Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1516-1527
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135154

三维黏弹性相分离模型的局部强解

于皓月

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文给出了三维黏弹性相分离模型的局部强解，利用了Nirenberg不等式、Sobolev嵌入定理及能量估计等。

关键词

黏弹性相分离，局部解，能量估计

Local Strong Solution of 3D Viscoelastic Phase Separation Model

Haoyue Yu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 23rd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

In this paper, the local strong solution of the three-dimensional viscoelastic phase separation model is given by using Nirenberg inequality, Sobolev embedding theorem and energy estimation.

Keywords

Viscoelastic Phase Separation, Local Solution, Energy Estimation

文章引用: 于皓月. 三维黏弹性相分离模型的局部强解[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1516-1527.
DOI: 10.12677/pm.2023.135154

1. 引言

本文考虑黏弹性相分离模型

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\cdot\nabla\phi=div\left(n^2(\phi)\nabla\mu\right)-div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\cdot\nabla q=-\frac{1}{\tau(\phi)}q+A(\phi)\Delta\left(A(\phi)q\right)-A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)+\varepsilon_1\Delta q, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=div\left(\eta(\phi)Du\right)-\nabla p+\nabla\phi\mu, \tag{1.3}$$

$$\mu=-c_0\Delta\phi+F'(\phi), \tag{1.4}$$

$$div\ u=0, \tag{1.5}$$

方程组(1.1)~(1.5)是在$(0,T)\times\Omega$上，其中$\Omega\subset\mathbb{R}^3$，为有界区域且是充分光滑的。此模型具有初值和边界条件

$$(\phi,q,u)\big|_{t=0}=(\phi_0,q_0,u_0),\partial_n\phi\big|_{\partial\Omega}=\partial_n\Delta\phi\big|_{\partial\Omega}=\partial_n q\big|_{\partial\Omega}=0,u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{1.6}$$

其中，ϕ为聚合物分子的体积分数，$q\mathrm{I}$为聚合物相互作用产生的体应力，u为由溶剂速度和聚合物速度组成的体积平均速度。

简单二元流体的相分离过程是软物质物理学的核心现象，并且通常将混合物从高温状态淬火到低温状态来观察。对于牛顿流体，这一现象在20世纪70年代得到了很好的研究，通用的宏观模型是Hohenberg和Halperin的Cahn-Hilliard-Navier-Stokes系统[1]。如果用一个更大的组分取代混合物中的一个组分，例如聚合体，则产生的不对称性在动力学中起重要作用。Tanaka [2]引入了一个数学模型并提出了“黏弹性相分离”一词正是指受外力影响的混合物，上述的动力不对称。不幸的是，这个模型与热力学第二定律不一致。在[3]中，Zhou，Zhang，E使用热力学一致性方法重新推导了一致模型[4] [5] [6]。上述模型的关键因素是附加条件与两种多相流体的速度差有关的压力，更多的相关信息详见[7]。这种压力，后来被命名为q，是由Tanaka引入的，考虑到聚合物－溶剂混合物的分子间相互作用，并被认为是一种黏弹性现象。

黏弹性相分离可以由相场演化的Cahn-Hilliard方程、流体流动的Navier-Stokes方程和黏弹性构象张量的时间演化组成的耦合系统来描述。在本文的模型中，为了更好地进行研究，没有考虑构象张量的影响。

黏弹性相分离模型是新推导出来的模型，目前已知的结论较少，其中包括三维整体弱解及其弱强唯一性[8]，还得到了二维整体弱解的存在性及其相关结果[9]，参考[10]中解的正则性的有关理论及更多相关研究[11] [12] [13]，得到了黏弹性相分离模型的三维局部强解。在一般的初值情况下，得不到此模型的三维整体强解，因此我们的三维局部强解是较优的结果。若对此模型进行更加深入的研究，可以在此基础上，考虑其正则性准则。

引理 1.1 设u,a,b,k为J中的非负连续函数，$J=[\alpha_1,\beta_1]$，设$p>1$且为一个常数。假设a/b在J中不减小，且

$$u(t)\le a(t)+b(t)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}k(s)u^p(s)\mathrm{d}s,\quad t\in J \tag{1.7}$$

就有

$$u(t)\le a(t)\left\{1-(p-1)\int_{\alpha_1}^{\beta_1}k(s)b(s)a^{p-1}(s)\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{1-p}},\quad \alpha\le t\le\beta_p, \tag{1.8}$$

