Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1492-1507
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135152

钻石项链图N_k的点被多重集可区别的E-全染色 $(2 \le k \le 165)$

曹 静

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

利用反证法和构造具体染色的方法，讨论了钻石项链图N_k的顶点被多重集可区别的E-全染色。给出了钻石项链图N_k的相应染色方案，构造了具体的钻石项链图N_k的点被多重集可区别的E-全染色，其中$2 \le k \le 165$。

关键词

钻石项链图，多重集，E-全染色，顶点被多重集可区别的E-全染色，顶点被多重集可区别的E-全色数

E-Total Coloring of N_k Which Is Vertex-Distinguished by Multiple Sets $(2 \le k \le 165)$

Jing Cao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 23rd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

In this paper, by using the method of contradiction and the method of constructing concrete coloring, we discuss E-total coloring of N_k which is vertex-distinguished by multiple sets. The corresponding colorings of N_k are presented, and the E-total chromatic numbers of vertex-distinguished N_k with multiple sets are obtained, which $2 \le k \le 165$.

文章引用: 曹静. 钻石项链图 N_k 的点被多重集可区别的 E-全染色$(2 \le k \le 165)$ [J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1492-1507.
DOI: 10.12677/pm.2023.135152

Keywords

Diamond-Necklace, Multi-Set, E-Total Coloring, E-Total Coloring Vertex-Distinguished by Multiple Sets, E-Total Chromatic Numbers Vertex-Distinguished by Multiple Sets

1. 引言

图的点可区别正常边染色在文献[1]中提出的。文献[2]给出了完全图和星的合成的点可区别正常边色数。关于无爪 3-正则图的研究[3] [4]已经有不少，其中在文献[5]中探讨了特殊的无爪 3-正则图钻石项链图。图的点可区别 IE-全染色这一概念在文献[6]中被提出。并且点可区别 IE-全染色在文献[7] [8] [9] [10]中针对完全三部图展开研究。上述文献都是基于图的点被非多重集可区别全染色所做出的工作，而我们在本文中所提出的为图的点被多重集可区别的 E-全染色，并给出了钻石项链的染色的方案，构造了具体钻石项链 $N_k\left(2\le k\le 165\right)$ 的点被多重集可区别的 E-全染色。

设 v 是 G 的一个顶点，v 的度是点关联的边数，若对所有 $v\in$ V 都有 $d(v)=k$，则称 G 为 k-正则的。任意两个顶点都邻接的图称为完全图，将含 n 个顶点的完全图记为 K_n。特别的，K_3 称为三角形，K_4 去掉一个边称作钻石。

对于一个整数 $k\ge 2$，令 N_k 表示如下定义的连通的 3-正则图，取 k 个不交的钻石 $D_1,D_2,\cdots,D_k$，$V\left(D_i\right)=\left\{a_i,b_i,c_i,d_i\right\}$ 且 a_ib_i 是 D_i 中去掉的边。令 N_k 是由这 k 个钻石通过不交的并，并添加边 $\left\{a_ib_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,k-1\right\}$ 和 a_kb_1 构成的图。将 N_k 叫做一个 k 个钻石的钻石项链(图 1)。

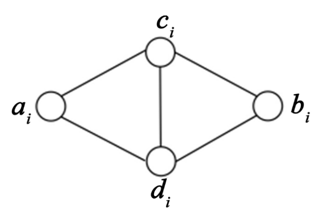

Figure 1. A diamonds
图 1. 一个钻石

图 G 的 VE-全染色是指使得每条关联边与它的端点染以不同的颜色(I 条件)的一个 VE-全染色。图 G 的 E-全染色是指使得相邻顶点染以不同色(V 条件)，每条关联边与它的端点染以不同的颜色(I 条件)的一个 E-全染色。图 G 使用了 k 种颜色的 VE-全染色叫做图 G 的 k-VE-全染色，图 G 使用了 k 种颜色的 E-全染色叫做图 G 的 k-E-全染色。若 f 为图 G 的 E-全染色。对于任意的 $x\in \mathrm{V}\left(\mathrm{G}\right)$，用 $\tilde{C}\left(x\right)$ 表示点 x 的色以及与 x 相关联的边的颜色构成的多重集。称 $\tilde{C}\left(x\right)$ 为点 x 的多重色集合或色集合。显然有 $\left|\tilde{C}\left(x\right)\right|=d_G\left(x\right)+1$，其中，$d_G\left(x\right)$ 表示图 G 中点 x 的度。若对任意的 $u,v\in \mathrm{V}$，$u\ne v$，总有 $\tilde{C}\left(u\right)\ne\tilde{C}\left(v\right)$，则称 f 是点被多重色集合可区别的。

将 $\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(G\right)$ 称为图 G 的点被多重集可区别的 E-全色数，$\tilde{\chi}_{vt}^{ve}\left(G\right)$ 称为图 G 的点被多重集可区别的 VE-全色数。$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(G\right)$ = min{k|G 存在点被多重集可区别的 k-E-全染色}。$\tilde{\chi}_{vt}^{ve}\left(G\right)$ = min{k|G 存在点被多重色

集合可区别的 k-VE-全染色}。

设图 G 中存在使用了 l 种色的点被多重色集合可区别的 E-全染色，n_i 为 i 度点的个数，A_j 为从 l-1 种颜色里有重复的取出 $i+1$ 种颜色使 j 只出现 1 次的组合，$j=1,2,3,\cdots,l$。其中 $|A_j|$ 为从 l-1 种颜色里有重复的取出 i 种颜色的组合的个数。

设 $\tilde{\eta}(G)$ 表示满足下面两条件对一切使得 $\delta \le i \le \Delta$ 的 i 都成立的正整数 l 的最小值，分为以下两个情形：

情形 1 $l \ge i+2$。

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{i+1}|\\&=\binom{l-1}{1}\binom{l+i-2}{i}-\binom{l-1}{2}\binom{l+i-4}{i-1}+\binom{l-1}{3}\binom{l+i-6}{i-3}+\cdots\\&\quad+(-1)^i\binom{l-1}{i-1}\binom{l-i+2}{2}+(-1)^{i+1}\binom{l-1}{i+1}\binom{l-i-3}{0}\ge n_i;\end{aligned}$$

情形 2 $l \le i+1$。

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{l-2}|\\&=\binom{l-1}{1}\binom{l+i-2}{i}-\binom{l-1}{2}\binom{l+i-4}{i-1}+\binom{l-1}{3}\binom{l+i-6}{i-3}+\cdots\\&\quad+(-1)^{l-2}\binom{l-1}{l-3}\binom{i-l+6}{i-l+4}+(-1)^{l-1}\binom{l-1}{l-2}\binom{i-l+3}{i-l+3}\ge n_i;\end{aligned}$$

命题 1 $\tilde{\chi}_{vt}^{e}(G) \ge \tilde{\chi}_{vt}^{ve}(G) \ge \tilde{\eta}(G)$。

2. 准备工作

以下定义十一种剖分：

设 N_p 是一个点被多重集可区别的 q-E-全染色 f_p 的 p 阶钻石项链，其 q 种颜色是 $1,2,\cdots,q$。

O_1 型剖分运算：设 i,j,s,h,t 是五种互不相同的颜色，$i,j,s,t,h \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且{$i,t,j,j$}，{$j,t,i,i$}{$i,j,s,t$}，{$i,j,h,t$}均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合，所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次[$i,j,s,h;t$]-O_1 型剖分运算是指将 N_p 按照图 2 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

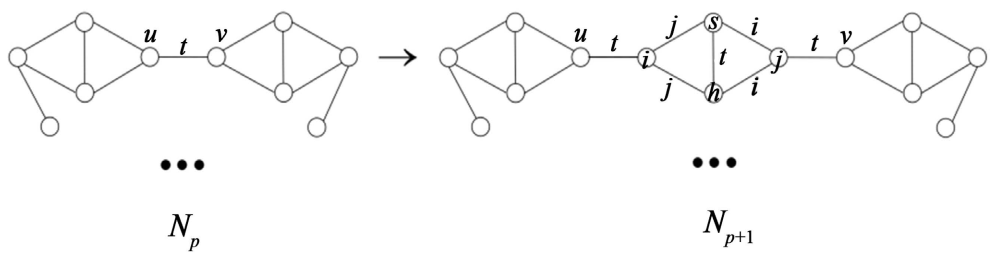

Figure 2. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 2. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

