**Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1528-1547**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135155

Hans汉斯

# 关于一类特殊 $3\times3$ 块鞍点系统解的结构向后误差分析

**邢嘉璐**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

## 摘 要

近年来，一类特殊的 $3\times3$ 块鞍点系统被广泛应用于一些物理问题中。为了便于测试实际数值算法的稳定性，本文对这种类型的 $3\times3$ 块鞍点系统进行了结构向后误差分析，并给出了结构向后误差的可计算的具体公式。基于结构向后误差，我们进行了数值实验。数值实验结果表明该表达式可用于检验实际算法的稳定性。

## 关键词

$3\times3$ 块鞍点问题，向后误差，结构向后误差

# Structured Backward Error Analysis on a Special Class of Block Three-by-Three Saddle Point Systems

**Jialu Xing**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. $23^{rd}$, 2023; accepted: May $24^{th}$, 2023; published: May $31^{st}$, 2023

文章引用: 邢嘉璐. 关于一类特殊 $3\times3$ 块鞍点系统解的结构向后误差分析[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1528-1547.
DOI: 10.12677/pm.2023.135155

## Abstract

**In recent years, a special class of block three-by-three saddle point systems is widely applied to a number of physical problems. In order to evaluate the stability of actual numerical algorithms, this paper performs the structured backward error analysis for this type of block three-by-three saddle point system and presents an explicit and computable formula for the structured backward error. Based on the structured backward error, we perform numerical experiment. Numerical example shows that the expressions are useful for testing the stability of practical algorithms.**



## Keywords

**Block $3 \times 3$ Saddle Point Problem, Backward Error, Structured Backward Error**




## 1. 引言

本文研究了以下 $3 \times 3$ 块鞍点问题的结构向后误差

$$\begin{bmatrix} A & B^T & 0 \\ B & -E & C^T \\ 0 & C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$ 是对称正定矩阵, $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是对称半正定矩阵, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$ 是矩形矩阵. $B^T$ 代表 $B$ 的转置, $C^T$ 代表 $C$ 的转置. 对 $A, B, C, D, E$ 的约束保证了线性系统 (1.1) 解的存在唯一性. 给定某个结构问题的近似解, 结构向后误差分析包括在数据中寻找一个最小的保结构扰动, 使得近似解是保结构扰动问题的精确解, 最小保结构扰动的大小称为结构向后误差. 结构向后误差分析可以回答实际解决的问题与我们想要解决的问题有多接近, 并揭示数值算法的稳定性 [1,2]. 线性系统 (1.1) 产生于众多科学计算领域中, 比如耦合地幔-岩浆动力学的最佳预调节器开发 [3], 加速耦合孔隙力学方程三场迭代求解的块预调节器开发 [4], 稳定耦合孔隙力学混合块的块三角形预调节器开发 [5] 等.

$3\times 3$ 块鞍点系统 (1.1) 可以恰当地分为广义鞍点问题, 即:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & B^T & 0 \\ B & -E & C^T \\ \hline 0 & C & D \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline z \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} f \\ g \\ \hline h \end{array}\right] \text{ 或 } \left[\begin{array}{c|cc} A & B^T & 0 \\ \hline B & -E & C^T \\ 0 & C & D \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ \hline y \\ z \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} f \\ \hline g \\ h \end{array}\right].$$

近年来, 一些学者 [6–10] 已经对广义鞍点系统进行了结构向后误差分析, 证明了相应的数值算法具有较强的稳定性. 尽管 $3\times 3$ 块鞍点系统 (1.1) 可以被认为是广义的 $(2\times 2$ 块) 鞍点问题, 但因为它具有特殊的 $3\times 3$ 块结构, 上述结构向后误差分析并不能准确地表示系统 (1.1). 在本文中, 我们将对 $3\times 3$ 块鞍点系统 (1.1) 进行结构向后误差分析.