其中

$$\beta_p = \sup\left\{t \in J : (p-1)\int_{\alpha_1}^{t} k(s)b(s)a^{p-1}(s)\mathrm{d}s < 1\right\}. \tag{1.9}$$

利用引理 1.1，我们给出了对于方程组(1.1)~(1.5)解的局部正则性结果，即定理 1.2，本文的主要结论如下。

定理 1.2 假设初始值 $\phi_0 \in H^2(\Omega)$，$q_0 \in H^1(\Omega)$，$u_0 \in H^1(\Omega)$，那么对于方程组(1.1)~(1.5)的光滑解 ϕ，q，u，存在正数 T_0 和常数 C，使得对于每一个 T，满足 $0 < T < T_0$，有

$$\sup_{0<t<T}\left[\|\phi\|_{H^2} + \|q\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}\right] \le C.$$

其中 T_0 和 C 都只依赖于域 Ω，参数 α，初始值 ϕ_0 在 $H^2(\Omega)$ 中的大小及初始值 q_0，u_0 在 $H^1(\Omega)$ 中的大小。

2. 预备知识

以下将给出一些对定理及引理证明有用的定义、假设和引理。

定义 2.1 给定初始值 $(\phi_0, q_0, u_0) \in \left[H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H\right]$，四元数组 (ϕ, q, μ, u) 为方程组(1.1)~(1.5)的弱解，如果有

$$\phi \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \cap H^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

$$q \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap W^{1,4/3}\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap W^{1,4/3}(0,T;V'),$$

$$A(\phi)q, \mu \in L^{5/3}\left(0,T;W^{1,5/3}(\Omega)\right),$$

$$n(\phi)\nabla\mu - \nabla\left(A(\phi)q\right) \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

和

$$\int_\Omega \partial_t\phi\psi\mathrm{d}x + \int_\Omega (u\cdot\nabla\phi)\psi\mathrm{d}x + \int_\Omega n(\phi)\left[n(\phi)\nabla\mu - \nabla\left(A(\phi)q\right)\right]\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_\Omega \partial_t q\zeta\mathrm{d}x + \int_\Omega (u\cdot\nabla q)\zeta\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{q\zeta}{\tau(\phi)}\mathrm{d}x + \varepsilon_1\int_\Omega \nabla q\cdot\nabla\zeta\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \left[n(\phi)\nabla\mu - \nabla\left(A(\phi)q\right)\right]\cdot\nabla\left(A(\phi)\zeta\right)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_\Omega \mu\varsigma\mathrm{d}x - c_0\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\varsigma\mathrm{d}x - \int_\Omega F'(\phi)\varsigma\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_\Omega \partial_t u\cdot v\mathrm{d}x + \int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot v\mathrm{d}x - \int_\Omega \eta(\phi)Du : Dv\mathrm{d}x + \int_\Omega \phi\nabla\mu\cdot v\mathrm{d}x = 0.$$

上述方程组适用于任何检验函数 $(\psi, \zeta, \varsigma, v) \in \left[H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times V\right]$ 和几乎每一个 $t \in (0,T)$。而且，它满足上面给出的初始条件，即 $(\phi(0), q(0), u(0)) = (\phi_0, q_0, u_0)$。

假设 2.2 1) 假设 $n(s)$，$\eta(s)$，$\tau(s)$ 都为 $C^1(\mathbb{R})$ 函数，这三个函数以及它们的导数 $n'(s)$，$\eta'(s)$，$\tau'(s)$ 都为正的、有上下界的函数。

2) 假设 $A(s) \in C^2(\mathbb{R})$，它及其二阶导函数 $A''(s)$ 都为非负的、有上下界的函数，同时有 $\|A'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$。

3) 假设 $F \in C^3(\mathbb{R})$，有常数 $c_{1,i}, c_{2,i} > 0$，$i = 0,1,2,3$，同时有 $\left|F^{(i)}(x)\right| \le c_{1,i}|x|^{p-i} + c_{2,i}$，$i = 0,1,2,3$ 且 $2 \le p \le 4$。

