**Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1483-1491**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135151

# 乘积图和F-Sum图的Steiner K-距离

**胡玲莉[1]，颜　娟[2]，陈娅红[1,2*]**

[1]浙江理工大学理学院，浙江 杭州
[2]丽水学院数学与计算机学院，浙江 丽水

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

## 摘　要

**图的距离是图论中非常重要且基本的概念，是研究基于距离的图不变量的基础。Steiner距离是图论组合研究中的经典问题。本文运用Steiner树的定义证明了corona积的Steiner k-半径和cluster积的Steiner k-半径的上下界以及F-sum图的Steiner距离和Steiner k-直径的界。**

## 关键词

**Steiner距离，Steiner半径，Corona积，Cluster积，F-sum图**

# Steiner K-Distances in Graph Products and F-Sum Graphs

**Lingli Hu[1], Juan Yan[2], Yahong Chen[1,2*]**

[1]School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
[2]School of Mathematics and Computer Science, Lishui University, Lishui Zhejiang

Received: Apr. 23rd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

## Abstract

**Graph distance is a very important and basic concept in graph theory, which is the basis of studying graph invariants based on distance. Steiner distance is a classic problem in graph theory combinatorial research. This paper proves the upper and lower bounds of Steiner k-radius of corona product and cluster product and the bounds of Steiner distance and Steiner k-diameter of F-sum graphs by using the definition of Steiner tree.**

*通讯作者。

文章引用: 胡玲莉, 颜娟, 陈娅红. 乘积图和 F-Sum 图的 Steiner K-距离[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1483-1491.
DOI: 10.12677/pm.2023.135151

**Keywords**

**Steiner Distance, Steiner k-Radius, Corona Product, Cluster Product, F-Sum Graphs**



## 1. 引言

图的 Steiner 问题是经典的组合优化问题。1989 年，Chartrand 等[1]引入了 Steiner 距离的概念并进行了初步的研究。Mao 等[2]在 2018 年研究了笛卡尔积和字典序积的 Steiner 距离，并在 Steiner 距离的基础上给出了 Steiner 直径的上下界。2019 年，Wang 等[3]接着研究了阈值图、联结图、corona 积、cluster 积的 Steiner 距离和 Steiner 直径，引入了有关 Steiner 树的概念，运用 Steiner 树的结构特征证明了相关定理。其余有关 Steiner 距离的研究可参考 Mao 等[4] [5] [6]，Oellermann 等[7]的工作。

乘积图的提出是基于这样一种思想，即利用乘积作为一种工具，将两个具有既定性质的已知图组合起来，得到一个新的图，该图继承了这两个图的性质。2009 年，Eliasi 等[8]引入了 F-sum 图的概念，研究了 F-sum 图的一般距离。本文对 corona 积，cluster 积，F-sum 图的 Steiner 半径、Steiner 距离、Steiner 直径进行研究。有关这三个乘积图[9]-[18]的一些参数及拓扑指数也得到了充分研究。

本文中所有图都是连通的简单无向图，且顶点个数至少为两个。假设 $G$ 是一个连通图，顶点 $u,v\in V(H)$，则 $d_G(u,v)$ 表示顶点 $u,v$ 之间最短路的长度。令 $S$ 是 $G$ 的一个非空集合且 $|S|=k\ (2\le k\le n)$。点集 $S$ 的 Steiner 距离 $d_G(S)$ 表示包含 $S$ 的最小连通子图的边数，特别地，这个最小的连通子图一定是一颗树，令它为 $S$-Steiner 树。令 $k$ 是一个整数且 $2\le k\le n$，则图 $G$ 中顶点 $v$ 的 Steiner $k$-离心率 $e_k(v)$ 被定义为 $e_k(v)=\max\{d_G(S)\,|\,S\subseteq V(G),|S|=k\text{且}v\in S\}$。此外，Steiner $k$-直径和 Steiner $k$-半径的定义为 $sdiam_k(G)=\max\{e_k(v)\,|\,v\in V(G)\}$ 和 $srad_k(G)=\min\{e_k(v)\,|\,v\in V(G)\}$。连通图 $G$ 的中心 $C(G)$ 是由 $e(v)=rad(G)$ 的顶点 $v$ 诱导的子图，作为图中心的推广，连通图 $G$ 的 Steiner $k$-中心 $C_k(G)$ 是由最小 Steiner $k$-离心率顶点导出的子图，其中 $e_k(v)=srad_k(G)$。

Corona 积，Cluster 积[19]和 F-sum 图[8]的定义如下：

**定义 1** Corona 积 $G*H$ 通过复制一个 $G$，复制 $|V(G)|$ 个 $H$，然后将复制的第 $i$ 个 $H$ 的每一个顶点与 $G$ 的第 $i$ 个顶点连接起来，其中 $i=1,2,\cdots,|V(G)|$。设 $G$ 和 $H$ 是两个连通图，顶点集分别为 $V(G)=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$ 和 $V(H)=\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，则 $G*H$ 的顶点集为 $V(G*H)=V(G)\cup\{(g_i,h_j)\,|1\le i\le n,1\le j\le m\}$。

