $M_\tau^\sigma$ 成立.

**注释 3.3** 由于 $\mathcal{M}_\tau^\sigma \subset \mathcal{M}_t^\sigma$, 由 (2.6) 式知, 对于任意固定的 $t$, 有

$$\partial_t \eta^t = \mathbb{T}_t \eta^t + u(t) \tag{3.4}$$

在空间 $\mathcal{M}_t^\sigma$ 上成立.

**注释 3.4** 当 $\eta \in D(\mathbb{T}_\tau)$, 由 (2.4) 和 (3.3) 式可知

$$\|\partial_s \eta^t\|_{\mathcal{M}_t^\sigma}^2 \leqslant \Xi(u, \eta_\tau) K_\tau(t), \quad \forall\, t \in [\tau, T], \tag{3.5}$$

其中 $\Xi(u,\eta_\tau) = \kappa(\tau)\|u\|_{L^\infty([\tau,T];V_\sigma)}^2 + \|\partial_s \eta_\tau\|_{\mathcal{M}_\tau^\sigma}^2$.

**引理 3.5** 假设 $u \in C([\tau,T];V_\sigma)$ 并且 $\eta_\tau \in C^1(\mathbb{R}^+, V_\sigma) \cap D(\mathbb{T}_\tau)$. 那么, 对于所有的 $\tau \leqslant a \leqslant b \leqslant T$,

有下述不等式成立:

$$\|\eta^b\|^2_{M_b^\sigma}-\int_a^b\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^t(s)\|^2_\sigma\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant\|\eta^a\|^2_{M_a^\sigma}+2\int_a^b\langle u(t),\eta^t\rangle_{M_t^\sigma}\mathrm{d}t\ . \tag{3.6}$$

**引理 3.6** 对于所有的 $\tau\leqslant a\leqslant b\leqslant T$, 下述估计成立

$$\begin{aligned}\|\eta^b\|^2_{M_b^\sigma}+\delta\int_a^b\kappa(t)\|\eta^t(s)\|^2_{M_t^\sigma}\mathrm{d}s\mathrm{d}t&\leqslant\|\eta^b\|^2_{M_b^\sigma}-\int_a^b\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^t(s)\|^2_\sigma\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&\leqslant\|\eta^a\|^2_{M_a^\sigma}+2\int_a^b\langle u(t),\eta^t\rangle_{M_t^\sigma}\mathrm{d}t\end{aligned}\ . \tag{3.7}$$

**定义 3.7** 对于任意的 $T>\tau\in\mathbb{R}$, 设 $g\in L^2(\Omega)$, 且 $z_\tau=(u_\tau,\eta_\tau)\in\mathcal{H}^1_\tau$, 如果

(i) $u(t)\in L^\infty([\tau,T];V_1)$, $\eta^t\in L^\infty([\tau,T];M_t^1)$;

(ii) 函数 $\eta^t$ 满足式 (2.1) ;

(iii) 对于每个 $\phi\in V_1$ 且a.e. $t\in[\tau,T]$,

$$\langle\partial_t u,\phi\rangle+\langle u,\phi\rangle_1+\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\eta^t(s),\phi\rangle_1\mathrm{d}s+\langle f(u),\phi\rangle=\langle g,\phi\rangle.$$

且称 $z(t)=(u(t),\eta^t)$ 是问题 (2.2), (2.3) 在区间 $[\tau,T]$ 上的弱解.

**定理 3.8**(适定性和正则性) 设 (1.3), (1.4) 式成立, 且 $g\in L^2(\Omega)$. 当 $(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_4)$ 成立时, 对每个 $T>\tau\in\mathbb{R}$, 当初值 $z(\tau)\in\mathcal{H}^1_\tau$ 且 $\|z(\tau)\|_{\mathcal{H}^1_\tau}\leqslant R_1$, 则在区间 $[\tau,T]$ 问题 (2.2), (2.3) 存在唯一弱解 $z(t)=(u(t),\eta^t)$, 满足

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t}+\int_\tau^t\|u(r)\|^2dr+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|^2_{M_r^1}\mathrm{d}r+\int_\tau^t\|\partial_t u(r)\|_1^2\mathrm{d}r\leqslant Q,$$

进一步, (i) 当初值 $z(\tau)\in\mathcal{H}^2_\tau$ 且 $\|z(\tau)\|_{\mathcal{H}^2_\tau}\leqslant R_2$, 则在区间 $[\tau,T]$ 上, 存在强解, 有

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^2_t}+\int_\tau^t\|u(r)\|_2^2dr+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|^2_{M_r^2}\mathrm{d}r+\int_\tau^t\|\partial_t u(r)\|_1^2\mathrm{d}r\leqslant\bar{Q},$$

成立. (ii) 存在序列 $\{z_n(\tau)\}\in\mathcal{H}^2_\tau$, 使得 $z_n(\tau)\to z(\tau)\in\ \mathcal{H}^1_\tau$, 当初值 $z(\tau)\in\mathcal{H}^1_\tau$ 且 $\|z(\tau)\|_{\mathcal{H}^1_\tau}\leqslant R_1$, 则在区间 $[\tau,T]$ 上, 有

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t}+\int_\tau^t\|u(r)\|^2dr+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|^2_{M_r^1}\mathrm{d}r+\int_\tau^t\|\partial_t u(r)\|_1^2\mathrm{d}r\leqslant Q,$$

这里 $R_1$ 和 $R_2$ 均为常数, $Q=\max\{Q_0,Q_3,Q_4\}$. $\bar{Q}=\max\{\bar{Q}_0,\bar{Q}_3,\bar{Q}_4\}$. 此外,

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t}\leqslant C\mathrm{e}^{C(R,\lambda_1)(t-\tau)}\|z_1(\tau)-z_2(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau},\ \ t\in[\tau,T],$$

这里 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 是问题 (2.2), (2.3) 的两个解, 初值 $z_{1_\tau}=(u_{1_\tau},\eta_{1_\tau})$, $z_{2_\tau}=(u_{2_\tau},\eta_{2_\tau})$.