4) 为方便起见，假设常数 ε_1 充分大，c_0 为 1。

5) Einstein 约定求和就是略去求和式中的求和号，在此规则中两个相同指标就表示求和，而不管指标

是什么字母，有时亦称求和的指标为“哑指标”，

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

引理 2.3 (Sobolev 嵌入定理)

$$\|\phi\|_{L^\infty} \le C\|\phi\|_{H^2}.$$

引理 2.4 (Nirenberg 不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为具光滑边界的有界区域，$u \in W^{m,r}(\Omega)$，则有

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p} \le C_1 \left\|D^m u\right\|_{L^r}^a \|u\|_{L^q}^{1-a} + C_2 \|u\|_{L^q},$$

其中 $\frac{j}{m} \le a < 1, \frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}$，

进一步，若 $u \in W_0^{m,r}(\Omega)$，则有

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p} \le C\left\|D^m u\right\|_{L^r}^a \|u\|_{L^q}^{1-a}.$$

3. 定理证明

在此部分，我们将给出引理 1.1 的证明，方程组(1.1)~(1.5)的解是光滑的，首先对(1.1)作用 Δ，再乘 $\Delta\phi$，结合(1.4)，在 Ω 上积分并利用分部积分，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\phi\|_2^2 + \int_\Omega n^2(\phi)\left(\Delta^2\phi\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \Delta(u\cdot\nabla\phi)\Delta\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega 2n(\phi)n'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu\Delta^2\phi \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega n^2(\phi)\Delta F'(\phi)\Delta^2\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta div\left(n(\phi)\nabla\left(A(\phi)q\right)\right)\Delta\phi \mathrm{d}x \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

对(1.2)先作用 ∇，再乘 ∇q，在 Ω 上积分并利用分部积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla q\|_2^2 + \varepsilon_1\int_\Omega |\Delta q|^2 \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \nabla(u\cdot\nabla q)\cdot\nabla q \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\left(-\frac{1}{\tau(\phi)}q\right)\cdot\nabla q \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \nabla\left(A(\phi)\Delta\left(A(\phi)q\right)\right)\cdot\nabla q \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\left(A(\phi)div\left(n(\phi)\nabla\mu\right)\right)\cdot\nabla q \mathrm{d}x \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

对(1.3)作用 $-\Delta u$，在 Ω 上积分并利用分部积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2 \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega (-\Delta u)(u\cdot\nabla u)\mathrm{d}x + \int_\Omega (-\Delta u)\eta'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla u \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_\Omega (-\Delta u)\nabla p \mathrm{d}x + \int_\Omega (-\Delta u)\nabla\phi\mu \mathrm{d}x \\
&= K_1 + K_2 + K_3 + K_4.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

接下来，将 I_1 中的 $\Delta(u\cdot\nabla\phi)$ 改写成分量形式，利用分部积分，结合(1.5)，可得到

$$\begin{aligned}
\partial_k\partial_k\left(u_i\partial_i\phi\right) &= \partial_k\left(\partial_k u_i\partial_i\phi + u_i\partial_i\partial_k\phi\right) \\
&= \partial_k^2 u_i\partial_i\phi + 2\partial_k u_i\partial_i\partial_k\phi + u_i\partial_i\partial_k^2\phi,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_\Omega \Delta u \nabla \phi \Delta \phi \mathrm{d}x - 2\int_\Omega (\partial_k u \cdot \nabla)\partial_k \phi \Delta \phi \mathrm{d}x - \int_\Omega (u\cdot\nabla)\Delta\phi\Delta\phi \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \Delta u \nabla \phi \Delta \phi \mathrm{d}x - 2\int_\Omega (\partial_k u \cdot \nabla)\partial_k \phi \Delta \phi \mathrm{d}x \\
&= I_{11} + I_{12}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

继续将 I_4 进行分部积分，整理之后可得到

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\int_\Omega n'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\big(A(\phi)q\big)\Delta^2\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega n(\phi)\Delta\big(A(\phi)q\big)\Delta^2\phi \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega n'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\big(A(\phi)q\big)\Delta^2\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega n(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\Delta^2\phi \mathrm{d}x \\
&\quad -\int_\Omega n(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta^2\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega 2n(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta^2\phi \mathrm{d}x \\
&\quad -\int_\Omega n(\phi)A(\phi)\Delta q\Delta^2\phi \mathrm{d}x \\
&= I_{41} + I_{42} + I_{43} + I_{44} + I_{45}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