O_2 型剖分运算：设 i,j,s,h,t,r 是六种互不相同的颜色，$i,j,s,h,t,r \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且{$i,r,t,t$},{$j,r,t,t$}{$s,r,t,t$},{$h,r,t,t$}均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次[$i,j,s,h;r,t$]-O_2 型剖分是指将 N_p 按照图 3 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

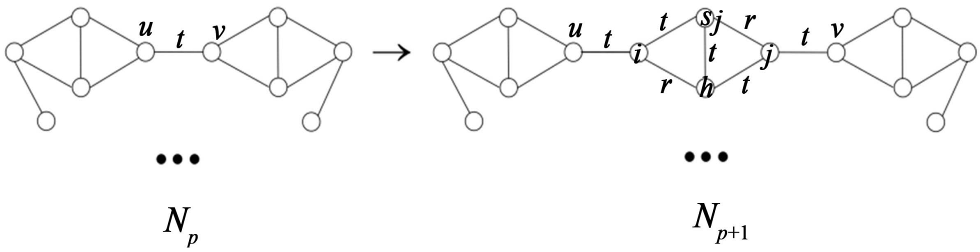

Figure 3. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 3. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

O_3 型剖分运算：设 i,j,s,h,t 是五种互不相同的颜色，$i,j,s,h,t \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且$\{i,t,j,j\}$，$\{j,t,i,i\}\{i,j,s,t\}$，$\{i,j,s,h\}$均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次$[i,j,s,h;t]$- O_3 型剖分是指将 N_p 按照图 4 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

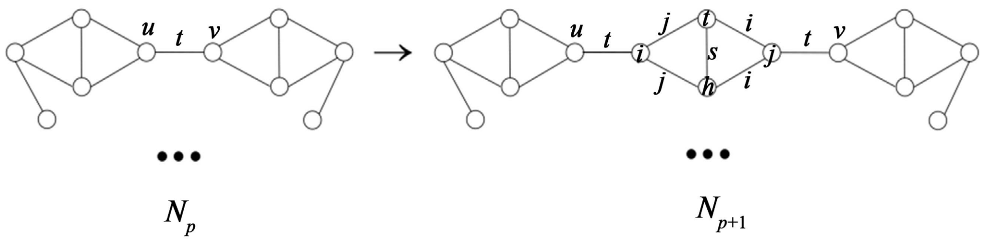

Figure 4. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 4. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

O_4 型剖分运算：设 i,j,s,h,r 是五种互不相同的颜色，$i,j,s,h,r,t \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且$\{i,t,j,j\}$，$\{i,t,r,r\}$，$\{s,r,i,j\}$，$\{h,r,i,j\}$均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次$[i,s,h;j,r,t]$-O_4 型剖分是指将 N_p 按照图 5 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

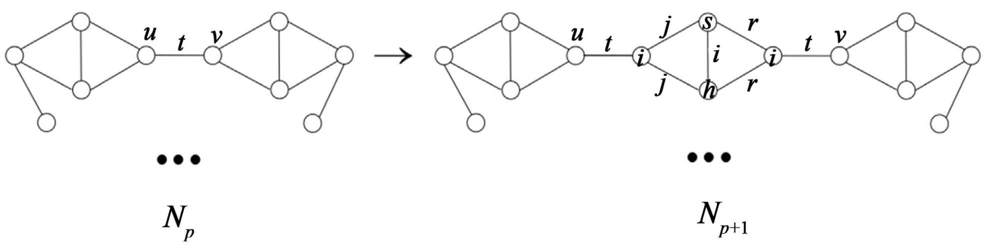

Figure 5. Type O_4 subdivision operation
图 5. O_4 型剖分运算

O_5 型剖分运算：设 $i,j,s,h,$ 是四种互不相同的颜色，$i,j,s,h,r,t \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且$\{i,t,j,j\}$，$\{j,t,i,i\}\{s,r,i,j\}$,$\{h,r,i,j\}$均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次$[i,j,s,h;r,t]$- O_5 型剖分是指将 N_p 按照图 6 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

O_6 型剖分运算：设 $i,j,s,h,$ 是四种互不相同的颜色，$i,j,s,h,m,n,r,t \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且$\{i,t,r,m\}$，$\{j,t,r,m\}\{s,r,m,n\}$，$\{h,r,m,n\}$均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次$[i,j,s,h;m,n,r,t]$- O_6 型剖分是指将 N_p 按照图 7 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程。

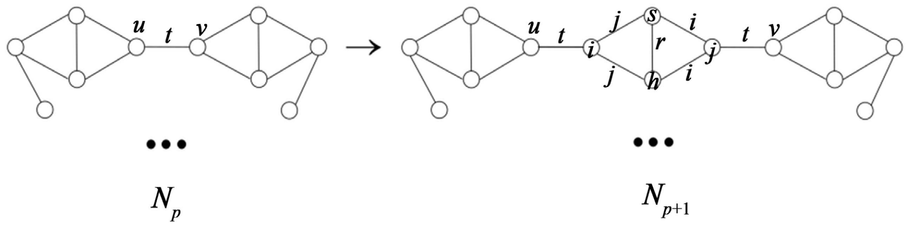

Figure 6. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 6. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

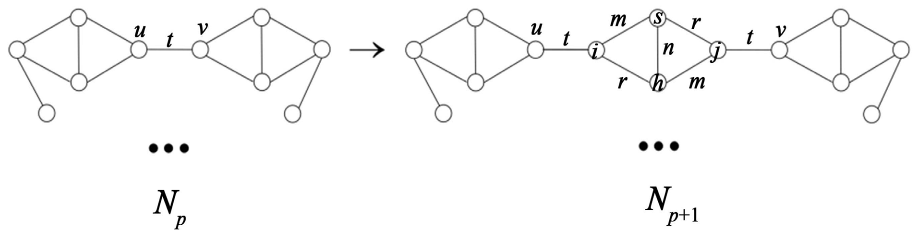

Figure 7. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 7. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

S_1 型剖分运算：设 i,j,s,h,m,n,r,t 是八种互不相同的颜色 $i,j,s,h,m,n,r,t\in\{1,2,3,\cdots,q\}$。且 $\{i,t,t,t\}$，$\{i,s,t,t\}$，$\{i,h,t,t\}$，$\{i,j,t,t\}$，$\{j,t,r,r\}$，$\{r,t,i,i\}$，$\{m,i,t,r\}$，$\{n,i,t,r\}$ 均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i,j,s,h,m,n;r,t]$-S_1 型剖分是指将 N_p 按照图 8 所示的方法变成 N_{p+2} 的过程。

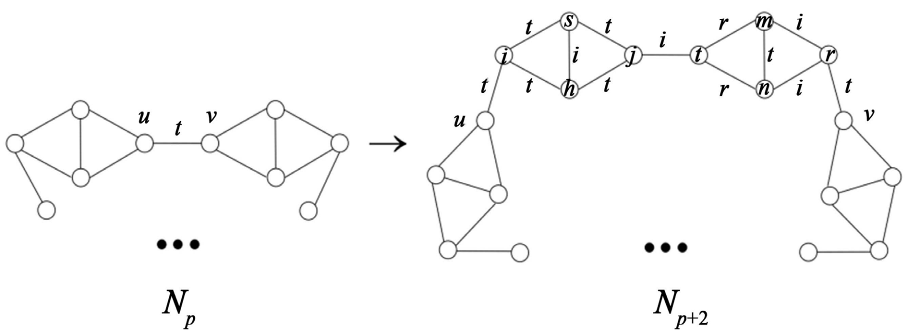

Figure 8. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not r
图 8. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 r

S_2 型剖分运算：设 i,j,s,h,m,n,t 是七种互不相同的颜色 $i,j,s,h,m,n,t\in\{1,2,3,\cdots,q\}$。且 $\{i,t,t,t\}$，$\{s,t,t,t\}$，$\{h,t,t,t\}$，$\{i,j,t,t\}$，$\{m,i,t,t\}$，$\{j,t,i,i\}$，$\{n,t,i,i\}$，$\{m,t,i,i\}$ 均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i,j,s,h,m,n;t]$-S_2 型剖分是指将 N_p 按照图 9 所示的方法变成 N_{p+2} 的过程。