**证明** 将方程 (2.2) 乘以 $u$, 我们有

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2)+2\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{M_t^1}+2\langle f(u),u\rangle-2\langle g,u\rangle=0. \tag{3.8}$$

根据 (1.4) 式, 我们有

$$-2\langle f(u),u\rangle\leqslant 2(1-\theta)\|u\|_1^2+4c_f,$$

这里, $\theta\in(0,1)$. 容易得到

$$2\langle g,u\rangle\leqslant\theta\|u\|_1^2+\frac{1}{\lambda_1\theta}\|g\|^2.$$

我们定义

$$N(t)=\|u\|^2.$$

那么

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)+\theta\|u\|_1^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{M_t^1}\leqslant\tfrac{1}{\lambda_1\theta}\|g\|^2+4c_f:=Q_0. \tag{3.9}$$

对 (3.9) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 我们有

$$N(t)+\theta\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r+2\int_\tau^t\langle u,\eta^r\rangle_{M_r^1}\mathrm{d}r\leqslant N(\tau)+Q_0(t-\tau),\quad\forall t\geqslant\tau. \tag{3.10}$$

应用定理 3.6, 我们有

$$\begin{aligned}&N(t)+\|\eta^t\|_{M_t^1}^2+\theta\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^r(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&\leqslant N(\tau)+\|\eta_\tau\|_{M_\tau^1}^2+Q_0(t-\tau),\quad\forall t\geqslant\tau.\end{aligned}.$$

定义

$$\mathcal{N}(t)=N(t)+\|\eta^t\|_{M_t^1}^2.$$

那么

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2\leqslant\mathcal{N}(t)\leqslant(1+\tfrac{1}{\lambda_1})\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2. \tag{3.11}$$

因此,

$$\mathcal{N}(t)+\theta\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r-\int_\tau^t\int_0^\infty(\partial_t\mu_t(s)+\partial_s\mu_t(s))\|\eta^r(s)\|_1^2\mathrm{d}s\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{N}(\tau)+Q_0(t-\tau). \tag{3.12}$$

意味着,

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2+\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|_{M_r^1}^2\mathrm{d}r\leqslant C(R,T,\|g\|,\theta,\delta,\lambda_1,c_f):=Q_1\ . \tag{3.13}$$

类似地得到

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^2}^2+\int_\tau^t\|u(r)\|_2^2\mathrm{d}r+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|_{M_r^2}^2\mathrm{d}r\leqslant C(R,T,\|g\|,\theta,\delta,\lambda_1,c_f):=\bar{Q}\ . \tag{3.14}$$

当初值 $z(\tau)\in\mathcal{H}_\tau^2$时, 将方程 (2.2) 乘以 $-\Delta u$,我们有

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_1^2)+2\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{M_t^2}+2\langle f(u),-\Delta u\rangle-2\langle g,-\Delta u\rangle=0. \tag{3.15}$$

由 (1.3) 式, 我们有

$$-2\langle f(u),-\Delta u\rangle \quad =-2\textstyle\int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant 2C_1\|u\|_1^2. \tag{3.16}$$

显然,

$$2\langle g,-\Delta u\rangle\leqslant\|u\|_2^2+\|g\|^2.$$

定义

$$N_1(t)=\|u\|_1^2.$$

那么

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1(t)+\|u\|_2^2+2\langle u,\eta^t\rangle_{M_t^2}\leqslant 2C_1\|u\|_1^2+\|g\|^2. \tag{3.17}$$

对 (3.17) 式在 $[\tau,t]$ 上积分, 我们有

$$N_1(t)+\textstyle\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}r+2\int_\tau^t\langle u,\eta^r\rangle_{M_r^2}\mathrm{d}r\leqslant N_1(\tau)+2C_1\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r+\|g\|^2(t-\tau). \tag{3.18}$$

由于定理 3.6, 我们得到

$$\begin{aligned}&N_1(t)+\textstyle\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}r+\|\eta^t\|_{M_t^2}^2+\delta\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|_{M_r^2}^2\mathrm{d}r\\&\quad\leqslant N_1(\tau)+\|\eta_\tau\|_{M_\tau^2}^2+2C_1\textstyle\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r+\|g\|^2(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.\end{aligned} \tag{3.19}$$

定义

$$\mathcal{N}_1(t)=N_1(t)+\|\eta^t\|_{M_t^2}^2.$$

那么

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^2}^2\leqslant\mathcal{N}_1(t)\leqslant(1+\frac{1}{\lambda_1})\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^2}^2.$$

因此,

$$\mathcal{N}_1(t)+\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}r+\delta\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|_{M_r^2}^2\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{N}_1(\tau)+2C_1\int_\tau^t\|u(s)\|_1^2\mathrm{d}s+\|g\|^2(t-\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.$$

应用 Gronwall 不等式, 我们推断出

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geqslant\tau}\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^2}^2+\textstyle\int_\tau^t\|u\|_2^2\mathrm{d}r+\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r\|_{M_r^2}^2\mathrm{d}r\\&\quad\leqslant C(\|z(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau^2},T,\|g\|,\theta,\delta,\lambda_1,C_1,c_f):=Q_2.\end{aligned} \tag{3.20}$$

将方程 (2.2) 乘以 $\partial_t u$

$$\|\partial_t u\|^2 = -\langle u, \partial_t u\rangle - \int_0^\infty \mu_t(s)\langle \Delta\eta^t(s), \partial_t u\rangle \mathrm{d}s - \langle f(u), \partial_t u\rangle + \langle g, \partial_t u\rangle.$$

由式 (1.3), 我们有

$$|\langle f(u), \partial_t u\rangle| \leqslant \|f(u)\|\|\partial_t u\| \leqslant C(1+\|u(t)\|_1^p)\|\partial_t u\|.$$

由 $(\mathrm{H}_1)$ 可得

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^\infty \mu_t(s)\langle \Delta\eta^t(s), \partial_t u\rangle \mathrm{d}s\right| &\leqslant \|\partial_t u\| \int_0^\infty \mu_t(s)\|\Delta\eta^t(s)\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \|\partial_t u\| \left(\int_0^\infty \mu_t(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu_t(s)\|\eta^t(s)\|_2^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|\partial_t u\| \sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{M_t^2}.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\|\partial_t u\|^2 &\leqslant C(\|u(t)\|_2 + 1 + \|u(t)\|_1^p + \sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{M_t^2} + \|g\|)\|\partial_t u\| \\ &\leqslant C(1 + Q_0^{\frac{1}{2}} + Q_1^{\frac{p}{2}} + \sqrt{\kappa(t)}\|\eta^t\|_{M_t^2} + \|g\|)\|\partial_t u\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\|\partial_t u\|_1^2 + C(R, T, c_f, \|g\|, \theta, \delta, \lambda_1)(1 + \kappa(t)\|\eta^t\|_{M_t^2}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\|\partial_t u\|^2 + Q_3(1 + \kappa(t)\|\eta^t\|_{M_t^2}^2), \quad \forall t \in [\tau, T].\end{aligned} \tag{3.21}$$

因此,

$$\textstyle\int_\tau^t \|\partial_t u(s)\|^2 \mathrm{d}s \leqslant 2Q_3(1 + \int_\tau^t \kappa(s)\|\eta^s\|_{M_s^2}^2 \mathrm{d}s) \leqslant Q_4. \tag{3.22}$$

设 $\{w_n\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基, 也在 $V_1$ 中标准正交, 并且 $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$, $j = 1, 2, \cdots$.设 $\{\zeta_n\}$ 是 $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_1)$ 的标准正交基, 也在 $L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_1)$ 中标准正交, 并且 $-\Delta\zeta_j = \lambda_j\zeta_j$, $j = 1, 2, \cdots$. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 有限维子空间定义如下:

$$H_n = \mathrm{span}\{w_1, \cdots, w_n\} \subset V_1, \quad M_n = \mathrm{span}\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\} \subset L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_1).$$

$P_n : V_1 \to H_n$ 表示在 $H_n$ 上的正交投影, $Q_n : L^2_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_1) \to M_n$ 表示在 $M_n$ 上的正交投影.