**定义 2** Cluster 积 $G\odot H$ 通过复制一个 $G$，复制 $|V(G)|$ 个根图 $H$，然后将复制的第 $i$ 个根图 $H$ 的根与 $G$ 的第 $i$ 个顶点相连，其中 $i=1,2,\cdots,|V(G)|$。设 $G$ 和 $H$ 是两个连通图，顶点集分别为 $V(G)=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$ 和 $V(H)=\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，则 $V(G\odot H)$ 的顶点集为 $V(G\odot H)=\{(g_i,h_j)\,|1\le i\le n,1\le j\le m\}$。

**定义 3** F-sum 图 $G+_F H$ 的顶点集为 $V(G+_F H)=(V(G)\cup E(G))\times V(H)$。$G+_F H$ 中的两个顶点分别为 $(g_1,g_2)$ 和 $(h_1,h_2)$，这两个顶点相邻当且仅当 $g_1=h_1\in V(G)$ 且 $(g_2,h_2)\in E(H)$ 或者 $g_2=h_2$ 且 $(g_1,h_1)\in E(F(G))$。$S,R,Q$ 和 $T$ 的定义如下：

$S(G)$：在图 $G$ 中的每条边上添加一个新的顶点，使得每条边都由长度为 2 的路替换所得的图。

$R(G)$：在图 $G$ 中的每条边上添加一个新的顶点，在图 $G$ 的基础上，将每个新顶点连接到相应边的端点上所得的图。

$Q(G)$：在图 $G$ 中的每条边上添加一个新的顶点，将新顶点与相邻的顶点相连所得的图。

$T(G)$：将 $R(G)$ 和 $Q(G)$ 结合所得的图。

其中，$F$ 代表图变换 $S,R,Q$ 和 $T$ 中的一个。

下面给出两个重要的引理。

**引理 1** [3] $G$ 和 $H$ 是两个连通图，其中 $V(G)=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，$V(H)=\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$。令 $k,m,n$ 是三个整数且 $3\le k\le n(m+1)$。$S$ 是 $G*H$ 的顶点各不相同的集合，使得 $|S|=k$。则有

$$d_{G*H}(S)=d_G(S'_G)+k-t,$$

其中 $|S\cap V(G)|=t$，$S'_G$ 是 $V(G)$ 的最大子集使得对于任意的 $g\in S'_G$ 都有 $S\cap\big(V(H(g))\cup g\big)\neq\varnothing$。

**引理 2** [3]令点集 $S$ 是 Cluster 积 $G\odot H$ 的一个顶点各不相同的顶点集，如果存在 $S\subseteq V(H(g_i))$ 中的顶点在不同的 $H(g_i)$ $(1\le i\le n)$ 中，则

$$d_G(S'_G)+k-t\le d_{G\odot H}(S)\le r\cdot d_H(S'_H)+d_G(S'_G),$$

其中，当 $h_1\in S_H$，$S'_H=S_H\cup\{h_1\}$ 时，有 $S'_H=S_H$。否则，令 $|S\cap V(G(h_1))|=t$，$|S'_G|=r$，$S'_G$ 是 $V(G)$ 的最大的子集使得对每一个 $g\in S'_G$ 都有 $S\cap V(H(g))\neq\varnothing$。

## 2. 主要结果

### 2.1. Corona 积和 Cluster 积的 Steiner k-半径

**定理 1** 令 $k,m,n$ 是三个整数且 $3\le k\le n(m+1)$，连通图 $G,H$ 分别有 $n$ 和 $m$ 个顶点。

如果 $3\le k\le n$，那么 $srad_k(G*H)=srad_k(G)+k-1$。

如果 $n+1\le k\le mn$，那么 $srad_k(G*H)=(n-1)+(k-1)$。

如果 $mn+1\le k\le(m+1)n$，那么 $srad_k(G*H)=mn+n-1$。

**证明** 以上三种情况的证明方法相同，这里仅考虑第二种情况。如果 $n+1\le k\le mn$，根据 $srad_k(G*H)$ 的定义，可以发现存在一个顶点子集 $S\subseteq V(G*H)$，并且 $|S|=k$ 使得 $d_{G*H}(S)=srad_k(G*H)$。令 $S=\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_{k-1}},h_{j_{k-1}})\}\cup\{g_i\}$ $(g_i\in C_k(G))$，其中 $S'_G\subseteq\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_{k-1}}\}\cup\{g_i\}$。当 $|S\cap V(G)|=t$ 时，由引理 1 可得