为了简便, 把 (1.1) 记作

$$\mathcal{A}t=d.$$

对任意计算解 $\tilde{t}=\left[\tilde{x}^T,\tilde{y}^T,\tilde{z}^T\right]^T$, 定义其无结构的向后误差 $\eta(\tilde{t})$ 为

$$\eta(\tilde{t})=\min_{\Delta\mathcal{A},\Delta d}\left\{\left\|\left(\frac{\|\Delta\mathcal{A}\|_F}{\|\mathcal{A}\|_F},\frac{\|\Delta d\|_2}{\|d\|_2}\right)\right\|_2:(\mathcal{A}+\Delta\mathcal{A})\tilde{t}=d+\Delta d\right\},$$

上面的式子可以进一步表示为 [11]

$$\eta(\tilde{t})=\frac{\|d-\mathcal{A}\tilde{t}\|_2}{\sqrt{\|\mathcal{A}\|_F^2\|\tilde{t}\|_2^2+\|d\|_2^2}}, \tag{1.2}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示矩阵的 Frobenius 范数和 2-范数. 若 $\eta(\tilde{t})$ 是机器精度的同量级, 则计算解 $\tilde{t}$ 的计算过程是向后稳定的，即 $\tilde{t}$ 是一个向后稳定解. 需要注意的是, 如果系数矩阵 $\mathcal{A}$ 具有某种特殊的结构, 自然要求 $\mathcal{A}+\Delta\mathcal{A}$ 也具有与 $\mathcal{A}$ 相同的结构. 在这种情况下, 自然要考虑结构后向误差.

本文结构安排如下：

在第 2 节中, 主要介绍了 Kronecker 积，和后面证明中需要用到的几个关键的引理.

在第 3 节中, 推导了 $3\times 3$ 块鞍点系统 (1.1) (矩阵 $C$ 不扰动) 结构向后误差的具体的可计算的表达式.

在第 4 节中, 推导了 $3\times 3$ 块鞍点系统 (1.1) ( $(i)$ $\tilde{y}=0$, $(ii)$ $\tilde{x}=0$, $(iii)$ $\tilde{z}=0$) 结构向后误差的具体的可计算的表达式.

在第 5 节中, 通过数值实验来证明推导出的表达式对于测试求解 $3\times 3$ 块鞍点系统的实际数值算法稳定性是有用的.

在第 6 节中, 对全文工作进行了总结.

## 2. 预备知识

本文用 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{SR}^{n\times n}$ 分别表示 $m\times n$ 阶实矩阵的集合和 $n\times n$ 阶实对称矩阵的集合, 用 $A^\dagger$ 表示矩阵 $A$ 的 Moore-Penrose 逆, 设 $X=(x_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $Z\in\mathbb{R}^{p\times q}$. $X$ 和 $Z$ 之间的 Kronecker 积定

义为(见文献 [12], 第4 章])

$$X \otimes Z = (x_{ij}Z) \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

由文献 [12] 知

$$\operatorname{vec}(XYZ) = \left(Z^T \otimes X\right)\operatorname{vec}(Y)\ , \tag{2.1}$$

$$(X \otimes Z)^T = X^T \otimes Z^T, \tag{2.2}$$

$$(X \otimes Z)(C \otimes G) = (XC \otimes ZG)\ , \tag{2.3}$$

其中 $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C$ 和 $G$ 为合适阶数的矩阵, vec $(Y)$ 定义为将矩阵 $Y$ 的所有列依次堆叠成一个向量后得到的向量.

在本节中, 我们将介绍一些引理, 这些引理将在接下来的章节中使用.