接下来对 J_2 进行分部积分，可得

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_\Omega \frac{1}{\tau^2(\phi)}\tau'(\phi)\nabla\phi q \nabla q \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{1}{\tau(\phi)}|\nabla q|^2 \mathrm{d}x \\
&= J_{21} + J_{22}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

同样地，对 J_3 进行分部积分，整理之后我们可得到

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\int_\Omega A(\phi)A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\Delta q \mathrm{d}x - \int_\Omega A(\phi)A'(\phi)\Delta\phi q\Delta q \mathrm{d}x \\
&\quad -\int_\Omega 2A(\phi)A'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla q\Delta q \mathrm{d}x - \int_\Omega |A(\phi)\Delta q|^2 \mathrm{d}x \\
&= J_{31} + J_{32} + J_{33} + J_{34}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

对 J_4 也进行分部积分，整理之后可得

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \int_\Omega A(\phi)\Delta q n'(\phi)\nabla\phi\cdot\nabla\mu \mathrm{d}x - \int_\Omega n(\phi)\Delta^2\phi A(\phi)\Delta q \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega A(\phi)\Delta q n(\phi)\Delta F'(\phi)\mathrm{d}x \\
&= J_{41} + J_{42} + J_{43}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

根据(1.5)可知， K_3 为零，将 K_4 结合(1.4)可得

$$
\begin{aligned}
K_4 &= \int_\Omega \Delta u \nabla\phi\Delta\phi \mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u \nabla\phi F'(\phi)\mathrm{d}x \\
&= K_{41} + K_{42}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

接下来，我们开始对各项进行估计，结合 Hölder 不等式，Young’s 不等式，定义 2.1 和引理 2.4，对 I_{12} 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_{12} &\le C\|\nabla u\|_2 \|\Delta\phi\|_4^2 \\
&\le C\|\nabla u\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_4^4 \\
&\le C\|u\|_2\|\Delta u\|_2 + C\|\Delta^2\phi\|_2^{\frac{3}{2}}\|\Delta\phi\|_2^{\frac{5}{2}} + C\|\Delta\phi\|_2^4 \\
&\le C_\varepsilon\|u\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta u\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta^2\phi\|_2^2 + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{10} + C\|\Delta\phi\|_2^4 \\
&\le C + \varepsilon\|\Delta u\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta^2\phi\|_2^2 + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{10} + C\|\Delta\phi\|_2^4 \\
&\le C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{10}\right) + \varepsilon\|\Delta u\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta^2\phi\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

结合(1.4)，定义 2.1，假设 2.2 中 $n'(s)$ 的有界性，引理 2.3，Hölder 不等式，Young’s 不等式以及引理 2.4，我们接下来对 I_2 进行估计

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n'(\phi)\nabla\phi\nabla\mu\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega |\nabla\phi|^4 |\phi|^{2p-4} \mathrm{d}x + C\int_\Omega |\nabla\phi|^4 \mathrm{d}x + C\int_\Omega |\nabla\Delta\phi\nabla\phi|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_4^4 \|\phi\|_\infty^{2p-4} + C\|\nabla\phi\|_4^4 + C\|\nabla\Delta\phi\|_4^2 \|\nabla\phi\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + \left(C\|\Delta\phi\|_2^3\|\nabla\phi\|_2 + C\|\nabla\phi\|_2^4\right)\|\Delta\phi\|_2^{2p-4} + C\|\Delta\phi\|_2^3\|\nabla\phi\|_2 \\
&\quad + C\|\nabla\phi\|_2^4 + C\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{7}{4}}\|\Delta\phi\|_2^{\frac{1}{4}} + \|\Delta\phi\|_2^2\right)\left(\|\Delta\phi\|_2^{\frac{3}{2}}\|\nabla\phi\|_2^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\phi\|_2^2\right) \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-1} + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-4} + C\|\Delta\phi\|_2^3 + C + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 \\
&\quad + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{14} + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_2^{\frac{7}{2}} + C\|\Delta\phi\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{14}\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