初始条件 $z_\tau = (u_\tau, \eta_\tau)$ 近似于一个序列 $\{z_{\tau_n} = (u_{\tau_n}, \eta_{\tau_n})\} \subset \mathcal{H}_t^2$, 其中

$$u_{\tau_n} = P_n u_\tau \to u_\tau \text{ in } V_1, \tag{3.23}$$

$$\eta_{\tau_n} = Q_n \eta_\tau \to \eta_\tau \text{ in } M_t^1. \tag{3.24}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 设 $z_n = (u_n, \eta_n^t)$ 为问题 (2.2), (2.3) 的逼近解. 其中 $u_n = \Sigma_{j=1}^n T_j^n(t) w_j$, $T_j^n \in C^1([\tau, T])$ 并且 $\eta_n^t = \Sigma_{j=1}^n \Lambda_j^n(t)\zeta_j$, $\Lambda_j^n \in C^1([\tau, T])$. 所以对每个试验函数 $\psi \in H_n$, 并且每个 $t \in [\tau, T]$, $z_n = (u_n, \eta_n^t)$ 解决了下述问题:

$$\langle \partial_t u_n, \psi\rangle + \langle u_n, \psi\rangle_1 + \textstyle\int_0^\infty \mu_t(s)\langle \eta_n^t(s), \psi\rangle_1 \mathrm{d}s + \langle f(u_n), \psi\rangle = \langle g, \psi\rangle, \tag{3.25}$$

并且

$$\eta_n^t(s)=\begin{cases}\int_0^s u_n(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \eta_{\tau_n}(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}u_n(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases}\tag{3.26}$$

假设 $\psi\in H_m$ 是固定的. 那么对每个 $n\geqslant m$, 我们有 (3.25) 式成立.给 (3.25) 式乘以 $\varphi\in C_0^\infty([\tau,T])$ 并且在 $[\tau,T]$ 上关于 (3.25) 式进行积分, 我们发现

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T\varphi\langle\partial_t u_n(r),\psi\rangle\mathrm{d}r+\int_\tau^T\varphi\langle u_n(r),\psi\rangle_1\mathrm{d}r\\&+\int_\tau^T\varphi\int_0^\infty\mu_r(s)\langle\eta_n^r(s),\psi\rangle_1\mathrm{d}s\mathrm{d}r+\int_\tau^T\varphi\langle f(u_n),\psi\rangle\mathrm{d}r=\int_\tau^T\varphi\langle g,\psi\rangle\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{3.27}$$

很明显, 序列 $\{z_n\}$, 估计值 (3.13), (3.20), (3.22) 是成立的. 那么,

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];H) \text{ 有界};$$

$$u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_2) \text{ 有界};$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_2) \text{ 有界};$$

$$\eta_n^t \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];M_t^2) \text{ 有界}.$$

因为 $\|f(u_n)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}\leqslant C(1+\|u_n\|_1^p)\leqslant C$, 我们推断出

$$f(u_n) \text{ 在 } L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega) \text{ 有界}.$$

利用 Galerkin 逼近解 $z_n=(u_n,\eta_n^t)$, 我们知道存在二元组 $z=(u,\eta^t)$, 使得(必要时取子列)

$$\partial_t u_n\to\partial_t u \text{ 与 } L^2([\tau,T];H_1) \text{ 弱收敛};\tag{3.28}$$

$$u_n\to u \text{ 与 } L^\infty([\tau,T];V_2) \text{ 弱}^* \text{ 收敛};\tag{3.29}$$

$$u_n\to u \text{ 与 } L^2([\tau,T];V_2) \text{ 弱收敛};\tag{3.30}$$

$$\eta_n^t\to q^t \text{ 与 } L^\infty([\tau,T];M_t^2) \text{ 弱}^* \text{ 收敛};\tag{3.31}$$

$$f(u_n)\to f(u) \text{ 与 } L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega) \text{ 弱收敛}.\tag{3.32}$$

应用引理 2.1, 我们可以从 (3.28) 和 (3.29) 中获得

$$u_n\to u \text{ 与 } C([\tau,T];V_1),\tag{3.33}$$

并且逐点收敛

$$u_n(x,t) \to u(x,t) \text{ a.e. 与 } \Omega \times [\tau, T].$$

根据 $f$ 的连续性, 可得

$$f(u_n(x,t)) \to f(u(x,t)) \text{ a.e. 与 } \Omega \times [\tau, T]$$

也是成立的.

利用 (3.28) 和 (3.30) 式, 我们可以容易地得到 (3.27) 的左端第一项到第二项的收敛性. 我们将处理其余两项.

因为 $\psi \in H_n \subset V_1$, 很容易得 $\psi \in P_n L^{p+1}(\Omega)$. 因此, 根据 (3.32) 式, 可得

$$\langle f(u_n) - f(u), \psi \rangle \mathrm{d}r \to 0$$

成立. 由于 $f(u_n)$ 和 $f(u)$ 在 $L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)$ 中的有界性, 应用控制收敛定理, 我们推断出

$$\int_\tau^T \varphi \langle f(u_n) - f(u), \psi \rangle \mathrm{d}r \to 0.$$

我们可以证明这个收敛 $\int_\tau^T \varphi \int_0^\infty \mu_r(s) \langle \eta_n^r(s), \psi \rangle_1 \mathrm{d}s\mathrm{d}r$. 最后, 我们设

$$\bar{\eta}_{\tau_n} = \eta_{\tau_n} - \eta_\tau,\ \bar{u}_{\tau_n} = u_{\tau_n} - u_\tau,$$

对每个 $t \in [\tau, T]$,

$$\bar{\eta}_n^t = \eta_n^t - \eta^t,\ \bar{u}_n(t) = u_n(t) - u(t).$$

考虑 $(\mathrm{H}_2)$ 并使用

$$\bar{\eta}_n^t(s) = \begin{cases} \int_0^s \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta, & 0 < s \leqslant t - \tau, \\ \bar{\eta}_{\tau_n}(s - t + \tau) + \int_0^{t-\tau} \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta, & s > t - \tau, \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned} \|\bar{\eta}_n^t\|_{M_t^1}^2 \leqslant & K_\tau(t) \|\bar{\eta}_n^t\|_{M_\tau^1}^2 \\ = & C(T)\Big(\int_0^{t-\tau} \mu_\tau(s) \|\int_0^s \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta\|_1^2 \mathrm{d}s \\ & + \int_{t-\tau}^\infty \mu_\tau(s) \|\bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau) + \int_0^{t-\tau} \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta\|_1^2 \mathrm{d}s\Big) \\ \leqslant & C(T)\Big(3(T-\tau)^2 \|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];V_1)}^2 \int_0^\infty \mu_\tau(s)\mathrm{d}s + 2\int_0^\infty \mu_\tau(s+t-\tau)\|\bar{\eta}_{\tau_n}(s)\|_1^2 \mathrm{d}s\Big) \\ \leqslant & C(T)\Big(3(T-\tau)^2 \|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];V_1)}^2 \kappa(\tau) + 2\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|_{M_\tau^1}^2\Big) \to 0,\ \ \forall t \in [\tau, T]. \end{aligned}$$

由于极限的唯一性, 我们得到 $q^t = \eta^t$.