**引理2.1** ( [8,13]) 设 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $p \in \mathbb{R}^n$ 已知. 定义

$$\mathcal{X} = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times m} : Xu = p\right\}.$$

则, $\mathcal{X} \neq \emptyset$ 当且仅当 $pu^\dagger u = p$, 且在此情况下, 任意的 $X \in \mathcal{X}$ 可表示为

$$X = pu^\dagger + Z\left(I_m - uu^\dagger\right), Z \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

**引理2.2** ( [8,13]) 设 $b, c \in \mathbb{R}^n$ 已知. 定义

$$\mathcal{H} = \left\{H \in \mathbb{SR}^{n\times n} : Hb = c\right\}.$$

则, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ 当且仅当 $b$ 和 $c$ 满足 $cb^\dagger b = c$, 且在此条件下, 任意的 $H \in \mathcal{H}$ 可表示为

$$H = cb^\dagger + \left(b^\dagger\right)^T c^T\left(I_n - bb^\dagger\right) + \left(I_n - bb^\dagger\right)T\left(I_n - bb^\dagger\right),$$

其中 $T \in \mathbb{SR}^{n\times n}$.

## 3. 求解系统 (1.1) (矩阵 $C$ 不扰动) 的结构向后误差问题

令 $\tilde{t} = \left(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T, \tilde{z}^T\right)^T$ 是系统 (1.1) 的计算解, 定义结构向后误差 $\eta_S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 为

$$\eta_S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \min_{\begin{pmatrix}\Delta A, \Delta B, \Delta E,\\ \Delta D, \Delta f, \Delta g,\\ \Delta h\end{pmatrix}\in\mathcal{F}} \left\|\begin{bmatrix} \frac{\|\Delta A\|_F}{\|A\|_F} & \frac{\|\Delta B\|_F}{\|B\|_F} & \frac{\|\Delta E\|_F}{\|E\|_F} \\ \frac{\|\Delta D\|_F}{\|D\|_F} & \frac{\|\Delta f\|_2}{\|f\|_2} & \frac{\|\Delta g\|_2}{\|g\|_2} \\ \frac{\|\Delta h\|_2}{\|h\|_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_F,$$

其中

$$\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}\Delta A,\Delta B,\Delta E,\\ \Delta D,\Delta f,\Delta g,\\ \Delta h\end{pmatrix}:\begin{bmatrix}A+\Delta A & (B+\Delta B)^T & 0\\ B+\Delta B & -(E+\Delta E) & C^T\\ 0 & C & D+\Delta D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f+\Delta f\\ g+\Delta g\\ h+\Delta h\end{bmatrix},\ \begin{matrix}\Delta A=\Delta A^T,\\ \Delta D=\Delta D^T,\\ \Delta E=\Delta E^T\end{matrix}\right\}. \tag{3.1}$$

若计算解 $\tilde{t}$ 的结构向后误差是机器精度的同量级, 则计算解 $\tilde{t}$ 是一个结构向后稳定解, 相应的数值算法是结构向后稳定的 (或强稳定 [14] ). 因此, 给出结构向后误差 $\eta_S(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的可计算的具体表达式将有助于测试实际数值算法的稳定性. 为此, 进一步定义 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 为

$$\begin{aligned}&\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\\ &=\min_{\begin{pmatrix}\Delta A,\Delta B,\Delta E,\\ \Delta D,\Delta f,\Delta g,\\ \Delta h\end{pmatrix}\in\mathcal{F}}\left\|\begin{bmatrix}\theta_1\|\Delta A\|_F & \theta_2\|\Delta B\|_F & \theta_3\|\Delta E\|_F\\ \theta_4\|\Delta D\|_F & \lambda_1\|\Delta f\|_2 & \lambda_2\|\Delta g\|_2\\ \lambda_3\|\Delta h\|_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\|_F,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 为正参数. 若 $A\neq 0,B\neq 0,E\neq 0,D\neq 0,f\neq 0,g\neq 0$ 和 $h\neq 0$, 则取

$$\tilde{\theta}_1=\frac{1}{\|A\|_F},\tilde{\theta}_2=\frac{1}{\|B\|_F},\tilde{\theta}_3=\frac{1}{\|E\|_F},\tilde{\theta}_4=\frac{1}{\|D\|_F},\tilde{\lambda}_1=\frac{1}{\|f\|_2},\tilde{\lambda}_2=\frac{1}{\|g\|_2},\ \text{and}\ \tilde{\lambda}_3=\frac{1}{\|h\|_2},$$