$$srad_k(G*H)=d_{G*H}(S)=d_G(S'_G)+k-t\le(n-1)+(k-1) \tag{1}$$

另一方面，选择 $S=\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_{k-1}},h_{j_{k-1}})\}\cup\{g_i\}$ 使得 $V(G)\subseteq\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_{k-1}}\}\cup\{g_i\}$ $(g_i\in C_k(G))$。则任意的 $S$-Steiner 树 $T$ 一定包含 $S_G=V(G)$ 中的所有顶点(树 $T$ 的大小至少是 $n-1$)，且令 $T$ 的子树为 $T'$。对于 $S-\{g_i\}$ 中的每一个顶点，至少需要一条边去连接它和 $T'-\{g_i\}$ 中的顶点，因此可以得到

$$srad_k(G*H)\ge d_{G*H}(S)\ge d_G(S_G)+k-1=(n-1)+(k-1) \tag{2}$$

由不等式(1)和(2)，可以得出结论 $srad_k(G*H)=(n-1)+(k-1)$。

**定理 2** 令 $k,m$ 和 $n$ 三个正整数且 $3\le k\le nm$，令连通图 $G,H$ 分别有 $n,m$ 个顶点。

如果 $3\le k\le\min\{n,m\}$，那么

$$srad_k(G)+k-1\le srad_k(G\odot H)\le(k-1)srad_k(H)+srad_k(G)。$$

如果 $m>n$ 并且 $n+1\le k\le m-1$，那么

$$(n-1)+(k-1)\le srad_k(G\odot H)\le n\cdot srad_k(H)+(n-1)。$$

如果 $m \le n$ 并且 $m+1 \le k \le n-1$，那么

$$srad_k(G)+k-1 \le srad_k(G \odot H) \le (k-1)(m-1)+srad_k(G)。$$

如果 $\max\{n,m\} \le k \le nm-n$，那么

$$(n-1)+(k-1) \le srad_k(G \odot H) \le mn-1。$$

如果 $nm-n < k \le mn$，那么

$$srad_k(G \odot H) = nm-1。$$

**证明** 首先讨论 $srad_k(G \odot H)$ 以上五种情况的上界。根据 $srad_k(G \odot H)$ 的定义，可知存在一个顶点子集 $S \subseteq V(G \odot H)$ 且 $|S|=k$，使得 $d_{G \odot H}(S) = srad_k(G \odot H)$。令
$S = \{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_{k-1}},h_{j_{k-1}})\} \cup \{(g_{i_k},h_1)\}$，$((g_{i_k},h_1) \in (C_k(G \odot H) \cap V(G)))$。其中
$S_G = \{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_{k-1}}\} \cup \{g_{i_k}\}$ 且 $S_H = \{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_{k-1}}\}$。由引理 2 可得
$srad_k(G) = d_{G \odot H}(S) \le r \cdot d_H(S'_H) + d_G(S'_G)$。

首先证明结论 a)。如果 $3 \le k \le \min\{n,m\}$，则有 $d_H(S_H \cup \{h_1\}) = d_H(S'_H) \le srad_k(H)$，$d_G(S'_G) = d_G(S_G) \le srad_k(G)$，并且 $r=k-1$。因此

$$srad_k(G \odot H) = d_{G \odot H}(S) \le r \cdot d_H(S'_H) + d_G(S'_G) \le (k-1)srad_k(H) + srad_k(G)。$$

其次证明结论 b)。如果 $m > n$ 且 $n+1 \le k \le m-1$，则有 $d_G(S'_G) = d_G(S_G) \le n-1$，并且 $r=n$。因此

$$srad_k(G \odot H) = d_{G \odot H}(S) \le r \cdot d_H(S'_H) + d_G(S'_G) \le n \cdot srad_k(H) + (n-1)。$$

接着证明结论 c)。如果 $m < n$ 且 $m+1 \le k \le n-1$，可知 $d_H(S_H \cup \{h_1\}) = d_H(S'_H) \le m-1$，$d_G(S'_G) = d_G(S_G) \le srad_k(G)$，并且 $r=k-1$。因此

$$srad_k(G \odot H) = d_{G \odot H}(S) \le r \cdot d_H(S'_H) + d_G(S'_G) \le (k-1)(m-1) + srad_k(G)。$$

然后证明结论 d)。如果 $\max\{n,m\} \le k \le nm-n$，可知 $d_H(S_H \cup \{h_1\}) = d_H(S'_H) \le m-1$，$d_G(S'_G) = d_G(S_G) \le n-1$，并且 $r=n$。因此

$$srad_k(G \odot H) = d_{G \odot H}(S) \le r \cdot d_H(S'_H) + d_G(S'_G) \le n(m-1) + (n-1) = nm-1。$$