显然,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mu_t(s)\langle \bar{\eta}_n^t(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{t-\tau} \mu_t(s)\langle \int_0^s \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta,\psi\rangle_1 \mathrm{d}s + \int_{t-\tau}^\infty \mu_t(s)\langle \bar{\eta}_{\tau_n}(s-t+\tau),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t-\tau}^\infty \mu_t(s)\langle \int_0^{t-\tau} \bar{u}_n(t-\zeta)\mathrm{d}\zeta,\psi\rangle_1 \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{t-\tau} \mu_t(s)\int_0^s \langle \bar{u}_n(t-\zeta),\psi\rangle_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s + \int_0^\infty \mu_t(s+t-\tau)\langle \bar{\eta}_{\tau_n}(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t-\tau}^\infty \mu_t(s)s\int_\tau^t \langle \bar{u}_n(\zeta),\psi\rangle_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

再次使用 $(\mathrm{H}_2)$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-\tau} \mu_t(s)\int_0^s \langle \bar{u}_n(t-\zeta),\psi\rangle_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \int_0^{t-\tau} \mu_t(s)s\int_0^s \|\bar{u}_n(t-\zeta)\|_1\|\psi\|_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];V_1)}\|\psi\|_1(T-\tau)^2K_\tau(t)\kappa(\tau) \to 0, \quad a.e.\ t\in[\tau,T],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t-\tau}^\infty \mu_t(s)\int_\tau^t \langle \bar{u}_n(\zeta),\psi\rangle_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \int_{t-\tau}^\infty \mu_t(s)s\int_\tau^t \|\bar{u}_n(\zeta)\|_1\|\psi\|_1 \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \|\bar{u}_n\|_{C([\tau,T];V_1)}\|\psi\|_1(T-\tau)^2K_\tau(t)\kappa(\tau) \to 0, \quad a.e.\ t\in[\tau,T],
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \mu_t(s+t-\tau)\langle \bar{\eta}_{\tau_n}(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s \leqslant \|\psi\|_1 K_\tau(t)\sqrt{\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_{\tau_n}\|_{M_\tau^1} \to 0, \quad a.e.\ t\in[\tau,T].$$

结果,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mu_t(s)\langle \bar{\eta}_n^t(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s = 0,\ \ a.e.\ t\in[\tau,T].$$

并且

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty \mu_t(s)\langle \bar{\eta}_n^t(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s\right| &\leqslant \int_0^\infty \mu_t(s)\|\bar{\eta}_n^t(s)\|_1\|\psi\|_1 \mathrm{d}s \\
&\leqslant \|\psi\|_1\sqrt{K_\tau(t)\kappa(\tau)}\|\bar{\eta}_n^t\|_{M_t^1} \in L^1([\tau,T]).
\end{aligned}$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T \varphi\int_0^\infty \mu_r(s)\langle \bar{\eta}_n^r(s),\psi\rangle_1 \mathrm{d}s\mathrm{d}r = 0.$$

最后, 我们得到问题 (2.2) 和 (2.3) 的弱解 $z=(u,\eta^t)$.

现在, 我们证明弱解关于初值的连续依赖性, 也即唯一性. 假设

$$z_1(t)=(u_1(t),\eta_1^t),\ z_2(t)=(u_2(t),\eta_2^t)$$

是问题 (2.2) 和 (2.3) 在 $[\tau,T]$ 上的两个弱解. 那么 $\bar z(t)=z_1(t)-z_2(t)=(\bar u(t),\bar\eta^t)$ 满足

$$\partial_t\bar u+A\bar u+\textstyle\int_0^\infty\mu_t(s)A\bar\eta^t(s)\mathrm{d}s=-f(u_1)+f(u_2), \tag{3.34}$$

其中

$$\bar\eta^t(s)=\begin{cases}\int_0^s\bar u(t-r)\mathrm{d}r, & s\leqslant t-\tau,\\ \bar\eta_\tau(s-t+\tau)+\int_0^{t-\tau}\bar u(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases} \tag{3.35}$$

给 (3.35) 乘以 $\bar u$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+2\int_0^\infty\mu_t(s)\langle\bar\eta^t(s),\bar u(t)\rangle_1\mathrm{d}s\\ &\quad=-2\|\bar u\|_1^2-2\langle f(u_1)-f(u_2),\bar u(t)\rangle\\ &\quad\leqslant-\frac{2}{\lambda_1}\|\bar u\|^2+C(1+\|u_1\|_{L^{p+1}}^{p-1}+\|u_2\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|\bar u\|_{L^{p+1}}^2\\ &\quad\leqslant-\frac{2}{\lambda_1}\|\bar u\|^2+C(1+\|u_1\|_1^{p-1}+\|u_2\|_1^{p-1})\|\bar u\|_1^2\\ &\quad\leqslant C(R,\lambda_1)F(t),\ \ t\in[\tau,T],\end{aligned}$$

其中 $F(t)=(\|\bar u\|^2)$. 在 $[\tau,t]$ 上积分, 我们发现

$$F(t)+2\textstyle\int_\tau^t\langle\bar u(y),\bar\eta^y\rangle_{M_y^1}\mathrm{d}y\leqslant F(\tau)+C(R,\lambda_1)\int_\tau^tF(y)\mathrm{d}y,\ \ t\in[\tau,T]. \tag{3.36}$$

根据定理 3.6, 我们知道

$$\|\bar\eta^t\|_{M_t^1}^2+\delta\textstyle\int_\tau^t\kappa(y)\|\bar\eta^y(s)\|_{M_y^1}^2\mathrm{d}y\leqslant\|\bar\eta^\tau\|_{M_\tau^1}^2+2\int_\tau^t\langle\bar u,\bar\eta^y\rangle_{M_y^1}\mathrm{d}y. \tag{3.37}$$

设 $\mathcal{F}(t)=F(t)+\|\bar\eta^t\|_{M_t^1}^2$, 我们有

$$\|\bar z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2\leqslant\mathcal{F}(t)\leqslant C\|\bar z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2.$$

结合 (3.36) 和 (3.37), 我们有

$$\mathcal{F}(t)\leqslant\mathcal{F}(\tau)+C(R,\lambda_1)\int_\tau^t\mathcal{F}(y)\mathrm{d}y.$$

应用 Gronwall 不等式, 我们获得

$$\|\bar{z}(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant C\mathrm{e}^{C(R,\lambda_1)(t-\tau)}\|\bar{z}(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau},\ \ t\in[\tau,T].$$

与此同时, 我们证明了问题 (2.2) 和 (2.3) 弱解的唯一性.

由于定理 3.8, 过程 $U(t,\tau)$ 符合问题 (2.2) 和 (2.3) 定义如下:

$$z(t)=U(t,\tau)z(\tau):\mathcal{H}^1_\tau\to\mathcal{H}^1_t,$$

这个从 $\mathcal{H}^1_\tau$ 到 $\mathcal{H}^1_t$ 的过程是连续的.