从而有

$$\eta_S(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\eta^{\left(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3,\tilde{\theta}_4,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3\right)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}). \tag{3.3}$$

为了给出 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的结构向后误差的明确表达式. 我们首先研究了部分结构向后误差 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, 其定义为

$$\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\min_{(\Delta A,\Delta B,\Delta E,\Delta D)\in\mathcal{F}^0}\left\|\begin{bmatrix}\theta_1\|\Delta A\|_F & \theta_2\|\Delta B\|_F\\ \theta_3\|\Delta E\|_F & \theta_4\|\Delta D\|_F\end{bmatrix}\right\|_F, \tag{3.4}$$

其中

$$\mathcal{F}^0=\left\{\begin{pmatrix}\Delta A,\Delta B,\\ \Delta E,\Delta D\end{pmatrix}:\begin{bmatrix}A+\Delta A & (B+\Delta B)^T & 0\\ B+\Delta B & -(E+\Delta E) & C^T\\ 0 & C & D+\Delta D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\\ g\\ h\end{bmatrix},\ \begin{matrix}\Delta A=\Delta A^T,\\ \Delta D=\Delta D^T,\\ \Delta E=\Delta E^T\end{matrix}\right\}. \tag{3.5}$$

下面给出 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的明确表达式.

**定理 3.1** 假设 $(\tilde{x}^T,\tilde{y}^T,\tilde{z}^T)^T$ 满足 $\tilde{x}\neq 0$, $\tilde{y}\neq 0$ 和 $\tilde{z}\neq 0$ 为系统 (1.1) 的一个计算解. 则

$$\begin{aligned}\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2=&\frac{2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1}\|r_f\|_2^2+\frac{2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2}\|r_g\|_2^2+\frac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\|r_h\|_2^2+\frac{\theta_1^2\gamma_4}{\gamma_1\gamma_3}\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2\\ &+\frac{\theta_3^2\gamma_5}{\gamma_2\gamma_3}\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2-\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2+\frac{2\theta_1^2\theta_3^2}{\gamma_3}\left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(r_g^T\tilde{y}\right),\end{aligned} \tag{3.6}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.135155

其中

$$r_f = f - A\tilde{x} - B^T\tilde{y},\ \ r_g = -g + B\tilde{x} - E\tilde{y} + C^T\tilde{z},\ \ r_h = h - C\tilde{y} - D\tilde{z},$$

$$\gamma_1 = \theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2 + 2\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^2,\ \ \gamma_2 = 2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2 + \theta_2^2\|\tilde{y}\|_2^2,\ \ \gamma_3 = \theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4 + \theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 + \theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4,$$
$$\gamma_4 = 2\theta_1^2\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2 - \theta_2^2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2 - \theta_2^4\|\tilde{y}\|_2^2,\ \ \gamma_5 = 2\theta_1^2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2 - \theta_1^2\theta_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 - \theta_2^4\|\tilde{x}\|_2^2.$$

**证明** 由 (3.5) 知, $(\Delta A, \Delta B, \Delta E, \Delta D) \in \mathcal{F}^0$ 当且仅当 $\Delta A, \Delta B, \Delta E$ 和 $\Delta D$ 满足

$$\Delta A\tilde{x} = r_f - \Delta B^T\tilde{y},\ \ \Delta E\tilde{y} = r_g + \Delta B\tilde{x},\ \ \Delta D\tilde{z} = r_h,\ \ \Delta A = \Delta A^T,\ \ \Delta D = \Delta D^T,\ \ \Delta E = \Delta E^T. \tag{3.7}$$

将引理 2.2 应用于 (3.7), 可得

$$\Delta A = \left(r_f - \Delta B^T\tilde{y}\right)\tilde{x}^\dagger + \left(\tilde{x}^\dagger\right)^T\left(r_f - \Delta B^T\tilde{y}\right)^T\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right) + \left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right), \tag{3.8}$$