最后证明结论 e)。显然可以得到 $srad_k(G \odot H) \le nm-1$。

另一方面，由引理 2 可知 $d_G(S'_G) + k - t \le d_{G \odot H}(S) \le srad_{G \odot H}(S)$。且令
$S_G = \{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_{k-1}}\} \cup \{g_{i_k}\} = S'_G$，$S_H = \{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_{k-1}}\}$。对结论 a) 的下界进行证明，如果 $3 \le k \le \min\{n,m\}$，对于任意的 $S$-Steiner 树 $T$ 一定包含 $S_G$ 中的所有顶点(树 $T$ 的大小至少是 $d_G(S_G)$)，假设树 $T$ 有子树 $T'$。对于每一个 $S-(g_{i_k},h_1)$ 中的顶点，需要至少一条边来连接它和 $T'-\{g_{i_k}\}$ 中的顶点，最终得到

$$srad_k(G \odot H) \ge d_{G \odot H}(S) \ge srad_k(G) + k - t \ge srad_k(G) + k - 1。$$

结论 b)和结论 e)的证明与结论 a)的证明类似。对于 c)和 d)中的情况，证明过程与其上界的证明完全一样。

**推论 1** 假设 $G = P_n$，$H = P_m$ 且 $3 \le k \le mn$。对每一个 $g_i(1 \le i \le n)$ 有 $H(g_i) \cong P_m$ 和 $G(h_1) \cong P_n$。如果 $3 \le k \le n$，则 $srad_k(P_n \odot P_m) = (k-1)(m-1)+(n-1)$；如果 $n+1 \le k \le nm$，则 $srad_k(P_n \odot P_m) = nm-1$。

**推论 2** 假设 $G = P_n$，$H = K_m$ 且 $3 \le k \le mn$。对每一个 $g_i(1 \le i \le n)$ 有 $H(g_i) \cong K_m$ 和 $G(h_1) \cong P_n$。如果 $3 \le k \le mn-n+1$，则 $srad_k(P_n \odot K_m) = (k-1)+(n-1)$。

### 2.2. F-Sum 图的 Steiner 距离

令 $G$ 和 $H$ 是两个连通图，并且 $3\le k\le m(n+\varepsilon)$ （$\varepsilon$ 是图 $G$ 的边数），$k$ 是一个整数。令 $S=\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_k},h_{j_k})\}$ 是 F-sum 图 $G+_F H$ 的一个顶点各不相同的顶点集，其中 $F$ 代表 $S,R,Q$ 和 $T$ 中的其中一个。首先介绍几个参数：

- 令 $H(g)$ $(g\in F(G))$ 是 $H$ 的一个复制，其中 $|H(g)\cap S|=r$。
- 令 $X^i_{F(G)}$ $\left(1\le i\le\binom{k}{3}\right)$ 是集合 $\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\}$ 的(k-3)-重子集，其中 $\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\}\subset V(F(G))$。令 $a_i$ 是 $X^i_{F(G)}$ 中每个集合中不同顶点的个数，其中 $a=\min\left\{a_i \mid 1\le i\le\binom{k}{3}\right\}$。
- 令 $Y^j_H$ $\left(1\le j\le\binom{k}{3}\right)$ 是集合 $\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_k}\}$ 的(k-3)-重子集，其中 $\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_k}\}\subset V(H)$。令 $b_j$ 是 $Y^j_H$ 中每个集合中不同顶点的个数，其中 $b=\min\left\{b_j \mid 1\le j\le\binom{k}{3}\right\}$。

**定理 3** 根据上面的定义，可以得到重集 $S_G=\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\}$ 和 $S_H=\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_k}\}$。则

$$
\begin{aligned}
&d_{F(G)}(S_G)+d_H(S_H)\le d_{G+_F H}(S)\\
&\le\min\{r+d_{F(G)}(S_G)+(a+1)d_H(S_H),r+d_H(S_H)+(b+1)d_{F(G)}(S_H)\}\\
&\le\min\{r+d_{F(G)}(S_G)+(k-2)d_H(S_H),r+d_H(S_H)+(k-2)d_{F(G)}(S_H)\}\\
&=r+d_{F(G)}(S_G)+d_H(S_H)+(k-3)\min\{d_{F(G)}(S_H)+d_H(S_H)\}
\end{aligned}
$$

**证明** 根据对称性，这里只考虑 $d_{G+_F H}(S)\le r+d_H(S_H)+(b+1)d_{F(G)}(S_G)$ 的情况。当 $V(H)=\{h_1,h_2,\cdots,h_m\}$，假设 $F_G(h_1),F_G(h_2),\cdots,F_G(h_r)$ 是 $F(G)$ 的 $r$ 个复制，使得 $|V(F_G(h_j))\cap S|\ne 0$，$1\le j\le r$。因此 $(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_k},h_{j_k})\in\bigcup_{j=1}^{r}V(F_G(h_j))$。接下来，考虑三种情况：