根据定义 2.1，假设 2.2，引理 2.3，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 I_3 进行估计

$$\begin{aligned}
I_3 &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta F'(\phi)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)F'''(\phi)(\nabla\phi)^2\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)F''(\phi)\Delta\phi\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\phi\|_\infty^{2p-6}\|\nabla\phi\|_4^4 + C\|\nabla\phi\|_4^4 + C\|\phi\|_\infty^{2p-4}\|\Delta\phi\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-6}\|\nabla\phi\|_4^4 + C\|\nabla\phi\|_4^4 + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-4}\|\Delta\phi\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-6}\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2\|\nabla\phi\|_2^3 + \|\nabla\phi\|_2^4\right) + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2\|\nabla\phi\|_2^3 \\
&\quad + C\|\nabla\phi\|_2^4 + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-2} + C\|\Delta\phi\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{4p-12} + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-6} + C + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-2} + C\|\Delta\phi\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^6\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

通过定义 2.1，假设 2.2 中 $n(s)$、$n'(s)$ 的有界性，$\|A'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 I_4 中的第一项 I_{41} 进行估计

$$\begin{aligned}
I_{41} &\le \int_\Omega \left|n'(\phi)\nabla\phi\nabla\left(A(\phi)q\right)\Delta^2\phi\right| \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\frac{n'(\phi)}{n(\phi)}\nabla\phi\nabla\left(A(\phi)q\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\frac{n'(\phi)}{n(\phi)}A'(\phi)(\nabla\phi)^2 q + \frac{n'(\phi)}{n(\phi)}\nabla\phi A(\phi)\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|A'(\phi)\right\|_\infty^2\|\nabla\phi\|_8^4\|q\|_4^2 + C\|\nabla\phi\|_4^2\|\nabla q\|_4^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla\phi\right\|_2^{\frac{5}{2}} + \left\|\nabla\phi\right\|_2^4\right)\left(\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|q\right\|_2^{\frac{1}{2}} + \left\|q\right\|_2^2\right) \\
&\quad + C\left(\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla\phi\right\|_2^{\frac{1}{2}} + \left\|\nabla\phi\right\|_2^2\right)\left(\left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{7}{4}}\left\|q\right\|_2^{\frac{1}{4}} + \left\|q\right\|_2^2\right) \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\nabla q\right\|_2^6 + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^{12} + \varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2 + C \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1 + \left\|\nabla q\right\|_2^6 + \left\|\Delta\phi\right\|_2^{12}\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + 2\varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

根据定义 2.1，假设 2.2 中 $A''(s)$ 的有界性，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来我们对 I_4 中的第二项 I_{42} 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_{42} &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\nabla\phi\right\|_8^4\left\|q\right\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\nabla q\right\|_2^6 + C\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1 + \left\|\nabla q\right\|_2^6\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

根据定义 2.1，假设 2.2 中 $\left\|A'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来我们对 I_4 中的第三项 I_{43} 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_{43} &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A'(\phi)\Delta\phi q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|A'(\phi)\right\|_\infty^2\left\|\Delta\phi\right\|_4^2\left\|q\right\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta\phi\right\|_4^2\left\|q\right\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{4}}\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{5}{4}} + \left\|\Delta\phi\right\|_2^2\right)\left(\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|q\right\|_2^{\frac{1}{2}} + \left\|q\right\|_2^2\right) \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^2\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{12}{5}} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^4 + C\left\|\nabla q\right\|_2^3 \\
&\quad + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^4 + C\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{24}{5}} + C\left\|\nabla q\right\|_2^3 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1 + \left\|\Delta\phi\right\|_2^4 + \left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{24}{5}}\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2 中 $\left\|A'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来我们对 I_4 中的第四项 I_{44} 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_{44} &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A'(\phi)\nabla\phi\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|A'(\phi)\right\|_\infty^2 \left\|\nabla\phi\right\|_4^2 \left\|\nabla q\right\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\nabla\phi\right\|_4^2 \left\|\nabla q\right\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} \left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{7}{4}} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C\left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{7}{4}} + C \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + 2\varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^{12} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\left\|\Delta\phi\right\|_2^{12}\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

结合假设 2.2，Hölder 不等式及 Young’s 不等式，接下来我们对 I_4 中的第五项 I_{45} 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_{45} &\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta q\right\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