其中 $T_1 \in \mathbb{SR}^{n\times n}$.

$$\Delta E = \left(r_g + \Delta B\tilde{x}\right)\tilde{y}^\dagger + \left(\tilde{y}^\dagger\right)^T\left(r_g + \Delta B\tilde{x}\right)^T\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right) + \left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)T_2\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right), \tag{3.9}$$

其中 $T_2 \in \mathbb{SR}^{m\times m}$.

$$\Delta D = r_h\tilde{z}^\dagger + \left(\tilde{z}^\dagger\right)^T r_h^T\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right) + \left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_3\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right), \tag{3.10}$$

其中 $T_3 \in \mathbb{SR}^{p\times p}$.

对 (3.8), (3.9) 和 (3.10) 的等号两边同时取 Frobenius 范数, 可得

$$\begin{aligned}\|\Delta A\|_F^2 &= \frac{\left\|r_f - \Delta B^T\tilde{y}\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2} + \left\|\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\right\|_F^2 + \frac{\left\|\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\left(r_f - \Delta B^T\tilde{y}\right)\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}\\ &= \frac{2\left\|r_f - \Delta B^T\tilde{y}\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2} - \frac{\left(r_f^T\tilde{x} - \tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4} + \left\|\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\right\|_F^2,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta E\|_F^2 &= \frac{\|r_g + \Delta B\tilde{x}\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2} + \left\|\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)T_2\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)\right\|_F^2 + \frac{\left\|\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)\left(r_g + \Delta B\tilde{x}\right)\right\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}\\ &= \frac{2\|r_g + \Delta B\tilde{x}\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2} - \frac{\left(r_g^T\tilde{y} + \tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4} + \left\|\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)T_2\left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)\right\|_F^2,\end{aligned} \tag{3.12}$$

和

$$\begin{aligned}\|\Delta D\|_F^2 &= \frac{\|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2} + \left\|\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_3\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)\right\|_F^2 + \frac{\left\|\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\\ &= \frac{2\|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2} - \frac{\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4} + \left\|\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_3\left(I_p - \tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)\right\|_F^2,\end{aligned} \tag{3.13}$$

根据 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的定义 (3.4), 以及表达式 (3.11), (3.12) 和 (3.13) 可以得出

$$\begin{aligned}
&\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2\\
=&\min_{\substack{\Delta B\in\mathbb{R}^{m\times n},T_1\in\mathbb{SR}^{n\times n}\\ T_2\in\mathbb{SR}^{m\times m},T_3\in\mathbb{SR}^{p\times p}}}\left\{\theta_1^2\left\|\Delta A\right\|_F^2+\theta_2^2\left\|\Delta B\right\|_F^2+\theta_3^2\left\|\Delta E\right\|_F^2+\theta_4^2\left\|\Delta D\right\|_F^2\right\}\\
=&\frac{2\theta_4^2\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}+\min_{\Delta B\in\mathbb{R}^{m\times n}}p\left(\Delta B\right),
\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
p(\Delta B)=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f-\Delta B^T\tilde{y}\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}-\tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}+\frac{2\theta_3^2\left\|r_g+\Delta B\tilde{x}\right\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}\\
&-\frac{\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}+\tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4}+\theta_2^2\|\Delta B\|_F^2\\
=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^Tx\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4}+\frac{2\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(\tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4}\\
&-\frac{2\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)\left(\tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)}{\|\tilde{y}\|_2^4}-\frac{\left(\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4+\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4\right)\left(\tilde{y}^T\Delta B\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4\|\tilde{y}\|_2^4}-\frac{4\theta_1^2\left(\tilde{y}^T\Delta Br_f\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2}\\
&+\frac{4\theta_3^2\left(r_g^T\Delta B\tilde{x}\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2}+\frac{2\theta_1^2\|\tilde{y}^T\Delta B\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2\|\Delta B\tilde{x}\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}+\theta_2^2\|\Delta B\|_F^2.
\end{aligned}$$