**情况 1.** $S_G\subseteq V(G)$ (S 中的所以顶点都是实心的)且 $3\le k\le mn$。

由任意性，假设 $V(F_G(h_1))\cap S=\{(g_{i_1},h_1),(g_{i_2},h_1),\cdots,(g_{i_s},h_1)\}$，那么可以得到顶点 $(g_{i_{s+1}},h_{j_{s+1}}),(g_{i_{s+2}},h_{j_{s+2}}),\cdots,(g_{i_k},h_{j_k})\in\bigcup_{j=2}^{r}V(F_G(h_j))$。$F(G)$ 中存在一个大小为 $d_{F_G}(S_G)$ 的 $S_G$-Steiner 树，则在 $F_G(h_1)$ 中存在一个大小为 $d_{F_G}(S_G)$ 且包含顶点 $\{(g_{i_1},h_1),(g_{i_2},h_1),\cdots,(g_{i_s},h_1)\}\cup(g_{i_{s+1}},h_1),(g_{i_{s+2}},h_1),\cdots,(g_{i_k},h_1)$ 的 Steiner 树，令这个 Steiner 树为 $T(h_1)$。

每一个 $F_G(h_j)$ $(1\le j\le r)$ 都有一个相对应的 Steiner 树 $T(h_j)$。所以 $T(h_j)$ $(1\le j\le r)$ 是一个大小为 $d_{F_G}(S_G)$ 且包含 $F_G(h_j)$ 中的顶点 $\{(g_{i_1},h_j),(g_{i_2},h_j),\cdots,(g_{i_s},h_j),(g_{i_{s+1}},h_j),\cdots,(g_{i_k},h_j)\}$ 的 Steiner 树。同样的，$H$ 也有一个大小为 $d_H(S_H)$ 的 $S_H$-Steiner 树。因此 $T(g_{i_1})$ 包含 $H(g_{i_1})$ 中的顶点 $\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_1},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_1},h_r)\}$ 并且大小为 $d_H(S_H)$ 的 Steiner 树(见图 1)。

如果 $|V(F_G(h_j))\cap S|\ge 2$ $(1\le j\le r)$，则 $G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边 $\left(\bigcup_{j=y+1}^{r}E(T(h_j))\right)\cup E(T(g_{i_1}))$ 组成。由 $b$ 的定义可得 $b=r$ 或 $b=r-1$，则有 $d_{G+_F H}(S)\le d_H(S_H)+(b+1)\quad d_{F(G)}(S_G)$。

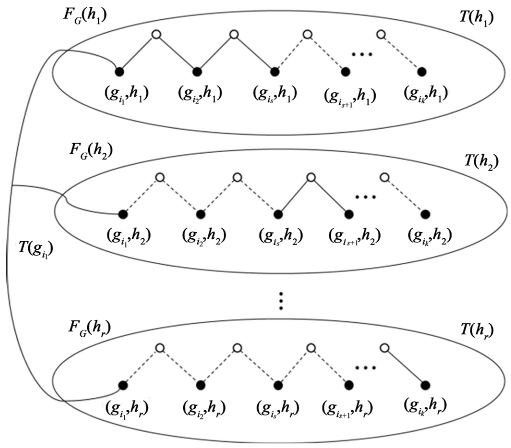


**Figure 1.** All vertices in $S$ are solid
**图 1.** $S$ 中的所以顶点都是实心的

如果$\left|V\left(F_G\left(h_j\right)\right)\cap S\right|=1$，其中$1\le j\le y$。若$y\ge 3$，$G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边$\left(\bigcup_{j=y+1}^{r}E\left(T\left(h_j\right)\right)\right)\cup E\left(T\left(g_{i_1}\right)\right)$组成，由 $b$ 的定义可知$b=r-3$。若$y=1$或$y=2$，则$G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边$\left(\bigcup_{j=2}^{r}E\left(T\left(h_j\right)\right)\right)\cup E\left(T\left(g_{i_1}\right)\right)$组成，根据 $b$ 的定义，可以得到$b=r-1$或者$b=r-2$，则$d_{G+_F H}\left(S\right)\le d_H\left(S_H\right)+\left(b+1\right)d_{F(G)}\left(S_G\right)$。

**情况 2.** $S_G\subseteq E\left(G\right)$ ($S$ 中的所有顶点都是空心的)且$3\le k\le m\varepsilon$。

由任意性，假设$V\left(F_G\left(h_1\right)\right)\cap S=\left\{\left(g_{i_1},h_1\right),\left(g_{i_2},h_1\right),\cdots,\left(g_{i_s},h_1\right)\right\}$。则$\left(g_{i_{s+1}},h_{j_{s+1}}\right),\left(g_{i_{s+2}},h_{j_{s+2}}\right),\cdots,\left(g_{i_k},h_{j_k}\right)\in\bigcup_{j=2}^{r}V\left(F_G\left(h_j\right)\right)$，其中$g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\in E\left(G\right)$。