# 4. 时间依赖全局吸引子的存在性

## 4.1. 时间依赖吸收集在 $\mathcal{H}^1_t$ 中的存在性

**定理 4.1**(耗散性) 假设 (1.3) 和 (1.4) 式以及条件 $(H_1)$-$(H_4)$ 成立, $g\in L^2(\Omega)$, 存在序列 $\{z_n(\tau)\}\in\mathcal{H}^2_\tau$, 使得 $z_n(\tau)\to z(\tau)$. 对于任意初始条件 $z(\tau)\in\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathcal{H}^1_\tau$, 那么存在 $R_0>0$, 使得相应问题 (2.2), (2.3) 的过程 $U(t,\tau)$ 拥有一个时间依赖吸收集, 意味族 $\mathfrak{B}_t=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

**证明** 使用 Poincaré 不等式和 $(H_4)$, 我们能从 (3.18) 式中获得

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(t)+\tfrac{\theta\lambda_1}{2}\textstyle\int_\tau^t\|u(r)\|^2\mathrm{d}r+\tfrac{\theta}{2}\int_\tau^t\|u(r)\|_1^2\mathrm{d}r+\delta\int_\tau^t\kappa(r)\|\eta^r(s)\|^2_{M^1_t}\mathrm{d}s\mathrm{d}r\\&\leqslant\mathcal{N}(\tau)+Q_1(t-\tau).\end{aligned}\tag{4.1}$$

意味着,

$$\mathcal{N}(t)+2\varepsilon\int_\tau^t\mathcal{N}(r)\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{N}(\tau)+\varepsilon\int_\tau^t\mathcal{N}(r)\mathrm{d}r+Q_1(t-\tau),$$

这里, $\varepsilon=\min\{\frac{1}{2}\theta\lambda_1,\frac{1}{2}\theta,\delta\inf\limits_{r\in[\tau,t]}\kappa(r)\}$. 应用引理 2.4 ,我们推断出

$$\mathcal{N}(t)\leqslant\mathcal{N}(\tau)\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}+\frac{Q_1\mathrm{e}^{\varepsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}.$$

此外,

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t}\leqslant\mathcal{N}(t)\leqslant(1+\tfrac{1}{\lambda_1})\|z(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau}\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-\tau)}+\tfrac{R_0^2}{2},\tag{4.2}$$

其中 $R_0^2=2\frac{Q_1\mathrm{e}^\varepsilon}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}$. 那么对每个 $R>0$,存在一个 $t_0=t_0(R)=\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{2(1+\frac{1}{\lambda_1})R^2}{R_0^2}\leqslant t$ 并且 $R_0>0$ 使得

$$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R)\subset\mathbb{B}_t(R_0).$$

## 4.2. 时间依赖全局吸收集在 $\mathcal{H}^1_t$ 中的存在性

接下来, 我们将证明解过程 $U(t,\tau)$ 相应的 (2.2), (2.3) 对应的渐近紧性. 为此, 我们需要对非线

性项, 解, 解过程进行一些分解.

关于非线性项 $f$ ,受 [2] 启发, 我们将其分解如下:

$$f(s) = f_0(s) + f_1(s),$$

其中 $f_0, f_1 \in C^1(\mathbb{R})$ 并且满足:

$$|f_0'(u)| \leqslant C(1 + |u|^{p-1}), \quad \forall u \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant p \leqslant 3, \tag{4.3}$$

$$f_0(u)u \geqslant 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

$$|f_1'(u)| \leqslant C(1 + |u|^{\gamma}), \quad \forall u \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant \gamma < 2, \tag{4.5}$$

$$\liminf_{|u|\to\infty} f_1'(u) > -\lambda_1. \tag{4.6}$$

受 [20]思想的影响, 将问题 (2.2), (2.3) 的解 $z(t) = (u(t), \eta^t)$ 分解为:

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t), \quad u(t) = v(t) + w(t), \quad \eta^t = \zeta^t + \xi^t,$$

这里, $z_1(t) = (v(t), \zeta^t)$ 且 $z_2(t) = (w(t), \xi^t)$ 解决了下述问题:

$$\begin{cases} \partial_t v + Av + \displaystyle\int_0^\infty \mu_t(s) A\zeta^t(s)\mathrm{d}s + f_0(v) = 0, \\ \partial_t \zeta^t + \partial_s \zeta^t = v(t), \\ v(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x,\tau) = u_\tau(x,t), \\ \zeta^t(x,s)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \zeta^\tau(x,s) = \eta_\tau(x,s), \end{cases} \tag{4.7}$$

其中,

$$\zeta^t(s) = \begin{cases} \int_0^s v(t-r)\mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ \zeta_\tau(s-t+\tau) + \int_0^{t-\tau} v(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau, \end{cases}$$

并且

$$\begin{cases} \partial_t w + Aw + \displaystyle\int_0^\infty \mu_t(s) A\xi^t(s)\mathrm{d}s + f(u) - f_0(v) = g, \\ \partial_t \xi^t + \partial_s \xi^t = w(t), \\ w(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(x,\tau) = 0, \\ \xi^t(x,s)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \xi^\tau(x,s) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

其中,

$$\xi^t(s) = \begin{cases} \int_0^s w(t-r)\mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ \int_0^{t-\tau} w(t-r)\mathrm{d}r, & s > t-\tau. \end{cases}$$

类似于定理 3.8 的证明, 方程 (4.7) 和 (4.8) 解的存在性和唯一性可以获得.

进一步, 容易知道, 过程 $U_1(t,\tau)$ 和 $U_2(t,\tau)$ 对应方程 (4.7) 和 (4.8). 简单起见, 我们设

$$U(t,\tau)z_\tau = U_1(t,\tau)z_1(\tau) + U_2(t,\tau)z_2(\tau) = z_1(t) + z_2(t).$$

类似于定理 4.1, 可以得到如下结果.

**引理 4.2** 假设 $f_0$ 满足 (4.3) 和 (4.4) .如果 $(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_4)$ 成立, 那么方程 (4.7) 满足估计:

(i) 存在序列 $\{z_n(\tau)\} \in \mathcal{H}^2_\tau$, 使得 $z_n(\tau) \to z(\tau)$. 当初值 $z_1(\tau) \in \mathcal{H}^1_\tau$ 且 $\|z_1(\tau)\|_{\mathcal{H}^1_\tau} \leqslant R_1$,

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t} \leqslant C(R_1)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}. \tag{4.9}$$

(ii) 当初值 $z_1(\tau) \in \mathcal{H}^2_\tau$ 且 $\|z_1(\tau)\|_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant R_2$,

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{H}^2_t} \leqslant C(R_2)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}. \tag{4.10}$$

这里 $R_1$ 和 $R_2$ 均为常数.