记 $t=\mathrm{vec}(\Delta B)\in\mathbb{R}^{nm}$, 利用 Kronecker 积的性质 (2.1) 和 (2.2), 上面的式子可以进一步化为

$$\begin{aligned}
&p(\Delta B)\\
=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^Tx\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4}+\theta_2^2t^TI_{nm}t+\frac{2\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(\tilde{x}^T\otimes\tilde{y}^T\right)t}{\|\tilde{x}\|_2^4}\\
&-\frac{2\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)\left(\tilde{x}^T\otimes\tilde{y}^T\right)t}{\|\tilde{y}\|_2^4}-\frac{\left(\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4+\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4\right)t^T(\tilde{x}\otimes\tilde{y})\left(\tilde{x}^T\otimes\tilde{y}^T\right)t}{\|\tilde{x}\|_2^4\|\tilde{y}\|_2^4}-\frac{4\theta_1^2\left(r_f^T\otimes\tilde{y}^T\right)t}{\|\tilde{x}\|_2^2}\\
&+\frac{2\theta_1^2t^T\left(I_n\otimes\tilde{y}\right)\left(I_n\otimes\tilde{y}^T\right)t}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{4\theta_3^2\left(\tilde{x}^T\otimes r_g^T\right)t}{\|\tilde{y}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2t^T\left(\tilde{x}\otimes I_m\right)\left(\tilde{x}^T\otimes I_m\right)t}{\|\tilde{y}\|_2^2}
\end{aligned}$$

将上面的等式带入到 (3.14) 中, 并重复使用 (2.2), 可以得到

$$\begin{aligned}
\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2}+\frac{2\theta_4^2\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^Tx\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4}\\
&-\frac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}+\min_{t\in\mathbb{R}^{nm}}H(t),
\end{aligned}$$

这里 $H(t)=t^TKt-2k^Tt$, 其中

$$\begin{aligned}
K=&\theta_2^2I_{nm}+\frac{2\theta_1^2\left(I_n\otimes\tilde{y}\right)\left(I_n\otimes\tilde{y}^T\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_3^2\left(\tilde{x}\otimes I_m\right)\left(\tilde{x}^T\otimes I_m\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2}\\
&-\frac{\left(\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4+\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4\right)\left(\tilde{x}\otimes\tilde{y}\right)\left(\tilde{x}^T\otimes\tilde{y}^T\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4\|\tilde{y}\|_2^4},
\end{aligned}$$

和

$$k = \frac{2\theta_1^2 \left(r_f \otimes \tilde{y}\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2} - \frac{2\theta_3^2 \left(\tilde{x} \otimes r_g\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2} - \left( \frac{\theta_1^2 \left(r_f^T \tilde{x}\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4} - \frac{\theta_3^2 \left(r_g^T \tilde{y}\right)}{\|\tilde{y}\|_2^4} \right) \left(\tilde{x} \otimes \tilde{y}\right),$$

利用(2.3), 并注意到 $\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)^2 = \left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right), \left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)^2 = \left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)$ 和 $\tilde{x}^\dagger = \tilde{x}^T/\|\tilde{x}\|_2^2$, $\tilde{y}^\dagger = \tilde{y}^T/\|\tilde{y}\|_2^2$, 可以得出

$$\begin{aligned} K =& \theta_2^2 I_{nm} + \frac{\theta_1^2 \left(I_n \otimes \tilde{y}\right)\left(I_n \otimes \tilde{y}^T\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2} + \frac{\theta_3^2 \left(\tilde{x} \otimes I_m\right)\left(\tilde{x}^T \otimes I_m\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2} \\ &+ \frac{\theta_1^2 \left[\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right) \otimes \tilde{y}\right]\left[\left(I_n - \tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right) \otimes \tilde{y}^T\right]}{\|\tilde{x}\|_2^2} + \frac{\theta_3^2 \left[\tilde{x} \otimes \left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)\right]\left[\tilde{x}^T \otimes \left(I_m - \tilde{y}\tilde{y}^\dagger\right)\right]}{\|\tilde{y}\|_2^2}. \end{aligned}$$