S_3 型剖分运算：设 i,j,s,h,r,t 是六种互不相同的颜色 $i,j,s,h,r,t\in\{1,2,3,\cdots,q\}$。且 $\{i,r,r,t\}$，$\{s,r,r,t\}$，$\{h,r,r,t\}$，$\{r,j,t,t\}$，$\{r,i,t,t\}$，$\{s,r,t,t\}$，$\{h,r,t,t\}$，$\{j,t,r,r\}$ 均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i,j,s,h;r,t]$-S_3 型剖分是指将 N_p 按照图 10 所示的方法变成 N_{p+2} 的过程。

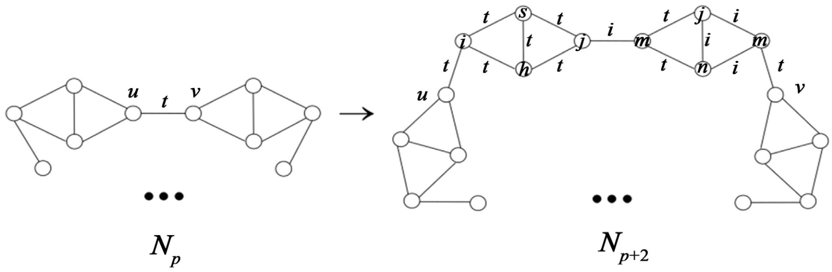

Figure 9. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not m
图 9. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 m

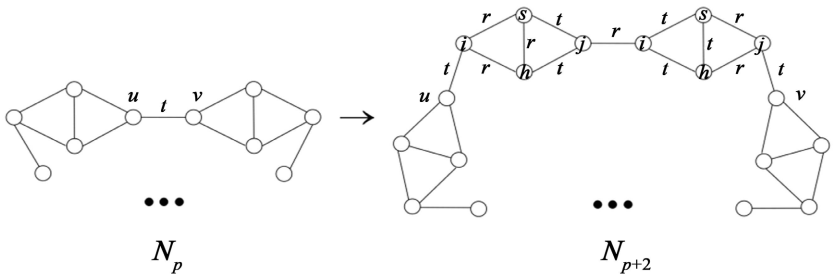

Figure 10. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 10. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

T_1 型剖分运算：设 i,j,s,t 是四种互不相同的颜色 $i,j,s,t,r \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且 $\{i,t,j,j\}$，$\{s,t,j,j\}$，$\{t,j,j,j\}$，$\{r,j,t,t\}$ 均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i,j,s,r;t]$-T_1 型剖分是指将 N_p 按照图 11 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程，其中 r 可以为 i。

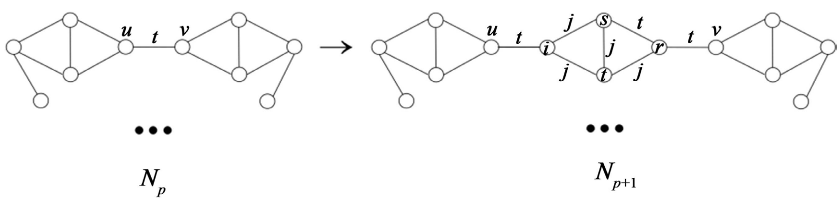

Figure 11. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not r
图 11. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 r

T_2 型剖分运算：设 i,j,s,h,t 是五种互不相同的颜色 $i,j,s,h,r,t \in \{1,2,3,\cdots,q\}$。且 $\{i,t,r,r\}$，$\{s,r,r,r\}$，$\{j,t,r,r\}$，$\{h,r,r,r\}$ 均不是 N_p 外围圈上的任意点在 f_p 下的色集合。所谓对 N_p 的染有颜色 t 的一条边 uv 实施一次 $[i,j,s,h;r,t]$-T_2 型剖分是指将 N_p 按照图 12 所示的方法变成 N_{p+1} 的过程,其中 r 可以为 t。

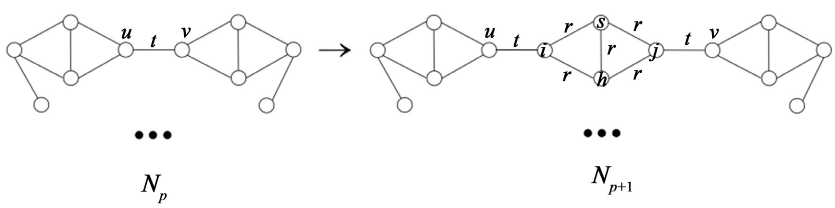

Figure 12. The color of vertex u is not i, and the color of vertex v is not j
图 12. 点 u 的色不是 i，点 v 的色不是 j

3. 主要结论及其证明

定理 1 $N_k\left(2\le k\le 165\right)$ 的点被多重集可区别的 E-全染色

$$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right)=\begin{cases}4, 2\le k\le 5;\\ 5, 6\le k\le 12;\\ 6, 13\le k\le 23;\\ 7, 24\le k\le 42;\\ 8, 43\le k\le 68\\ 9, 69\le k\le 110\\ 10, 111\le k\le 165\end{cases}$$

证明 根据命题 1 与 $N_k\left(2\le k\le 165\right)$ 的性质，$N_k\left(2\le k\le 165\right)$ 中 3 度点有 n 个，则有

$$\tilde{\eta}\left(N_k\right)=\min\left\{l\,|\binom{l-1}{1}\binom{l+1}{3}-\binom{l-1}{2}\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}\binom{l-3}{1}-\binom{l-1}{4}\ge 4k\right\};$$

$$k\le\left\lfloor\frac{\binom{l-1}{1}\binom{l+1}{3}-\binom{l-1}{2}\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}\binom{l-3}{1}-\binom{l-1}{4}}{4}\right\rfloor。$$

假设 N_k 存在点被多重集可区别的 l-E-全染色 f_k $\{1,2,\cdots,l\}$，其中一个钻石 D_i 存在点被多重集可区别的 l-E-全染色 f_k $\{1,2,\cdots,l\}$，不妨设序列：

$$\begin{aligned}f_{D_i}=\big(&f_k\left(b_{i-1}a_i\right)f_k\left(a_i\right)f_k\left(c_ia_i\right)f_k\left(d_ia_i\right),f_k\left(a_ic_i\right)f_k\left(c_i\right)f_k\left(c_id_i\right)f_k\left(c_ib_i\right),\\&f_k\left(a_id_i\right)f_k\left(d_i\right)f_k\left(c_id_i\right)f_k\left(d_ib_i\right),f_k\left(c_ib_i\right)f_k\left(b_i\right)f_k\left(d_ib_i\right)f_k\left(b_ia_{i+1}\right)\big),i=1,2,\cdots,k-1\end{aligned}$$

则 $f_k=\left(f_{D_1};f_{D_2};\cdots;f_{D_k}\right)$。

情形 1 $2\le k\le 5$。

首先证明当 $k=2$ 时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right)>3$。(尽管此时 $\tilde{\eta}\left(N_k\right)=3$，但 $\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right)>3$。)

假设 N_k 存在顶点被多重集点可区别染色的3-E-全染色 h。若一个4-子集能够成为一个顶点的色集合，必须具备“某一种颜色在该 4-子集里仅出现一次”的性质。所以能够成为顶点的色集合的 4-子集，只可能是以下 9 个子集：

{1,1,1,2}，{1,1,1,3}，{2,2,2,1}，{2,2,2,3}，{3,3,3,1}，{3,3,3,2}，{1,2,3,1}，{1,2,3,2}，{1,2,3,3}；

则 N_2 只能为以下模式：$h_2=\left(3132,3213,2312,3123;3231,3123,1321,3213\right)$。

显然 $C\left(a_1\right)=C\left(b_2\right)$，故这两点无法可区别，矛盾。

综上可得，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right)>3$。

其次，当 $3\le k\le 6$ 时，$\tilde{\eta}\left(N_k\right)=4$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right)\ge 4$。但当 $k=6$ 时，$\tilde{\eta}\left(N_k\right)>4$。