对于每一个$F_G\left(h_j\right)$ $\left(1\le j\le r\right)$都有与之相对应的 Steiner 树$T\left(h_j\right)$。因此$T\left(h_j\right)$ $\left(1\le j\le r\right)$是大小为$d_{F_G}\left(S_G\right)$且包含$F_G\left(h_j\right)$中 $k$ 个顶点的 Steiner 树。同样的，图 $H$ 有一个大小为$d_H\left(S_H\right)$的$S_H$ -Steiner 树，因此$T\left(g_{i_1}\right)$是一个大小为$d_H\left(S_H\right)$且包含$H\left(g_{i_1}\right)$中的 $r$ 个顶点的 Steiner 树(见图 2)。

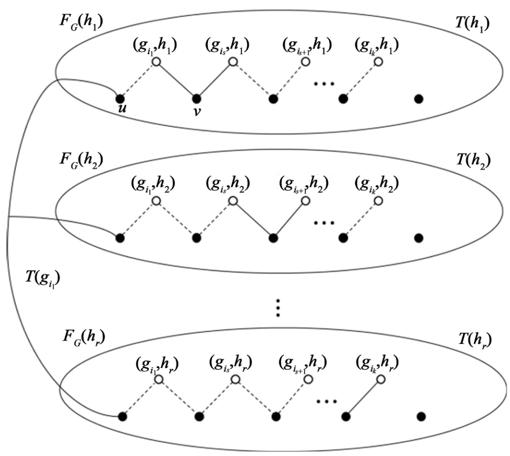


**Figure 2.** All vertices in $S$ are hollow
**图 2.** $S$ 中的所有顶点都是空心的

根据 $G+_F H$ 的定义，对于任意的两个顶点 $\left(g_{i_p},h_1\right)\in V\left(F_G\left(h_1\right)\right)$ 和 $\left(g_{i_p},h_{j_p}\right)\in V\left(F_G\left(h_{j_p}\right)\right)$，且 $d\left(\left(g_{i_p},h_1\right),\left(g_{i_p},h_{j_p}\right)\right)\neq 1$。因此不能直接连接 $F_G\left(h_j\right)$ 中的 $T\left(h_j\right)$ 和 $H\left(g_{i_1}\right)$ 中的 $T\left(g_{i_1}\right)$。由任意性，假设 $g_{i_1}=uv\in E(G)$，$d\left(u,g_{i_1}\right)=d\left(g_{i_1},v\right)=1$，即需要一条边去连接顶点 $u$ 和 $T\left(h_j\right)$ $(1\le j\le r)$，那么 $T\left(h_j\right)$ $(1\le j\le r)$ 和 $T\left(g_{i_1}\right)$ 需要 $r$ 条边去连接。

如果 $\left|V\left(F_G\left(h_j\right)\right)\cap S\right|\ge 2$ $(1\le j\le r)$，则 $G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边 $\left(\bigcup_{j=1}^{r}E\left(T\left(h_j\right)\right)\right)\cup E\left(T\left(g_{i_1}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{r}E\left(u,T\left(h_j\right)\right)\right)$ 组成，根据 $b$ 的定义可知 $b=r$ 或 $b=r-1$，则 $d_{G+_F H}(S)\le r+d_H\left(S_H\right)+(b+1)d_{F(G)}\left(S_G\right)$。

如果 $\left|V\left(F_G\left(h_j\right)\right)\cap S\right|=1$，其中 $1\le j\le y$。若 $y\ge 3$，则 $G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边 $\left(\bigcup_{j=y+1}^{r}E\left(T\left(h_j\right)\right)\right)\cup E\left(T\left(g_{i_1}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{r}E\left(u,T\left(h_j\right)\right)\right)$ 组成，由 $b$ 的定义，可得 $b=r-3$。若 $y=1$ 或者 $y=2$，则 $G+_F H$ 的一个 $S$-Steiner 树是由边 $\left(\bigcup_{j=2}^{r}E\left(T\left(h_j\right)\right)\right)\cup E\left(T\left(g_{i_1}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{r}E\left(u,T\left(h_j\right)\right)\right)$ 组成，由 $b$ 的定义可得 $b=r-1$ 或 $b=r-2$。即 $d_{G+_F H}(S)\le r+d_H\left(S_H\right)+(b+1)d_{F(G)}\left(S_G\right)$。

**情况 3.** 存在两个顶点 $\left(g_{i_p},h_{j_p}\right)\in V(G)$，$\left(g_{i_q},h_{j_q}\right)\in E(G)$，其中顶点 $\left(g_{i_p},h_{j_p}\right),\left(g_{i_q},h_{j_q}\right)\in S$，$3\le k\le mn+m\varepsilon$。