通过定义 2.1，分部积分公式，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 J_1 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -\int_\Omega \partial_k\left(u_i\partial_i q\right)\partial_k q\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \partial_k u_i\partial_i q\partial_k q\mathrm{d}x - \int_\Omega u_i\partial_i\partial_k q\partial_k q\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega \left|\partial_k u_i\partial_i q\partial_k q\right|\mathrm{d}x \\
&\le C\left\|\nabla u\right\|_2 \left\|\nabla q\right\|_4^2 \\
&\le C\left\|\nabla u\right\|_2 \left(\left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{1}{2}} + \left\|\nabla q\right\|_2^2\right) \\
&\le C\left\|\nabla u\right\|_2 \left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla q\right\|_2^{\frac{1}{2}} + C\left\|\nabla u\right\|_2\left\|\nabla q\right\|_2^2 \\
&\le \varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2 + C_\varepsilon\left\|\nabla u\right\|_2^4\left\|\nabla q\right\|_2^2 + C\left\|\nabla u\right\|_2\left\|\nabla q\right\|_2^2 \\
&\le \varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2 + C\left\|\nabla u\right\|_2^8 + C\left\|\nabla q\right\|_2^4 + C\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\le C\left(1+\left\|\nabla u\right\|_2^8 + \left\|\nabla q\right\|_2^4\right) + \varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

通过定义 2.1，假设 2.2，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 J_{21} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{21} &\le \varepsilon\int_\Omega \left|\sqrt{\frac{1}{\tau(\phi)}}\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\tau^3(\phi)}\left|\tau'(\phi)\right|^2\left|\nabla\phi q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\tau(\phi)}\left|\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\nabla\phi q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\tau(\phi)}\left|\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\nabla\phi\right\|_4^2\left\|q\right\|_4^2 \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\tau(\phi)}\left|\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{3}{4}} + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{1}{2}} + C\left\|\Delta q\right\|_2^{\frac{3}{4}} + C \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\tau(\phi)}\left|\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x + C + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + 2\varepsilon\left\|\Delta q\right\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2 中的 $A''(s)$ 的有界性，Hölder 不等式，Young's 不等式和引理 2.4，接下来对 J_3 中的第一项 J_{31} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{31} &\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A''(\phi)(\nabla\phi)^2 q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_8^4 \|q\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} \|\nabla q\|_2^{\frac{3}{2}} + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} + C\|\nabla q\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\|\nabla q\|_2^6 + C\|\nabla q\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\|\nabla q\|_2^6\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

根据定义 2.1，假设 2.2 中的 $\|A'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$，Hölder 不等式，Young's 不等式和引理 2.4，接下来对 J_3 中的第二项 J_{32} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{32} &\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A'(\phi)\Delta\phi q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|A'(\phi)\right\|_\infty^2 \|\Delta\phi\|_4^2 \|q\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_4^2 \|q\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_4^4 + C\|q\|_4^4 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} \|\Delta\phi\|_2^{\frac{5}{2}} + \|\Delta\phi\|_2^4\right) + C\left(\|\Delta q\|_2^{\frac{3}{2}} \|q\|_2^{\frac{5}{2}} + \|q\|_2^4\right) \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{10} + C\|\Delta\phi\|_2^4 + \varepsilon\|\Delta q\|_2^2 + C \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{10}\right) + \varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta q\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2 中的 $\|A'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le c$，Hölder 不等式，Young's 不等式和引理 2.4，接下来对 J_3 中的第三项 J_{33} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{33} &\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A'(\phi)\nabla\phi\nabla q\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|A'(\phi)\right\|_\infty^2 \|\nabla\phi\|_4^2 \|\nabla q\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_4^2 \|\nabla q\|_4^2 \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_2^{\frac{3}{2}} \|\Delta q\|_2^{\frac{7}{4}} + C\|\Delta\phi\|_2^{\frac{3}{2}} + C\|\Delta q\|_2^{\frac{7}{4}} + C \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{12} + 2\varepsilon\|\Delta q\|_2^2 + C\|\Delta\phi\|_2^{\frac{3}{2}} + C \\
&\le \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{12}\right) + 2\varepsilon\|\Delta q\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2 中 $n'(s)$ 的有界性，Hölder 不等式，Young's 不等式，引理 2.3 和引理 2.4，接下来对 J_4 中的第一项 J_{41} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{41} \le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n'(\phi)\nabla\phi\nabla\mu\right|^2 \mathrm{d}x \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\nabla\phi\right|^4 \left|\phi\right|^{2p-4} \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\nabla\phi\right|^4 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|\nabla\Delta\phi\nabla\phi\right|^2 \mathrm{d}x \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\nabla\phi\right\|_4^4 \left\|\phi\right\|_\infty^{2p-4} + C\left\|\nabla\phi\right\|_4^4 + C\left\|\nabla\Delta\phi\right\|_4^2 \left\|\nabla\phi\right\|_4^2 \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + \left(C\left\|\Delta\phi\right\|_2^3 \left\|\nabla\phi\right\|_2 + C\left\|\nabla\phi\right\|_2^4\right)\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-4} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^3 \left\|\nabla\phi\right\|_2 \\
&+ C\left\|\nabla\phi\right\|_2^4 + C\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^{\frac{7}{4}} \left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{1}{4}} + \left\|\Delta\phi\right\|_2^2\right)\left(\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{3}{2}} \left\|\nabla\phi\right\|_2^{\frac{1}{2}} + \left\|\nabla\phi\right\|_2^2\right) \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-1} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-4} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^3 + C + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 \\
&+ C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^{14} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{\frac{7}{2}} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1 + \left\|\Delta\phi\right\|_2^{14}\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