假设 N_6 存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。将能够成为一个顶点的色集合的 25 个 4-子集分为两类，一类形如 $iiij$，其中 i,j = 1,2,3,4 且 $i\ne j$ 共 12 个，剩余的 13 个 4-子集成为第二类。之后，若一个钻石存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色 g，这样的 g 可分为 A，B，C，D，E 五类模块，其中 i,j,s,t 为四种不同的颜色，模块分别为：

A 类模块由三个一类 4-子集，一个二类 4-子集组成；则 $g=(isii,itii,ijii,isir)$，其中 $r=t$ 或 j。

B 类模块由两个一类 4-子集，两类个二类 4-子集组成；则 $g=(ijii,itis,isii,sjir)$，其中 $r=s$ 或 i。

C 类模块由两个一类 4-子集，两类个二类 4-子集组成；则 $g=(isii,ijrs,itrs,siss)$，其中 $r=s$ 或 i。

D 类模块由一个一类 4-子集，三类个二类 4-子集组成；则 $g = (kthi,hjir,isii,rtim)$，其中 $r = s$ 或 $i,h = s$ 或 $i,r \neq h$，$k = i,j,s$，$m = i,j,s$，k 与 m 可以相同。

E 类模块由四个二类 4-子集组成；

再将这五个模块结合为六个钻石，最后将这六个钻石按照边 $b_{i-1}a_i$ 和边 b_ia_{i+1} 的颜色串成圈(颜色相同的可相邻，反之不可)，分为以下几个情形：

情形 1.1 包含 4 个 A 类模块，2 个 E 类模块

若 N_6 包含 4 个 A 类模块，不妨设 4 个 A 模块所用的第二类 4-子集为{1,1,2,3}，{2,2,3,4}，{1,3,3,4}，{1,3,4,4}，且剩余的 9 个 4-子集中的 4 个 4-子集可组合为 E 模块的色集合 (3213,1341,3144,1243)，故剩余{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,2,2,4}，{2,3,3,4}，{2,3,4,4}其中有 4 个 4-子集组合起来必会成为一个钻石的色集合。

若这个钻石的色集合含{1,1,2,4}，令顶点 a_6 的顶点着色为 2，a_6 外接边的颜色为 1，则顶点 b_6 的色集合需要颜色 2，颜色 4，颜色 1 皆出现一次。但{1,2,2,3}中颜色 4 不出现，{2,3,3,4}中颜色 1 不出现。

令顶点 a_6 的顶点着色为 4，a_6 外接边的颜色为 1，则顶点 c_6 的色集合只能为{1,3,2,2}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，但剩余的三个集合都不满足。

令顶点 a_6 的顶点着色为 4，a_6 外接边的颜色为 2，则顶点 c_6 的色集合只能为{1,3,2,2}，顶点 d_6 着色需满足 V 条件，并且色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 2 一次，但剩余的三个集合都不满足。

令顶点 a_6 的顶点着色为 2，a_6 外接边的颜色为 4，则顶点 c_6 的色集合只能为{1,4,2,2}，顶点 d_6 的色集合只能为{1,3,2,2}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，但剩余的两个集合都不满足。

故这个钻石的色集合不含{1,1,2,4}，因此这个钻石的色集合只能包含{1,2,2,3}，{1,2,2,4}，{2,3,3,4}，{2,3,4,4}。

若这个钻石的色集合含{1,2,2,4}，令顶点 a_6 的顶点着色为 4，a_6 外接边的颜色为 2，则顶点 c_6 的色集合只能为{1,3,2,2}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，但剩余的两个集合都不满足。

令顶点 a_6 的顶点着色为 1，a_6 外接边的颜色为 2，若顶点 c_6 的色集合为{4,2,3,3}，则顶点 d_6 的色集合只能为{2,1,3,2}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 3 一次且满足 I 条件，但{2,3,4,4}不满足上述条件。若顶点 c_6 的色集合为{4,2,3,4}，则 g = {2142,4234,2132,4324}，因 C(a_6) = {2142}，C(b_6) = {4324}，但 C(a_1) = {1311}所以无法串成圈。若顶点 c_6 的色集合为{4243}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 I 条件，但{2,3,3,4},{1,2,2,3}不满足上述条件。

令顶点 a_6 的顶点着色为 1，a_6 外接边的颜色为 4，若顶点 c_6 的色集合{2,3,1,2}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 2 一次，但剩余的两个个集合都不满足。若顶点 c_6 的色集合{2,3,2,1}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，但剩余的两个集合都不满足。若顶点 c_6 的色集合{2,4,3,3}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 3 一次且满足 I 条件，但剩余的两个集合都不满足。若顶点 c_6 的色集合{2,3,4,4}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 I 条件，但剩余的两个集合都不满足。

令顶点 a_6 的顶点着色为 4，a_6 外接边的颜色为 1，若顶点 c_6 的色集合{2,3,1,2}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 2 一次，但剩余的两个集合都不满足。若顶点 c_6 的色集合{2,3,2,1}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，但剩余的两个集合都不满足。若顶点 c_6 的色集合{2,4,3,3}，则不满足 V 条件。若顶点 c_6 的色集合{2,3,4,4}，故顶点 d_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 I 条件，但剩余的两个集合都不满足。

故在情形 1.1 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.2 包含 3 个 A 类模块，1 个 B 类模块，1 个 D 类模块，1 个 E 类模块

若 N_6 包含 3 个 A 类模块，不妨设 3 个 A 模块所用的第一类 4-子集为 $iiij$，其中 i,j = 1,2,3 且 $i \neq j$，第二类 4-子集为{1,1,2,3}，{2,2,1,3}，{1,3,3,2}。

若{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 B 模块，{4,4,4,3}与三个第二类 4-子集组合为 D 模块。B 模块的色集合不妨为{4144,4342,4244,2142}，D 模块的色集合只能为{4134,3243,4344,3143}，E 模块的色集合只能为{1412,1243,2142,3422}，之后将得到的六个模块串成一个链，但因 C(b_6) = {3143}，但 C(a_1) = {1311}所以无法串成圈。

若{4,4,4,1}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 B 模块，{4,4,4,2}与三个第二类 4-子集组合为 D 模块。B 模块的色集合不妨为{3134,3244,4344,4144}，D 模块的色集合只能为{4124,2342,4244,2142}，E 模块的色集合只能为{1413,1342,3143,2433}，之后将得到的六个模块串成一个链，但因 C(b_6) = {2142}，但 C(a_1) = {1311}所以无法串成圈。

若{4,4,4,2}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 B 模块，{4,4,4,1}与三个第二类 4-子集组合为 D 模块。B 模块的色集合不妨为{4244,4143,4344,2342}，D 模块的色集合只能为{1314,1241,4144,1434}，E 模块的色集合只能为{2124,2433,4234,3142}，之后将得到的六个模块串成一个链，但因 C(a_6) = {4244}，C(b_6) = {2342}，但 C(a_1) = {1311}所以无法串成圈。

故在情形 1.2 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.3 包含 2 个 A 类模块，2 个 B 类模块，1 个 C 类模块，1 个 E 类模块

若 N_6 包含 2 个 A 类模块，不妨设 2 个 A 模块所用的第一类 4-子集为 $iiij$，其中 i,j = 1,2 且 $i \neq j$，第二类 4-子集为{1,1,2,3}，{2,2,1,3}。

只能{3,3,3,1}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为一个 B_1 模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为一个 B_2 模块，{3,3,3,4}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 C 模块。

若 C 模块的色集合为{3433,1344,2344,4344}，B_2 模块的色集合中的{1,3,4,4}，{2,3,4,4}已被使用，无法组合为 B_2 模块的色集合。

若 C 模块的色集合为{3433,1334,2334,4344}，B_1 模块的色集合中的{1,3,3,4}，{2,3,3,4}已被使用，无法组合为 B_1 模块的色集合。

C 模块的色集合有且仅有这两种，故在情形 1。3 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.4 包含 2 个 A 类模块，1 个 C 类模块，3 个 D 类模块