**证明** 将方程 (4.7) 乘以 $v$ ,

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|^2) + 2\|v\|_1^2 + 2\langle v, \zeta^t\rangle_{M^1_t} + 2\langle f_0(v), v\rangle = 0. \tag{4.11}$$

我们定义

$$F(t) = \|v\|^2.$$

考虑 (4.4), 我们推断出

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) + 2\|v\|_1^2 + 2\langle v, \zeta^t\rangle_{M^1_t} \leqslant 0. \tag{4.12}$$

在 $[\tau, t]$ 给 (4.11) 式积分, 我们有

$$F(t) + 2\textstyle\int_\tau^t \|v(r)\|_1^2 \mathrm{d}r + 2\int_\tau^t \langle v, \zeta^r\rangle_{M^1_r}\mathrm{d}r \leqslant F(\tau), \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{4.13}$$

由于定理 3.6, 我们有

$$\begin{aligned} F(t) + \|\zeta^t\|^2_{M^1_t} + 2\int_\tau^t \|v(r)\|_1^2\mathrm{d}r + \delta\int_\tau^t \kappa(r)\|\zeta^r(s)\|^2_{M^1_t}\mathrm{d}r \\ \leqslant F(\tau) + \|\zeta_\tau\|^2_{M^1_\tau}, \quad \forall t \geqslant \tau. \end{aligned}$$

定义

$$\mathcal{F}(t) = F(t) + \|\zeta^t\|^2_{M^1_t}.$$

那么,

$$\mathcal{F}(t) + 2\textstyle\int_\tau^t \|v(r)\|_1^2\mathrm{d}r + \delta\int_\tau^t \kappa(r)\|\zeta^r(s)\|^2_{M^1_t}\mathrm{d}r \leqslant \mathcal{F}(\tau). \tag{4.14}$$

也就是说,

$$\mathcal{F}(t)+2\varepsilon_1\int_\tau^t\mathcal{F}(r)\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{F}(\tau)+\varepsilon_1\int_\tau^t\mathcal{F}(r)\mathrm{d}r,$$

这里, $\varepsilon_1=\min\{\lambda_1,1,\delta\inf\limits_{r\in[\tau,t]}\kappa(r)\}$. 由引理 2.4, 我们获得

$$\mathcal{F}(t)\leqslant\mathcal{F}(\tau)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}.$$

进一步,

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau}=\mathcal{F}(t)\leqslant C(R_1,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)},\tag{4.15}$$

其中 $\|z(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau}\leqslant R_1$.

当初值 $z_1(\tau)\in\mathcal{H}^2_\tau$ 时, 将方程 (4.7) 乘以 $-\Delta v$ ,

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|_1^2)+2\|v\|_2^2+2\langle v,\zeta^t\rangle_{M_t^2}+2\langle f_0(v),v\rangle=0.\tag{4.16}$$

我们定义

$$F_1(t)=\|v\|_1^2.$$

考虑 (4.4), 我们推断出

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(t)+2\|v\|_2^2+2\langle v,\zeta^t\rangle_{M_t^2}\leqslant 0.\tag{4.17}$$

在 $[\tau,t]$ 给 (4.17) 式积分, 我们有

$$F_1(t)+2\textstyle\int_\tau^t\|v(r)\|_2^2\mathrm{d}r+2\int_\tau^t\langle v,\zeta^r\rangle_{M_r^2}\mathrm{d}r\leqslant F_1(\tau),\ \ \forall t\geqslant\tau.\tag{4.18}$$

由于定理 3.6, 我们有

$$\begin{aligned}F_1(t)+\|\zeta^t\|^2_{M_t^2}+2\int_\tau^t\|v(r)\|_2^2\mathrm{d}r+\delta\int_\tau^t\kappa(r)\|\zeta^r(s)\|^2_{M_t^2}\mathrm{d}r\\ \leqslant F_1(\tau)+\|\zeta_\tau\|^2_{M_\tau^2},\ \ \forall t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

定义

$$\mathcal{F}_1(t)=F_1(t)+\|\zeta^t\|^2_{M_t^2}.$$

那么,

$$\mathcal{F}_1(t)+2\textstyle\int_\tau^t\|v(r)\|_2^2\mathrm{d}r+\delta\int_\tau^t\kappa(r)\|\zeta^r(s)\|^2_{M_t^2}\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{F}_1(\tau).\tag{4.19}$$

也就是说,

$$\mathcal{F}_1(t)+2\varepsilon_1\int_\tau^t\mathcal{F}_1(r)\mathrm{d}r\leqslant\mathcal{F}_1(\tau)+\varepsilon_1\int_\tau^t\mathcal{F}_1(r)\mathrm{d}r,$$

这里, $\varepsilon_1=\min\{\lambda_1,1,\delta\inf\limits_{r\in[\tau,t]}\kappa(r)\}$. 由引理 2.4, 我们获得

$$\mathcal{F}_1(t) \leqslant \mathcal{F}_1(\tau)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}.$$

进一步,

$$\|z_1(t)\|^2_{\mathcal{H}^2_\tau} = \mathcal{F}_1(t) \leqslant C(R_2,\lambda_1)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}, \tag{4.20}$$

其中 $\|z(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant R_2$.

**引理 4.3** 假设非线性项 $f$ 满足 (1.3), (1.4) 和 (4.3)-(4.6).如果 $g \in L^2(\Omega)$ 并且 $(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_4)$ 成立, 那么对于每段时间 $T > 0$, 存在序列 $\{z_n(\tau)\} \in \mathcal{H}^2_\tau$, 使得 $z_n(\tau) \to z(\tau)$. 对于初始条件 $z_\tau \in \mathcal{H}^1_\tau$, 存在一个正常数 $I = I(\|g\|, \|z_\tau\|_{\mathcal{H}^1_\tau}, T, \lambda_1)$, 使得 (4.8) 的解满足:

$$\|U_2(T+\tau,\tau)z_2(\tau)\|^2_{\mathcal{H}^{\frac{4}{3}}_{T+\tau}} = \|z_2(T+\tau)\|^2_{\mathcal{H}^{\frac{4}{3}}_{T+\tau}} \leqslant I. \tag{4.21}$$

**证明** 将方程 (4.8) 的第一个方程乘以 $A^{\frac{1}{3}}w$, 可得

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) + 2\|w(t)\|^2_{\frac{4}{3}} + 2\langle \xi^t, w(t)\rangle_{M_t^{\frac{4}{3}}} \\
&= 2\langle g, A^{\frac{1}{3}}w\rangle - 2\langle f_1(v), A^{\frac{1}{3}}w\rangle - 2\langle f(u)-f(v), A^{\frac{1}{3}}w\rangle,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 $G(t) = \|w(t)\|^2_{\frac{1}{3}}$. 容易知道

$$2|\langle g, A^{\frac{1}{3}}w\rangle| \leqslant \tfrac{1}{4}\|w\|^2_{\frac{4}{3}} + \tfrac{4\|g\|^2}{\lambda_1^{\frac{2}{3}}}. \tag{4.23}$$