结合假设 2.2，Hölder 不等式及 Young’s 不等式，接下来对 J_4 中的第二项 J_{42} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{42} \le& \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x \\
\le& \frac{1}{12}\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta^2\phi\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta q\right\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2，Hölder 不等式，Young’s 不等式，引理 2.3 和引理 2.4，接下来对 J_4 中的第三项 J_{43} 进行估计

$$
\begin{aligned}
J_{43} \le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)\Delta F'(\phi)\right|^2 \mathrm{d}x \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)F'''(\phi)(\nabla\phi)^2\right|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega \left|n(\phi)F''(\phi)\Delta\phi\right|^2 \mathrm{d}x \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\phi\right\|_\infty^{2p-6}\left\|\nabla\phi\right\|_4^4 + C\left\|\nabla\phi\right\|_4^4 + C\left\|\phi\right\|_\infty^{2p-4}\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-6}\left(\left\|\Delta^2\phi\right\|_2\left\|\nabla\phi\right\|_2^3 + \left\|\nabla\phi\right\|_2^4\right) + C\left\|\Delta^2\phi\right\|_2\left\|\nabla\phi\right\|_2^3 \\
&+ C\left\|\nabla\phi\right\|_2^4 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-2} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C_\varepsilon\left\|\Delta\phi\right\|_2^{4p-12} + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2 + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-6} + C + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^{2p-2} + C\left\|\Delta\phi\right\|_2^2 \\
\le& \frac{1}{8}\int_\Omega \left|A(\phi)\Delta q\right|^2 \mathrm{d}x + C\left(1 + \left\|\Delta\phi\right\|_2^6\right) + 2\varepsilon\left\|\Delta^2\phi\right\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

我们结合 Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 K_1 进行估计

$$
\begin{aligned}
K_1 =& -\int_\Omega \partial_k u \partial_k u_i \partial_i u \mathrm{d}x \\
\le& C\left\|\nabla u\right\|_3^3 \\
\le& C\left\|\Delta u\right\|_2^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla u\right\|_2^{\frac{3}{2}} \\
\le& C\left\|\nabla u\right\|_2^6 + \varepsilon\left\|\Delta u\right\|_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2，Hölder 不等式，Young’s 不等式和引理 2.4，接下来对 K_2 进行估计

$$
\begin{aligned}
K_2 &\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_\Omega \left|\frac{\eta'(\phi)}{\sqrt{\eta(\phi)}}\nabla\phi\nabla u\right|^2\mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_4^2\|\nabla u\|_4^2 \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\left(\|\Delta\phi\|_2^{\frac{3}{2}}\|\nabla\phi\|_2^{\frac{1}{2}} + \|\nabla\phi\|_2^2\right)\|\Delta u\|_2^{\frac{7}{4}}\|u\|_2^{\frac{1}{4}} \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon\|\Delta u\|_2^2 + C_\varepsilon\|\Delta\phi\|_2^{12} + C \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{12}\right) + 2\varepsilon\|\Delta u\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

结合定义 2.1，假设 2.2，Hölder 不等式，Young’s 不等式，引理 2.3 和引理 2.4，接下来对 K_4 中的第二项 K_{42} 进行估计

$$
\begin{aligned}
K_{42} &\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon\int_\Omega |\nabla\phi F'(\phi)|^2\frac{1}{\eta(\phi)}\mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\int_\Omega |\nabla\phi|^2|\phi|^{2p-2}\,\mathrm{d}x + C\int_\Omega|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\|\nabla\phi\|_2^2\|\phi\|_\infty^{2p-2} + C\|\nabla\phi\|_2^2 \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\|\Delta\phi\|_2^{2p-2} + C \\
&\le \varepsilon\int_\Omega \eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x + C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^6\right).
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