若 N_6 包含 2 个 A 类模块，不妨设 2 个 A 模块所用的第一类 4-子集为 $iiij$，其中 i,j = 1,2 且 $i \neq j$，第二类 4-子集为{1,1,2,3}，{2,2,1,3}。{3,3,3,4}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 C 模块。{3,3,3,1}，{3,3,3,2}，{4,4,4,1}，{4,4,4,2}从中取三个与三个第二类 4-子集组合为 D_1,D_2,D_3 模块。

若 C 模块的色集合为{3433,1344,2344,4344}，D_1 模块的色集合为{1431,1233,3133,3431}，D_2 模块的色集合为{2124,2342,4244,2144}，D_3 模块的色集合为{1431,1233,3133,3431}。剩余的第二类 4-子集为{1,1,2,4}，{2,3,3,4}，{1,2,3,4}，因{1,1,2,4}中没有颜色 3，故只能由{4,4,4,1}与上述三个子集组合。若{1,1,2,4}是 a_6 的色集合，故顶点 c_6 的色集合只能是{1,3,4,2}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次，但剩余的两个集合都不满足。若{1,1,2,4}是 c_6 的色集合，故顶点 a_6 的色集合只能是{2,3,1,4}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 4 一次，但剩余的两个集合都不满足。

故在情形 1.4 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.5 包含 2 个 A 类模块，2 个 B 类模块，2 个 D 类模块

若 N_6 包含 2 个 A 类模块，不妨设 2 个 A 模块所用的第一类 4-子集为 $iiij$，其中 i,j = 1,2 且 $i \neq j$，第

二类 4-子集为{1,1,2,3}，{2,2,1,3}。{3,3,3,1}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_1 模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_2 模块，{3,3,3,4}，{4,4,4,3}分别与三个第二类 4-子集组合为 D_1，D_2 模块。

则 B_1 的色集合为{3133,3432,3233,2133}，B_2 的色集合为{4144,4324,4244,2142}，余{1,1,2,4}，{1,2,4,4}，{1,1,3,4}，{1,3,3,4}，{1,3,4,4}，{2,2,3,4}，{1,2,3,4}与{3,3,3,4}，{4,4,4,3}组合为 D_1，D_2 模块，其中{1,1,3,4}因不满足 V 条件，故无法与其组合。则余下的六个第二类 4-子集必能与{3,3,3,4}，{4,4,4,3}组合为 D_1,D_2 模块。

若{1,3,3,4}与{3,3,3,4}组合为 D_1 模块，则 c_5 的色集合只能是{4,2,3,1}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 3 一次且满足 V 条件，但剩余的两个集合都不满足。故{1,3,3,4}无法与{3,3,3,4}组合为 D_1 模块。则剩余的 3 个含颜色“3”的 4-子集必可与{3,3,3,4}组合为 D_1 模块。

若{1,3,4,4}与{3,3,3,4}组合为 D_1 模块，则 c_5 的色集合只能是{4,2,3,1}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 3 一次且满足 V 条件，但剩余的两个集合都不满足。故{1,3,4,4}无法与{3,3,3,4}组合为 D_1 模块。

故在情形 1.5 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.6 包含 1 个 A 类模块，3 个 B 类模块，1 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若 N_6 包含 1 个 A 类模块，不妨设 1 个 A 模块的色集合{1311,1211,1411,1312}。{2,2,2,1}与{2,2,2,3}与两个第二类 4-子集组合为 B_1 模块，{3,3,3,1}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_2 模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_3 模块，{3,3,3,4}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 C 模块，{2,2,2,4}与三个第二类 4-子集组合为 D 模块。

若 C 模块的色集合为{3433,3134,3234,4344}，则 B_2 模块没有{2,3,3,4}或{1,3,3,4}，无法组合。

若 C 模块的色集合为{3433,3144,3244,4344}，则 B_3 模块没有{2,3,4,4}或{1,3,4,4}，无法组合。

C 模块的色集合有且仅有这两种，故在情形 1.6 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.7 包含 1 个 A 类模块，2 个 B 类模块，2 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若 N_6 包含 1 个 A 类模块，不妨设 1 个 A 模块的色集合{1311,1211,1411,1312}。{3,3,3,1}与{3,3,3,4}与两个第二类 4-子集组合为 B_1 模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 B_2 模块，{2,2,2,3}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{2,2,2,4}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_2 模块，{2,2,2,1}与三个第二类 4-子集组合为 D 模块。

若 C_1 模块的色集合为{2322,2123,2423,3233}，则 C_2 模块的色集合只能为{2422,2144,2344,4244}，则 B_2 模块没有{1,1,4,4}或{2,3,4,4}，无法组合。

若 C_1 模块的色集合为{2322,2133,2433,3233}，则 C_2 模块的色集合只能为{2422,2124,2324,4244}。

若 B_1 模块的色集合为{3133,3234,3433,4134}，则 B_2 模块的色集合只能为{4344,4241,4144,1341}。故{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,2,3,4}必能与{2,2,2,1}组合为 D 模块。若{1,1,2,4}必能与{2,2,2,1}组合为 D 模块，且 c_5 的色集合是{1,3,2,4}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 V 条件，{1,2,2,3}不满足。若{1,1,2,4}必能与{2,2,2,1}组合为 D 模块，且 c_5 的色集合是{1,3,2,2}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 2 两次，{1,2,3,4}不满足。故{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,2,3,4}无法与{2,2,2,1}组合为 D 模块。

若 B_1 模块的色集合为{3133,3234,3433,4133}，若 B_2 模块的色集合为{4344,4241,4144,1341}，则同上。若 B_2 模块的色集合为{4344,4241,4144,1344}，余下的子集为{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,1,3,4}必能与{2,2,2,1}组合为 D 模块，但{1,1,3,4}无颜色 2。

C_1模块的色集合有且仅有这两种，故在情形 1.7 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.8 包含 1 个 A 类模块，3 个 B 类模块，2 个 D 类模块

若 N_6 包含 1 个 A 类模块，不妨设 1 个 A 模块的色集合{1311,1211,1411,h}。h 为{1,1,2,3}或{1,1,2,4}或{1,1,3,4}。{2,2,2,1}与{2,2,2,3}与两个第二类 4-子集组合为 B_1 模块，{3,3,3,1}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_2 模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 B_3 模块，{2,2,2,4}，{3,3,3,4}，{4,4,4,3}的其中两个与两个第二类 4-子集组合为 D_1，D_2 模块。

若 B_1 模块的色集合为{2122,2423,2322,3123}，B_2 模块的色集合为{3133,3432,3233,2132}，B_3 模块的色集合为{4144,4342,4244,2142}。剩余的 4-子集中只有{1,1,2,4}，{1,2,4,4}，{1,2,3,4}含颜色 2，但{1,1,2,4}与{2,2,2,4}无法组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)，故 D 模块的色集合不包含{2,2,2,4}。同样{1,1,3,4}与{3,3,3,4}，{4,4,4,3}都无法组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)。

若 B_1 模块的色集合为{2122,2423,2322,3123}，B_2 模块的色集合为{3233,3431,3133,1231}，B_3 模块的色集合为{4144,4342,4244,2142}。因{1,1,2,4}与{2,2,2,4}无法组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)，则剩余的 4-子集中只有{1,2,2,3}，{1,2,4,4}，{2,3,3,4}，{1,2,3,4}含颜色 2。若{1,2,4,4}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合是{4,3,2,1}，故顶点 b_6 的色集合需要出现颜色 1 一次，颜色 2 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足。故 D 模块的色集合不包含{2,2,2,4}。同样{1,1,3,4}与{3,3,3,4}，{4,4,4,3}都无法组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)。{1,3,4,4}，{2,3,3,4}，{1,2,3,4}必与{4,4,4,3}组合为 D 模块，故{1,3,4,4}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合是{3,2,4,3}，故顶点 b_6 的色集合{3,1,4,2}。因此{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,2,4,4}必与{3,3,3,4}组合为 D 模块，但{1,1,2,4}，{1,2,4,4}无颜色 3。