每一个 $F_G\left(h_j\right)$ $(1\le j\le r)$ 都有与之相对应的 Steiner 树 $T\left(h_j\right)$。因此 $T\left(h_j\right)$ $(1\le j\le r)$ 是一个大小为 $d_{F_G}\left(S_G\right)$ 且包含 $F_G\left(h_j\right)$ 的顶点 $\left\{\left(g_{i_1},h_j\right),\left(g_{i_2},h_j\right),\cdots,\left(g_{i_p},h_j\right),\cdots,\left(g_{i_s},h_j\right),\left(g_{i_{s+1}},h_j\right),\cdots,\left(g_{i_k},h_j\right)\right\}$ 的 Steiner 树。同样地，$H$ 有一个大小为 $d_H\left(S_H\right)$ 的 $S_H$-Steiner 树，因此 $T\left(g_{i_p}\right)$ 是一个大小为 $d_H\left(S_H\right)$ 且包含 $H\left(g_{i_p}\right)$ 中顶点 $\left\{\left(g_{i_p},h_{j_1}\right),\left(g_{i_p},h_{j_2}\right),\cdots,\left(g_{i_p},h_r\right)\right\}$ 的 Steiner 树(见图 3)。

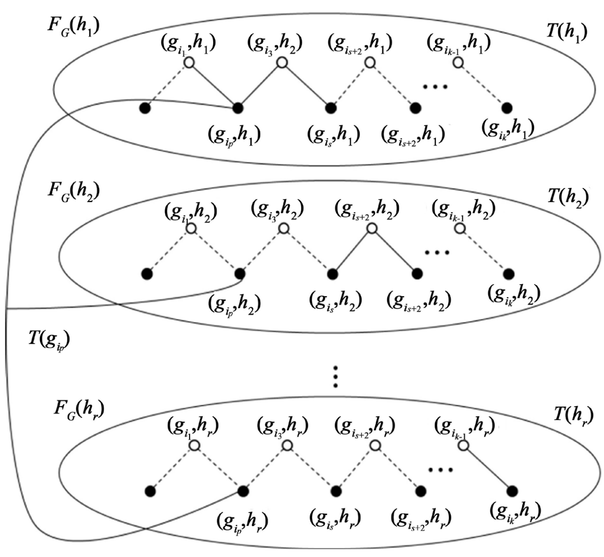


**Figure 3.** $S$ contains two types of vertices
**图 3.** $S$ 中包含两种类型的顶点

情况 3 的连接方式与情况 1 类似，即可证 $d_{G+_F H}(S)\le d_H(S_H)+(b+1)d_{F(G)}(S_G)$。

现在来考虑下界。令 $S=\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_k},h_{j_k})\}\subseteq V(G+_F H)$，其中 $S_G=\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\}\subseteq V(F(G))$，$S_H=\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_k}\}\subseteq V(H)$。根据图 $G+_F H$ 的结构特征，显然 $d_{G+_F H}(S)\ge d_{F(G)}(S_G))+d_H(S_H)$。

**推论 3** $G$ 和 $H$ 是两个连通图，且 $k\ge 3$ 是一个整数。令 $S=\{(g_{i_1},h_{j_1}),(g_{i_2},h_{j_2}),\cdots,(g_{i_k},h_{j_k})\}$ 是 $G+_F H$ 的一个顶点各不相同的集合。令 $S_G=\{g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_k}\}$，$S_H=\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_k}\}$。如果 $S_G\subseteq E(G)$ 且 $g_{i_1}=g_{i_2}=\cdots=g_{i_k}$，则 $d_{G+_F H}(S)=r+d_H(S_H)$，其中 $F$ 代表 $S,R,Q$ 和 $T$ 中的其中一个。$H(g)$ $(g\in F(G))$ 是 $H$ 的一个复制，且 $|V(H(g))\cap S|=r$。

**推论 4** 令 $G$ 和 $H$ 是两个阶数分别为 $n,m$ 的连通图，令 $k,m,n$ 是三个整数，并且 $3\le k\le m(n+\varepsilon)$（$\varepsilon$ 是图 $G$ 的边数），$n\le m\le n+\varepsilon$。假设 $H(g)$ $(g\in F(G))$ 是 $H$ 的一个复制， 可以知道 $|V(H(g))\cap S|=r$，F-sum 图的 Steiner 直径如下

如果 $k\le m$，则

$$\begin{aligned}&sdiam_k(F(G))+sdiam_k(H)\le sdiam_k(G+_F H)\\&\le r+sdiam_k(F(G))+sdiam_k(H)+(k-3)\min\{sdiam_k(F(G)),sdiam_k(H)\},\end{aligned}$$

如果 $m<k\le mn$，则

$$\begin{aligned}&sdiam_k(F(G))+m-1\le sdiam_k(G+_F H)\\&\le r+sdiam_k(F(G))+m-1+(k-3)\min\{sdiam_k(F(G)),m-1\},\end{aligned}$$