将上述的估计(3.10)~(3.17)、(3.18)~(3.25)及(3.26)~(3.28)分别代入(3.1)、(3.2)及(3.3)中，再将三者相加，其中 ε 取充分小，有 C_1,C_2,C_3,C_4 为正数，可得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\phi\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla q\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_2^2 + C_1\int_\Omega n^2(\phi)\left(\Delta^2\phi\right)^2\mathrm{d}x + C_2\int_\Omega|\Delta q|^2\,\mathrm{d}x \\
&+ C_3\int_\Omega\frac{1}{\tau(\phi)}|\nabla q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_\Omega|A(\phi)\Delta q|^2\,\mathrm{d}x + C_4\int_\Omega\eta(\phi)(\Delta u)^2\,\mathrm{d}x \\
&\le C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{14} + \|\nabla q\|_2^6 + \|\nabla u\|_2^8\right),
\end{aligned}
$$

最后，我们总结出

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\phi\|_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla q\|_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_2^2 \le C\left(1+\|\Delta\phi\|_2^{14} + \|\nabla q\|_2^6 + \|\nabla u\|_2^8\right). \tag{3.29}
$$

利用上式(3.29)，我们可以得到引理 1.1，即证明完毕。

参考文献

[1] Hohenberg, P.C. and Halperin, B.I. (1977) Theory of Dynamic Critical Phenomena. *Review of Modern Physics*, **49**, 435-479. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.49.435

[2] Tanaka, H. (2000) Viscoelastic Phase Separation. *Journal of Physics*: *Condensed Matter*, **12**, R207-R264. https://doi.org/10.1088/0953-8984/12/15/201

[3] Zhou, D., Zhang, P.W. and E, W.N. (2006) Modified Models of Polymer Phase Separation. *Physical Review E*, **73**, Article ID: 061801. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.061801

[4] Elliott, C.M. and Garcke, H. (1996) On the Cahn-Hilliard Equation with Degenerate Mobility. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **27**, 404-423. https://doi.org/10.1137/S0036141094267662

[5] Grmela, M. and Öttinger, H.C. (1997) Dynamics and Thermodynamics of Complex Fluids. II. Illustrations of a General Formalism. *Physical Review E*, **56**, 6633-6655. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6633

[6] Grmela, M. and Öttinger, H.C. (1997) Dynamics and Thermodynamics of Complex Fluids. I. Development of a General Formalism. *Physical Review E*, **56**, 6620-6632. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6620

[7] Brunk, A., Dünweg, B., Egger, H., Habrich, O., Lukacova-Medvidova, M. and Spiller, D. (2021) Analysis of a Viscoelastic Phase Separation Model. *Journal of Physics*: *Condensed Matter*, **33**, Article 234002. https://doi.org/10.1088/1361-648X/abeb13

[8] Brunk, A. (2022) Existence and Weak-Strong Uniqueness for Global Weak Solutions for the Viscoelastic Phase Separation Model in Three Space Dimensions. ArXiv: 2208.01374v1 [math.AP].

[9] Brunk, A. and Lukacova-Medvidova, M. (2022) Global Existence of Weak Solutions to Viscoelastic Phase Separation: Part I. Regular Case. ArXiv: 1907.03480v3 [math.AP].

[10] Cimrák, I. (2007) Existence, Regularity and Local Uniqueness of the Solutions to the Maxwell-Landau-Lifshitz System in Three Dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **329**, 1080-1093. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.080

[11] Guo, B. and Su, F. (1997) Global Weak Solution for the Landau-Lifshitz-Maxwell Equation in Three Space Dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **211**, 326-346. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5467

[12] Guo, B. and Su, F. (2001) The Global Solution for Landau-Lifshitz-Maxwell Equations. *Journal of Partial Differential Equations*, **14**, 133-148.

[13] Alouges, F. and Jaisson, P. (2006) Convergence of a Finite Element Discretization for the Landau-Lifshitz Equations in Micro-Magnetism. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **16**, 299-316. https://doi.org/10.1142/S0218202506001169