若 B_1 模块的色集合为{2122,2423,2322,3123}，B_2 模块的色集合为{3133,3432,3233,2132}，B_3 模块的色集合为{4244,4341,4144,1241}。因{1,1,3,4}与{3,3,3,4}，{4,4,4,3}都无法组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)。剩余的 4-子集中只有{1,3,3,4}，{2,3,4,4}，{1,2,3,4}含颜色 3，可与{3,3,3,4}组合为 D 模块。故{1,3,3,4}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合是{4,2,3,4}，故顶点 b_6 的色集合{4,1,3,2}。且{1,1,3,4}不含颜色 2，因{1,2,2,4}，{1,2,4,4}可与{4,4,4,3}组合为 D 模块，但第二类 4-子集个数不足。

若 B_1 模块的色集合为{2122,2423,2322,3123}，B_2 模块的色集合为{3233,3431,3133,1231}，B_3 模块的色集合为{4244,4341,4144,1241}。剩余的 4-子集中只有{1,2,2,3}，{2,3,3,4}，{2,3,4,4}，{1,2,3,4}含颜色 3，可与{3,3,3,4}组合为 D 模块。若{1,2,2,3}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 3 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足。若{2,3,3,4}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合{3,2,4,3}，则 d_5 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 3 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足。故 D 模块的色集合不包含{3,3,3,4}。剩余的 4-子集中只有{1,2,2,4}，{1,2,4,4}，{2,3,3,4}，{2,3,4,4}，{1,2,3,4}含颜色 4，可与{4,4,4,3}组合为 D 模块。若{1,2,2,4}为 a_5 的色集合，则 c_5 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足。若{2,3,3,4}为 a_5 的色集合，且 c_5 的色集合{3,1,4,2}，则 d_5 的色集合需要出现颜色 2 一次，颜色 4 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足；若{2,3,3,4}为 a_5 的色集合，且 c_5 的色集合{3,2,4,3}，则 d_5 的色集合需要出现颜色 3 一次，颜色 4 一次且满足 V 条件，余下 4-子集不满足。因此{1,2,4,4}，{2,3,4,4}，{1,2,3,4}必能与{4,4,4,3}组合为 D 模块。则 D_1 模块的色集合为{2144,4234,4344,3142}。剩余的 4-子集{1,2,2,3}，{1,2,2,4}，{2,3,3,4}必能与{2,2,2,4}组合为 D 模块。但{2,3,3,4}无法与{2,2,2,4}组合为 D 模块(与 V 条件矛盾)。

当 B_1 模块的色集合为其他 4-子集组合时同理。故在情形 1。8 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

在只包含一个 A 类模块，分配其他三类模块的前提下，其余情形皆为第二类 4-子集个数不足以满足，故省去。

情形 1.9 包含 6 个 C 类模块

若 N_6 包含 6 个 C 类模块，只能{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{1,1,1,3}与{3,3,3,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_2 模块，{1,1,1,4}与{4,4,4,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_3 模块，{2,2,2,3}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_4 模块，{2,2,2,4}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_5 模块，{3,3,3,4}与{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 C_6 模块。

若 C_1 模块色集合{1211,1312,1412,2122}，C_2 模块色集合只能是{1311,1233,1433,3133}，C_3 模块色集合只能是{1411,1244,1344,4144}，C_4 模块色集合只能是{2322,2123,2423,3233}，但 C_5 模块色集合需 4-子集{2,2,3,4}或{1,2,4,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 C_5 模块。

若 C_1 模块色集合{1211,1322,1422,2122}同理。故在情形 1.9 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.10 包含 5 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若 N_6 包含 5 个 C 类模块，只能{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{1,1,1,3}与{3,3,3,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_2 模块，{1,1,1,4}与{4,4,4,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_3 模块，{2,2,2,3}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_4 模块，{2,2,2,4}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_5 模块，{3,3,3,4}，{4,4,4,3}其中一个与两个第二类 4-子集组合为 D 模块。

同情形 1.9，故在情形 1.10 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.11 包含 2 个 B 类模块，4 个 C 类模块

若 N_6 包含 4 个 C 类模块，只能{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{1,1,1,3}与{3,3,3,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_2 模块，{1,1,1,4}与{4,4,4,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_3 模块，{2,2,2,3}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_4 模块，{4,4,4,2}，{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 B_1 模块，但{3,3,3,4}，{2,2,2,4}无法与两个第二类 4-子集组合为 B_2 模块。(不满足 B 模块的组合条件)

故在情形 1.11 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.12 包含 1 个 B 类模块，4 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若 N_6 包含 4 个 C 类模块，只能{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{1,1,1,3}与{3,3,3,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_2 模块，{1,1,1,4}与{4,4,4,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_3 模块，{2,2,2,3}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为 C_4 模块，{4,4,4,2}，{4,4,4,3}与两个第二类 4-子集组合为 B 模块，{3,3,3,4}与{2,2,2,4}分别与两个第二类 4-子集组合为 D_1,D_2 模块。(不满足 B 模块的组合条件)

若 C_1 模块色集合{1211,1312,1412,2122}，C_2 模块色集合只能是{1311,1233,1433,3133}，C_3 模块色集合只能是{1411,1244,1344,4144}，C_4 模块色集合只能是{2322,2123,2423,3233}，但 B 模块色集合需 4-子集{1,2,4,4}或{1,3,4,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 B 模块。

若 C_1 模块色集合{1211,1322,1422,2122}，若 C_2 模块色集合是{1311,1213,1413,3133}，C_3 模块色集合只能是{1411,1244,1344,4144}，C_4 模块色集合只能是{2322,2133,2433,3233}，但 B 模块色集合需 4-子集{1,2,4,4}或{1,3,4,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 B 模块。若 C_2 模块色集合是{1311,1233,1433,3133}且 C_3 模块色集合是{1411,1214,1314,4144}，但 C_4 模块色集合需 4-子集{1,2,2,3}或{1,2,3,3}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 C_4 模块。若 C_2 模块色集合是{1311,1233,1433,3133}且 C_3 模块色集合是{1411,1244,1344,4144}，但 C_4 模块色集合需 4-子集{1,2,2,3}或{1,2,3,3}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 C_4 模块。

故在情形 1.12 中 N_6 不存在顶点被多重集点可区别染色的 4-E-全染色。

情形 1.13 包含 2 个 B 类模块，3 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若 N_6 包含 3 个 C 类模块，不妨设{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C_1 模块，{1,1,1,3}

与{3,3,3,1}与两个第二类4-子集组合为C_2模块，{1,1,1,4}与{4,4,4,1}与两个第二类4-子集组合为C_3模块，{2,2,2,3}，{2,2,2,4}；{3,3,3,2}，{3,3,3,4}；{4,4,4,2}，{4,4,4,3}其中取两组与两个第二类 4-子集组合为B_1,B_2模块，再从余下的一组中取一个与两个第二类4-子集组合为D模块。

若C_1模块色集合{1211,1322,1422,2122}，若C_2模块色集合是{1311,1213,1413,3133}，C_3模块色集合只能是{1411,1244,1344,4144}，若取{2,2,2,3}，{2,2,2,4}与两个第二类 4-子集组合为B_1模块，但B_1模块色集合需 4-子集{1,2,2,3}或{1,2,2,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 B_1 模块。若取{4,4,4,2},{4,4,4,3}；与两个第二类 4-子集组合为B_1模块，但B_1模块色集合需 4-子集{1,2,4,4}或{1,3,4,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为B_1模块，则无法组合有两个B模块。

若C_1模块色集合{1211,1322,1422,2122}，若C_2模块色集合是{1311,1213,1413,3133}，C_3模块色集合只能是{1411,1244,1344,4144}，同理，无法组合有两个B模块。若C_2模块色集合是{1311,1233,1433,3133}且C_3模块色集合是{1411,1214,1314,4144},若取{2,2,2,3}，{2,2,2,4}与两个第二类 4-子集组合为B_1模块，但 B_1模块色集合需 4-子集{1,2,2,3}或{1,2,2,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 B_1模块。若取{3,3,3,2},{3,3,3,4}；与两个第二类 4-子集组合为B_1模块，但B_1模块色集合需 4-子集{1,3,3,4}或{1,2,3,3}，上述两个子集都已使用，故无法组合为 B_1 模块，则无法组合有两个 B 模块。若 C_2 模块色集合是{1311,1233,1433,3133}且C_3模块色集合是{1411,1244,1344,4144}，同理，无法组合有两个B模块。