如果 $mn<k\le m(n+\varepsilon)$，则

$$n+m+\varepsilon-2\le sdiam_k(G+_F H)\le n+\varepsilon-1+(k-2)(m-1)。$$

## 3. 结论

本文基于先前建立的关于图乘积的 Steiner 距离的结果，推广并证明了两个图的 corona 积和 cluster 积的 Steiner 半径，并用来自两个原始图的参数来表示它们。然后，在 F-sum 图中给出了 Steiner 距离的界，这反过来又有助于界定 F-sum 图的 Steiner 直径。以上得到的主要定理也可以应用于特殊图，并提供了简单的推论。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(12201273)；浙江省自然科学基金项目(LY21A010002)。

## 参考文献

[1] Chartrand, G., Oellermann, O.R., Tian, S., *et al*. (1989) Steiner Distance in Graphs. *Časopis Pro Pěstování Matematiky*, **114**, 399-410. https://doi.org/10.21136/CPM.1989.118395

[2] Mao, Y.P., Cheng, E. and Zhao, W. (2017) Steiner Distance in Product Networks. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, **20**, Article No. 8.

[3] Wang, Z., Mao, Y.P., Melekian, C., *et al*. (2019) Steiner Distance in Join, Corona, Cluster, and Threshold Graphs. *Journal of Information Science and Engineering*, **35**, 721-735.

[4] Mao, Y.P. (2017) The Steiner Diameter of a Graph. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **43**, 439-454.

[5] Mao, Y.P., Melekian, C. and Cheng, E. (2018) A Note on the Steiner (n-k)-Diameter of a Graph. *International Journal

*of Computer Mathematics Computer Systems Theory*, **3**, 41-46. https://doi.org/10.1080/23799927.2018.1441186

[6] Wang, Z., Mao, Y.P., Li, H.Z. and Ye, C.F. (2018) On the Steiner 4-Diameter of Graphs. *Journal of Interconnection Networks*, **18**, Article ID: 1850002. https://doi.org/10.1142/S0219265918500020

[7] Oellermann, O.R. and Tian, S. (2010) Steiner Centers in Graphs. *Journal of Graph Theory*, **14**, 585-597. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140510

[8] Eliasi, M. and Taeri, B. (2009) Four New Sums of Graphs and Their Wiener Indices. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 794-803. https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.07.001

[9] Ashrafi, A.R., Hamzeh, A. and Hossein-Zadeh, S. (2011) Computing Zagreb, Hyper-Wiener and Degree-Distance Indices of Four New Sums of Graphs. *Carpathian Journal of Mathematics*, **27**, 153-164. https://doi.org/10.37193/CJM.2011.02.13

[10] Kuziak, D., Yero, I.G. and Rodriguez-Velazquez, J.A. (2013) On the Strong Metric Dimension of Corona Product Graphs and Join Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 1022-1027. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.10.009

[11] Feng, M. and Wang, K. (2014) Identifying Codes of Corona Product Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **169**, 88-96. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.12.017

[12] An, M., Xiong, L. and Das, K.C. (2014) Two Upper Bounds for the Degree Distances of Four Sums of Graphs. *Filomat*, **28**, 579-590. https://doi.org/10.2298/FIL1403579A

[13] Feng, M. and Kong, Q. (2018) On the Fractional Metric Dimension of Corona Product Graphs and Lexicographic Product Graphs. *ARS Combinatoria*: *An Australian Canadian Journal of Combinatorics*, **138**, 249-260.

[14] Aruvi, M., Joseph, J.M. and Ramganesh, E. (2021) Four New Sums of Second Hyper Zagreb Index Based on Cartesian Product. *Communications in Mathematics and Applications*, **12**, 253-262.

[15] Patil, S. and Basavanagoud, B. (2022) Generalized Four New Sums of Graphs and Their Zagreb Indices. *Discrete Mathematics*, *Algorithms and Applications*, **14**, Article ID: 2150095. https://doi.org/10.1142/S1793830921500956

[16] Agnes, V.S. (2015) Degree Distance and Gutman Index of Corona Product of Graphs. *Transactions on Combinatorics*, **4**, 11-23.

[17] 吕怡妃, 李俊, 黄达含, 陈娅红. F-sum 图的零阶 Randic 指数与边度指数[J]. 丽水学院学报, 2019, 41(2): 1-12.

[18] Liu, J.B., Imran, M., Baby, S., *et al*. (2022) Graph Indices for Cartesian Product of f-Sum of Connected Graphs. *Combinatorial Chemistry & High Throughput Screening*, **25**, 528-535. https://doi.org/10.2174/1386207324666210217143114

[19] Mao, Y.P. and Furtula, B. (2021) Steiner Distance in Chemical Graph Theory. *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **86**, 211-287.