我们可以从 (4.5) 和 (1.3) 中获得

$$\begin{aligned}
-2\langle f_1(v), A^{\frac{1}{3}}w\rangle &\leqslant C\int_\Omega (1+|v|^\gamma)|A^{\frac{1}{3}}w|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C(\int_\Omega (1+|v|^{\frac{18\gamma}{13}})\mathrm{d}x)^{\frac{13}{18}}(\int_\Omega |A^{\frac{1}{3}}w|^{\frac{18}{5}}\mathrm{d}x)^{\frac{5}{18}} \\
&\leqslant C(1+\|v\|^\gamma_{L^6})\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}} \\
&\leqslant C(R,\lambda_1)\|w\|_{\frac{4}{3}} \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}\|w\|^2_{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned} \tag{4.24}$$

且

$$\begin{aligned}
-2\langle f(u)-f(v), A^{\frac{1}{3}}w\rangle &\leqslant C\int_\Omega (1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|w||A^{\frac{1}{3}}w|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C(\|u\|^{p-1}_{L^{\frac{3(p-1)}{2}}} + \|v\|^{p-1}_{L^{\frac{3(p-1)}{2}}})\|w\|_{L^{18}}\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}} \\
&\leqslant C(\|u\|^{p-1}_1 + \|v\|^{p-1}_1)\|w\|_{L^{18}}\|A^{\frac{1}{3}}w\|_{L^{\frac{18}{5}}} \\
&\leqslant c_0\|w\|^2_{\frac{4}{3}},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $c_0 = c_0(Q_0)$, 并且我们使用嵌入 $V_{\frac{4}{3}} \hookrightarrow L^{18}$, $V_{\frac{2}{3}} \hookrightarrow L^{\frac{18}{5}}$, $V_1 \hookrightarrow L^6$.

因此, 把 (4.23)-(4.25) 加到 (4.22), 我们有

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) + 2\langle \xi^t, w(t)\rangle_{M_t^{\frac{4}{3}}} \leqslant (c_0 - \tfrac{3}{2})\|w(t)\|^2_{\frac{4}{3}} + C. \tag{4.26}$$

在 $[\tau, T+\tau]$ 积分, 我们有

$$G(T+\tau)+2\int_\tau^{T+\tau}\langle\xi^r, w(r)\rangle_{M_r^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}r \leqslant G(\tau)+(c_0-\tfrac{3}{2})\int_\tau^{T+\tau}\|w(r)\|_{\frac{4}{3}}^2\mathrm{d}r+CT. \tag{4.27}$$

定义

$$\mathcal{G}(t)=\|w(t)\|_{\frac{1}{3}}^2+\|\xi^t\|_{M_t^{\frac{4}{3}}}^2.$$

由于定理 3.6, 我们有

$$\mathcal{G}(T+\tau)+\delta\int_\tau^{T+\tau}\kappa(r)\|\xi^r(s)\|_{M_r^{\frac{4}{3}}}^2\mathrm{d}r \leqslant \mathcal{G}(\tau)+(c_0-\tfrac{3}{2})\int_\tau^{T+\tau}\|w(r)\|_{\frac{4}{3}}^2\mathrm{d}r+CT. \tag{4.28}$$

也就是说

$$\mathcal{G}(T+\tau)\leqslant\mathcal{G}(\tau)+c_1\int_\tau^{T+\tau}\mathcal{G}(r)\mathrm{d}r+CT. \tag{4.29}$$

由 Gronwall 不等式, 我们推断出

$$\mathcal{G}(T+\tau)\leqslant \mathrm{e}^{c_1T}(\mathcal{G}(\tau)+CT)=CT\mathrm{e}^{c_1T}.$$

类似的,

$$\|z_2(T+\tau)\|_{\mathcal{H}_{T+\tau}^{\frac{4}{3}}}^2\leqslant\mathcal{G}(T+\tau)\leqslant CT\mathrm{e}^{c_1T}=I.$$

此外, 对于任意的 $\xi_\tau\in L^2_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;V_1)$, Cauchy 问题(见 [3, 12, 18])

$$\begin{cases}\partial_t\xi^t=-\partial_s\xi^t+w, & t>\tau,\\ \xi^\tau=\xi_\tau,\end{cases} \tag{4.30}$$

有唯一解 $\xi^t\in C([\tau,+\infty);L_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;V_1))$ 且有显式表达:

$$\xi^t(s)=\begin{cases}\int_0^s w(t-r)\mathrm{d}r, & 0<s\leqslant t-\tau,\\ \int_0^{t-\tau}w(t-r)\mathrm{d}r, & s>t-\tau.\end{cases} \tag{4.31}$$

我们用 $\mathfrak{B}_t$ 表示有定理 4.1 获得的时间依赖吸收集. 那么, 我们设

$$\mathcal{K}_T=\Pi U_2(T,\tau)\mathfrak{B}_\tau,$$

这里,$\Pi: V_1\times L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;V_1)\to L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+;V_1)$ 是一个投影算子.

**引理 4.4** 设 $z_2(t)=(w(t),\xi^t)$ 是问题 (4.8) 的解. 假设非线性项满足 (1.3), (1.4) 且 (4.3)−(4.6).如果 $g\in L^2(\Omega)$ 并且 $(\mathrm{H}_1)$-$(\mathrm{H}_4)$ 成立, 那么, 对每个给定的 $T>\tau$, 存在一个正常数 $I_1=I_1(\|\mathfrak{B}_\tau\|_{\mathcal{H}_\tau^1})$, 使得

(i) $\mathcal{K}_T$ 在 $L^2_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+);V_{\frac{4}{3}})\cap H^1_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+;V_1)$ 有界 ;

(ii) $\sup_{\eta^T \in \mathcal{K}_T} \|\xi^T(s)\|_1^2 \leqslant I_1$.

**证明** 在 (4.31) 的观点下, 我们推断出

$$\partial_s \xi^t(s) = \begin{cases} w(t-s), & 0 < s \leqslant t-\tau, \\ 0, & s > t-\tau. \end{cases} \tag{4.32}$$

由于引理 4.3, 它可以证明 (i) 成立.

接下来, 易得

$$\|\xi^T(s)\|_1 \leqslant \begin{cases} \int_0^s \|w(T-r)\|_1 \mathrm{d}r \leqslant \int_0^{T-\tau} \|w(T-r)\|_1 \mathrm{d}r, & 0 < s \leqslant T-\tau, \\ \int_0^{T-\tau} \|w(T-r)\|_1 \mathrm{d}r, & s > T-\tau, \end{cases} \tag{4.33}$$

成立. 由 (4.22) 式, (ii) 也可以得证.