故在情形1.13中N_6不存在顶点被多重集点可区别染色的4-E-全染色。

情形 1.14 包含 4 个 B 类模块，1 个 C 类模块，1 个 D 类模块

若N_6包含 1 个 C 类模块，不妨设{1,1,1,2}与{2,2,2,1}与两个第二类 4-子集组合为 C 模块，{1,1,1,3}与{1,1,1,4}与两个第二类4-子集组合为B_1模块，{2,2,2,3}与{2,2,2,4}与两个第二类4-子集组合为B_2模块，{3,3,3,1}与{3,3,3,2}与两个第二类 4-子集组合为B_3模块，{4,4,4,1}与{4,4,4,2}与两个第二类 4-子集组合为B_4模块，{3,3,3,4}，{4,4,4,3}其中取一个与三个第二类4-子集组合为D模块。

若C模块色集合{1211,1312,1412,2122}，B_1模块色集合需4-子集{1,1,2,3}或{1,1,2,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为B_1模块。

若C模块色集合{1211,1322,1422,2122}，B_2模块色集合需4-子集{1,2,2,3}或{1,2,2,4}，上述两个子集都已使用，故无法组合为B_2模块。

故在情形1.14中N_6不存在顶点被多重集点可区别染色的4-E-全染色。

在不包含A类模块，只分配其他三类模块的前提下，其余情形皆因第二类4-子集个数不足以满足情形条件，故省去。

综上所述，当$2 \le k \le 5$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right) \ge 4$，当$k = 6$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right) > 4$。

最后给出当$2 \le k \le 5$时，N_k的点被多重集可区别的4-E-全染色。

先给N_2进行点被多重集可区别的4-E-全染色f_2。f_2 = (1311,1211,1411,1312;2422,2322,2122,2421)。

在N_2的点被多重集可区别的4-E-全染色的基础上，给N_3进行点被多重集可区别的4-E-全染色f_3。f_3 = (1311,1211,1411,1312;2422,2322,2122,2423;3213,1341,3144,1241)。

在N_3的点被多重集可区别的4-E-全染色的基础上，给N_4进行点被多重集可区别的4-E-全染色f_4。f_4 = (1311,1211,1411,1312;2422,2322,2122,2423;3213,1341,3144,1243;3433,3233,3133,3431)。

在N_4的点被多重集可区别的4-E-全染色的基础上，给N_5进行点被多重集可区别的4-E-全染色f_5。f_5 = (1311,1211,1411,1312;2422,2322,2122,2423;3213,1341,3144,1243;3133,3233,3433,3134;4244,4144,4344,4241)。

余{1,2,2,3}，{1,1,2,4}，{1,2,2,4}，{2,3,4,4}，{2,3,3,4}。

通过上述方式就可得出当$2 \le k \le 5$时，N_k的点被多重集可区别的4-E-全染色。

情形 2 当$6 \le k \le 12$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}\left(N_k\right) = 5$。

当$6 \le k \le 13$，$\tilde{\eta}(N_k)=5$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 5$。但当$k=13$时，$\tilde{\eta}(N_k)>4$。证明与当$k=6$时类似，故省去。

当$6 \le k \le 12$，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 5$。故$l=5$时，在$N_5$的点被多重集可区别的 4-E-全染色的基础上，进行如下过程：

[5,4,2,3,3,4;2,1]-S_1型剖分运算，[5,3,4,2;1]-O_3型剖分运算，[3,2,4,3;5]-T_1型剖分运算，[4,3,2,4;5]-T_1型剖分运算，[2,4,3,2;5]-T_1型剖分运算，[1,2,3,4;5,5]-T_2型剖分运算，余{1,1,4,5},{1,4,4,5}。

情形 3 当$13 \le k \le 23$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)=6$。

当$14 \le k \le 26$，$\tilde{\eta}(N_k)=6$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 6$。但当$k=24$、25、26 时，$\tilde{\eta}(N_k)>6$。证明与当$k=6$时类似，故省去。

当$13 \le k \le 23$，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 6$故$l=6$时，在$N_{12}$的点被多重集可区别的 5-E-全染色的基础上，进行如下过程：

[6,4,2,3,4,5;3,1]-S_1型剖分运算，[6,5,3,4,4,5;3,2]-S_1型剖分运算，[6,2,3,5;1]-O_1型剖分运算，[6,4,2,5;1]-O_1型剖分运算，[6,4,5,3;2]-O_3型剖分运算，[4,3,5,4;6]-T_1型剖分运算，[3,5,4,3;6]-T_1型剖分运算，[2,6,1,2;5]-T_1型剖分运算，[1,2,3,4;6,6]-T_2型剖分运算，余{1,1,5,6}，{1,5,5,6}。

情形 4 当$24 \le k \le 42$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)=7$。

当$27 \le k \le 45$，$\tilde{\eta}(N_k)=7$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 7$。但当$k=43$、44、45 时，$\tilde{\eta}(N_k)>7$。证明与当$k=6$时类似，故省去。

当$24 \le k \le 42$，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 7$。故$l=7$时，在$N_{23}$的点被多重集可区别的 6-E-全染色的基础上，进行如下过程：

令i依次为 1,2,3 进行[7,$i+3$,$i+1$,$i+2$,5,6;4,i]-S_1型剖分运算。

令j依次为1,2令i依次为$j+1, j+2,\cdots,3$进行[7,i,$i+1$,6;j]-O_1型剖分运算，令i依次为1,2进行[7,5,3,6;i] -O_1型剖分运算，[7,5,6,4;3]-O_3型剖分运算。

再进行[5,4,6,5;7]-T_1型剖分运算，[6,5,4,6;7]-T_1型剖分运算，[4,6,5,4;7]-T_1型剖分运算，[2,3,5,6;7,6]-T_2型剖分运算，[1,2,3,4;7,7]-T_2型剖分运算，[7,4,5;1,2,6]-O_4型剖分运算，[7,6,2,3;6,1]-O_5型剖分运算，余{1,1,5,7}。

情形 5 当$43 \le k \le 68$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)=8$。

当$46 \le k \le 73$，$\tilde{\eta}(N_k)=8$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 8$。但当$k=69,70,\ldots,73$时，$\tilde{\eta}(N_k)>8$。证明与当$k=6$时类似，故省去。

当$43 \le k \le 68$，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 8$。故$l=8$时，在$N_{41}$的点被多重集可区别的 7-E-全染色的基础上，进行如下过程：

令i依次为 1,2 进行[8,$i+3$,$i+1$,$i+2$,6,7;5,i]-S_1型剖分运算，

令j依次为 1,2,3 令i依次为$j+1, j+2,\cdots,4$进行[8,i,$i+1$,7;j]-O_1型剖分运算，令i依次为 1,2,3 进行[8,6,4,7;i]-O_1型剖分运算，之后再进行[8,6,7,5;4]-O_3型剖分运算，[8,4,6;1,2,6]-O_4型剖分运算，[8,2,5,6;3,7]-O_5型剖分运算。

再进行[6,5,7,6;8]-T_1型剖分运算，[7,6,5,7;8]-T_1型剖分运算，[5,7,6,5;8]-T_1型剖分运算，[1,2,3,4;8,8]-T_2型剖分运算，[7,4,5,6,3,2;8]-S_2型剖分运算，

最后$f_{D_{68}}=(7833,3518,3618,8187)$。

余{1,1,5,8}，{1,1,7,8}，{1,2,5,8}，{1,7,7,8}。

情形 6 当$69 \le k \le 110$时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)=9$。

当 $74 \le k \le 112$，$\tilde{\eta}(N_k)=9$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 9$。但当 k = 111、112 时，$\tilde{\eta}(N_k)>9$。证明与当 $k=6$ 时类似，故省去。

当 $69 \le k \le 110$，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)\ge 9$。故 $l=9$ 时，在 N_{68} 的点被多重集可区别的 8-E-全染色的基础上，进行如下过程：