**引理 4.5** 在引理 4.4 的假设成立下. 那么对于每个固定的 $T > \tau$, $U_2(T,\tau)\mathfrak{B}_\tau$ 在 $\mathcal{H}_T^1$ 相对紧.

**证明** 事实上, 应用引理 2.2 我们知道 $\mathcal{K}_T$ 在 $L_{\mu_\tau}(\mathbb{R}^+; V_1)$ 相对紧. 并且再次使用 $(H_2)$ 的假设, 我们得到 $\mathcal{K}_T$ 在 $L_{\mu_t}(\mathbb{R}^+; V_1)$ 相对紧. 此外, 有紧嵌入: $V_{\frac{3}{4}} \hookrightarrow\hookrightarrow V_1$, 我们推断出

$$U_2(T,\tau)\mathfrak{B}_\tau \text{ 在 } \mathcal{H}_T^1 \text{ 相对紧 }.$$

**引理 4.6** 设 $U(t,\tau)$ 是问题 (2.2), (2.3) 的解过程. 假设非线性项 $f$ 满足 (1.3), (1.4) 和 (4.3)-(4.6). 如果 $g \in L^2(\Omega)$ 并且 $(H_1)$-$(H_4)$ 成立, 那么过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖吸收集 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ in $\mathcal{H}_t^1$. 此外, 吸引子 $\mathfrak{A}$ 是不变的, 意味着,

$$U(t,\tau)A_\tau = A_t, \quad \forall t \geqslant \tau.$$

**证明** 设 $\mathfrak{B}_t = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是有定理 4.1 获得的时间依赖吸收集. 由引理 4.2 和引理 4.3, 对于足够大的正常数 $R_1$, 易得

$$\text{族 } B_t^{\frac{1}{3}} = \{\mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}} \text{ 是拉回吸引的},$$

这里 $\mathbb{B}_t^{\frac{1}{3}}(R_1) = \{\xi | \|\xi\|_{\mathcal{H}_t^{\frac{4}{3}}} \leqslant R_1\}$.

事实上, 结合 (4.9) 和 (4.21), 我们推断出

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}_t^1}(U(t,\tau)\mathfrak{B}_\tau, B_t^{\frac{1}{3}}) &\leqslant \operatorname{dist}_{\mathcal{H}_t^1}(U_1(t,\tau)\mathfrak{B}_\tau + U_2(t,\tau)\mathfrak{B}_\tau, B_t^{\frac{1}{3}}) \\ &= \operatorname{dist}_{\mathcal{H}_t^1}(U_1(t,\tau)\mathfrak{B}_\tau, B_t^{\frac{1}{3}}) \\ &\leqslant C(\|\mathfrak{B}_\tau\|_{\mathcal{H}_\tau^1}) e^{-\varepsilon_1(t-\tau)}, \end{aligned}$$

这里, $\varepsilon_1 = \min\{\lambda_1, 1, \delta \inf_{r\in[\tau,t]} \kappa(r)\}$.

对任何有界集(在 $\mathcal{H}_\tau^1$) $B_\tau = \{\mathbb{B}_\tau(R)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$, 有定理 4.1, 存在一个 $t_0 = t_0(R)$ 使得

$$\tau \leqslant t - t_0 \Rightarrow U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathbb{B}_t(R_0).$$

因此,

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}_t^1}(U(t,\tau)B_\tau, \mathfrak{B}_t) \leqslant \varpi \mathrm{e}^{\varepsilon_1 t_0}\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)},$$

其中 $\varpi = \sup\limits_{0\leqslant t-\tau\leqslant t_0} \|U(t,\tau)B_\tau\|_{\mathcal{H}_t^1}$.

应用引理 2.3 和定理 3.8, 我们可以获得

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{H}_t^1}(U(t,\tau)B_\tau, B_t^{\frac{1}{3}}) \leqslant C(\|B_\tau\|_{\mathcal{H}_\tau^1})\mathrm{e}^{-\varepsilon_1(t-\tau)}.$$

结合引理 4.5, 我们有问题 (2.2), (2.3) 相应的过程 $U(t,\tau)$ 在 $\mathcal{H}_t^1$ 中的渐近紧性. 因此,应用定理 2.7, 定理 2.10 和定理 3.8, 我们可以证明时间依赖吸收集 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{H}_t^1$ 的不变性和存在性, 也就是说

$$U(t,\tau)A_\tau = A_t,$$

并且

$$\mathfrak{A} = \{Z|t \to Z(t) \in \mathcal{H}_t^1 \text{ 且 } Z(t) \text{ 是过程 } U(t,\tau) \text{ 的 CBT}\}.$$

# 基金项目

国家自然科学基金项目(批准号: 11961059; 12061062)。

# 参考文献

[1] Aifantis, E.C. (1980) On the Problem of Diffusion in Solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296. https://doi.org/10.1007/BF01202949

[2] Arrieta, J., Carvalho, A.N. and Hale, J.K. (1992) A Damped Hyperbolic Equations with Critical Exponents. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 841-866. https://doi.org/10.1080/03605309208820866

[3] Borini, S. and Pata, V. (1999) Uniform Attractors for a Strongly Damped Wave Equations with Linear Memory. *Asymptotic Analysis*, **20**, 263-277.

[4] Conti, M., Danese, V., Giorgi, C. and Pata, V. (2018) A Model of Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels. *American Journal of Mathematics*, **140**, 349-389. https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0008

[5] Conti, M., Danese, V. and Pata, V. (2018) Viscoelasticity with Time-Dependent Memory Kernels. Part II: Asymptotic Behavior of Solutions. *American Journal of Mathematics*, **140**, 1687-1721. https://doi.org/10.1353/ajm.2018.0049

[6] Chen, P.J. and Gurtin, M.E. (1968) On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **19**, 614-627. https://doi.org/10.1007/BF01594969

[7] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for the Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013

[8] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. In: *AMS eBooks: Colloquium Publications*, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/coll/049

[9] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[10] Dafermos, C.M. (1970) Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **37**, 297-308. https://doi.org/10.1007/BF00251609

[11] Ding, T. and Liu, Y.F. (2015) Time-Dependent Global Attractor for the Nonclassical Diffusion Equations. *Applicable Analysis*, **94**, 1439-1449. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.933475

[12] Coleman, B.D. and Gurtin, M.E. (1967) Equipressence and Constitutive Equations for Rigid Heat Conductors. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **18**, 199-208. https://doi.org/10.1007/BF01596912

[13] Gatti, C., Miranville, A., Pata, V. and Zelik, S.V. (2008) Attractors for Semi-Linear Equations of Viscoelasticity with Very Low Dissipation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **38**, 1117-1138. https://doi.org/10.1216/RMJ-2008-38-4-1117

[14] Grasselli, M. and Pata, V. (2002) Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory. Progress in Nonlinear *Differential Equations and Their Applications*, **50**, 155-178. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8221-7_9

[15] Pata, V. and Squassina, M. (2005) On the Strongly Damped Wave Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 511-533. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1233-1

[16] Simon, J. (1987) Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360

[17] Pata, V. and Zucchi, A. (2001) Attractors for a Damped Hyperbolic Equation with Linear Memory. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **11**, 505-529.

[18] Zelik, S.V. (2004) Asymptotic Regularity of Solutions of a Nonautonomous Damped Wave Equation with a Critical Growth Exponent. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **3**, 921-934. https://doi.org/10.3934/cpaa.2004.3.921

[19] Meng, F.J., Wu, J. and Zhao, C.X. (2019) Time-Dependent Global Attractor for Extensible Berger Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **469**, 1045-1069. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.050

[20] Sun, C.Y., Wang, S.Y. and Zhong, C.K. (2007) Global Attractors for a Nonclassical Diffusion Equation. *Acta Mathematica Sinica*, **23**, 1271-1280. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0909-6