令 i 依次为 1,2,3,4,5 进行[9,i+3,i+1,i+2,7,8;6,i]-S_1 型剖分运算，

令 j 依次为 1,2,3,4，令 i 依次为 $j+1, j+2,\cdots,5$ 进行[9,i,i+1,8;j]-O_1 型剖分运算，令 i 依次为 1,2,3,4，进行[9,7,5,8;i]-O_1 型剖分运算，之后再进行[9,7,8,6;5]-O_3 型剖分运算，[9,4,5;2,1,6]-O_4 型剖分运算，[9,6,7;2,1,8]-O_4 型剖分运算，[9,5,7;3,2,7]-O_4 型剖分运算，[9,6,7;4,3,8]-O_4 型剖分运算，[9,1,5,6;1,8]-O_5 型剖分运算，[6,7,4,5;1,2,9,2]-O_6 型剖分运算，[5,7,2,3;1,6,9,3]-O_6 型剖分运算，[6,8,5,7;2,4,9,2]-O_6 型剖分运算。

再进行[7,6,8,7;9]-T_1 型剖分运算，[8,7,6,8;9]-T_1 型剖分运算，[6,8,7,6;9]-T_1 型剖分运算，[4,2,3,5;8,9]-S_3 型剖分运算，

[1,2,3,4;9,9]-T_2 型剖分运算，[5,6,7,8;9,9]-T_2 型剖分运算。

余{1,1,7,9}，{1,8,8,9}，{1,4,6,9}，{1,4,7,9}。

{1,1,7,9} 与情形 4 所余子集{1,1,5,7}，情形 5 所余子集{1,1,5,8},{1,1,7,8}组合，可得 $f_{D_{109}}=(1517,1718,7911,8511)$，{1,4,6,9},{1,4,7,9}与情形 1 所余子集{1,1,4,5},{1,4,4,5}组合，可得 $f_{D_{110}}=(5411,1694,1794,4145)$，最终余{1,8,8,9}。

情形 7 当 $111 \le k \le 165$ 时，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)=10$。

当 $111 \le k \le 165$，$\tilde{\eta}(N_k)=10$，则由命题 1，$\tilde{\chi}_{vt}^{e}(N_k)>10$。故 l=10 时，在 N_{110} 的点被多重集可区别的 9-E-全染色的基础上，进行如下过程：

令 i 依次为 1,2,3,4,5,6 进行[10,i+3,i+1,i+2,8,9;7,i]-S_1 型剖分运算，

令 j 依次为 1,2,3,4,5 令 i 依次为 $j+1, j+2,\cdots,6$ 进行[10,i,i+1,9;j]-O_1 型剖分运算，令 i 依次为 1,2,3,4,5 进行[10,8,6,9;i]-O_1 型剖分运算，之后再进行[10,8,9,7;6]-O_3 型剖分运算，[5,8,7,6;10,1]-O_2 型剖分运算，[10,7,8;2,1,9]-O_4 型剖分运算，[10,5,6;3,2,7]-O_4 型剖分运算，[10,6,8;4,3,8]-O_4 型剖分运算，[10,7,8;5,4,9]-O_4 型剖分运算，[5,6,7,8;3,1,10,1]-O_6 型剖分运算，[7,8,2,4;1,6,10,4]-O_6 型剖分运算，[6,8,4,5;2,7,10,4]-O_6 型剖分运算，[6,8,7,9;2,3,10,2]-O_6 型剖分运算，

再进行[8,7,9,8;10]-T_1 型剖分运算，[9,8,7,9;10]-T_1 型剖分运算，[7,9,8,7;10]-T_1 型剖分运算，[6,9,8,7;10]-T_1 型剖分运算，令 i 依次为 1,4 进行[i,i+1,i+2,i+3;10,10]-T_2 型剖分运算，[10,9,3,5;9,4]-O_5 型剖分运算，最后 $f_{D_{160}}=(10299,931010,91109,102910)$，$f_{D_{161}}=(91033,37510,38510,101109)$。

余{3,4,7,10}，{2,5,8,10}，{1,2,4,10}，{1,2,5,10}，{1,5,7,10}，{1,5,8,10}，其中{2,5,8,10}与情形 5 所余子集{1,2,5,8}，情形 6 所余子集{1,8,8,9}，情形 1 所余子集{1,2,2,3}组合，可进行[9,3,5,10;1]-O_3 型剖分运算，{1,2,4,10}，{1,2,5,10}与情形 1 所余子集{1,1,2,4}，{1,2,2,4}组合，可进行[2,1,10,5;4]-O_3 型剖分运算，{1,5,7,10}，{1,5,8,10}与情形 1 所余子集{1,1,5,6}，{1,5,5,6}组合，可进行[5,1,7,8;10,6]-O_5 型剖分运算。余{3,4,7,10}，{2,3,4,4}，{2,3,3,4}，{1,7,7,8}。

将情形 7 的 $f_{D_{32}}=(1755,5617,5317,7571)$ 重新与{1,7,7,8}组合，成为 $f_{D_{32}}=(1577,7817,7615,7155)$，并将 $f_{D_{31}}=(1733,3417,3617,7371)$ 与余出的{1,3,5,7}重新组合为 $f_{D_{31}}=(1733,3517,3617,7371)$，其中 $f_{D_{31}}$ 可直接通过剖分加入 N_k，此时余出子集{1,3,4,7}。将 $f_{D_6}=(1511,1251,1351,1415,5122,2315,2415,5251)$ 拆为 $f_{D_6}=(1511,1251,1351,1415)$、$f_{D_7}=(1522,2315,2145,5251)$，其中 f_{D_7} 可直接通过剖分加入 N_k，再将 $f_{D_{32}}$ 与 f_{D_6} 颜色“5”的边连在一起，此时两个钻石的左右连接边颜色都为“1”，可剖分进 N_k 的颜色为“1”边，由此余出子集{1,3,4,7}。则{3,4,7,10}，{1,3,4,7}与情形 1 所余子集{2,3,4,4}，{2,3,3,4}组合，可进行[3,4,1,10;7,2]-O_5 型剖分运算。

因此，$N_k\left(2\le k\le 165\right)$存在点被多重集可区别的 l-E-全染色。

4. 结语

根据反证法得到了$N_k\left(2\le k\le 165\right)$不存在点被多重集可区别的($l$-1)-E-全染色，因此$N_k\left(2\le k\le 165\right)$存在点被多重集可区别的 l-E-全染色。并且利用具体构造染色的方法将$N_k\left(2\le k\le 165\right)$存在点被多重集可区别的 l-E-全染色具体给出。之后，可继续利用反证法，用具体构造染色的方法对 $k\ge 166$ 进行讨论，并给出相应的染色数。

参考文献

[1] Burris, A.C. and Schelp, R.H. (1997) Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring. *Journal Graph Theory*, **26**, 73-82. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199710)26:2%3C73::AID-JGT2%3E3.0.CO;2-C

[2] 杨芳，王治文，陈祥恩，马春燕. 完全图和星的合成的点可区别正常边染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2013(5): 136-143.

[3] Michael, A. (2018) Henning and Pawaton Kaemawichanurat. Semipaired Domination in Claw-Free Cubic Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **34**, 819-844. https://doi.org/10.1007/s00373-018-1916-6

[4] Yannakakis, M. and Gavril, F. (1980) Edge Dominating Sets in Graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **38**, 364-372. https://doi.org/10.1137/0138030

[5] Michael, A. (2012) Henning and Christian Löwenstein. Locating-Total Domination in Claw-Free Cubic Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 3107-3116. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.06.024

[6] Zhang, Z.F., Qiu, P.X., Xu, B.G., *et al.* (2008) Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs. *Ars Combinatoria*, **87**, 33-45.

[7] Chen, X.E., Gao, Y.P. and Yao, B. (2013) Vertex-Distinguishing IE-Total Colorings of Complete Bipartite Graphs $K_{m,n}$ ($m<n$). *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**, 289-306. https://doi.org/10.7151/dmgt.1659

[8] 寇艳芳，陈祥恩，王治文. $K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别的 IE-全染色及一般全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(8): 53-60.

[9] 陈祥恩，马静静. $K_{4,4,p}$ 的点可区别的 IE-全染色($p\ge 1008$) [J]. 电子与信息学报, 2020, 42(12): 3068-3073.

[10] 闫瑞敏，陈祥恩. $K_{5,5,p}$ 的点可区别的 IE-全染色($p\ge 2028$) [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2022(2): 16-23.