明显地, $K$ 是一个对称正定矩阵. 从而当 $t = K^{-1}k$ 时, $H(t)$ 能取得最小值. 相应的,

$$\begin{aligned} \left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2 =& \frac{2\theta_1^2 \|r_f\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2} + \frac{2\theta_3^2 \|r_g\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2} + \frac{2\theta_4^2 \|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2} - \frac{\theta_1^2 \left(r_f^T x\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4} - \frac{\theta_3^2 \left(r_g^T \tilde{y}\right)^2}{\|\tilde{y}\|_2^4} \\ &- \frac{\theta_4^2 \left(r_h^T \tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4} - k^T K^{-1} k. \end{aligned} \tag{3.15}$$

多次利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式(见文献 [15]), 经过一些初等计算可得

$$K^{-1} = \frac{1}{\theta_2^2} I_{nm} - \frac{2\theta_1^2 \left(I_n \otimes \tilde{y}\tilde{y}^T\right)}{\theta_2^2 \left(\theta_2^2 \|\tilde{x}\|_2^2 + 2\theta_1^2 \|\tilde{y}\|_2^2\right)} - \frac{2\theta_3^2 \left(\tilde{x}\tilde{x}^T \otimes I_m\right)}{\theta_2^2 \left(2\theta_3^2 \|\tilde{x}\|_2^2 + \theta_2^2 \|\tilde{y}\|_2^2\right)} + \frac{\omega \left(\tilde{x}\tilde{x}^T \otimes \tilde{y}\tilde{y}^T\right)}{\theta_2^2 \left(2\theta_3^2 \|\tilde{x}\|_2^2 + \theta_2^2 \|\tilde{y}\|_2^2\right)}$$

其中

$$\omega = \frac{\left(\theta_2^4\theta_3^2 + 4\theta_1^2\theta_3^4\right)\|\tilde{x}\|_2^4 + 8\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2 \|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 + \left(4\theta_1^4\theta_3^2 + \theta_1^2\theta_2^4\right)\|\tilde{y}\|_2^4}{\left(\theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2 + 2\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^2\right)\left(\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4 + \theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 + \theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4\right)}.$$

经过一些繁琐的计算, 可以得出

$$\begin{aligned} k^T K^{-1} k =& \frac{4\theta_1^4 \|\tilde{y}\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2 \gamma_1} \|r_f\|_2^2 + \frac{4\theta_3^4 \|\tilde{x}\|_2^2}{\|\tilde{y}\|_2^2 \gamma_2} \|r_g\|_2^2 - \frac{\theta_1^4 \|\tilde{y}\|_2^2 \gamma_6}{\|\tilde{x}\|_2^4 \gamma_1 \gamma_3} \left(r_f^T \tilde{x}\right)^2 \\ &- \frac{\theta_3^4 \|\tilde{x}\|_2^2 \gamma_7}{\|\tilde{y}\|_2^4 \gamma_2 \gamma_3} \left(r_g^T \tilde{y}\right)^2 - \frac{2\theta_1^2\theta_3^2}{\gamma_3} \left(r_f^T \tilde{x}\right)\left(r_g^T \tilde{y}\right), \end{aligned}$$

其中

$$\gamma_6 = 4\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4 + 3\theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 + 2\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4, \;\; \gamma_7 = 2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^4 + 3\theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2 + 4\theta_1^2\|\tilde{y}\|_2^4.$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2$ 和 $\gamma_3$ 在定理 3.1 的前面部分定义过, 将上式带入到 (3.15) 中, 推出 (3.6). 证明完毕.

下面, 利用定理 3.1 中部分结构向后误差 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的表达式推出结构向后误差 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的具体表达式.

**定理 3.2** 假设 $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T, \tilde{z}^T)^T$ 满足 $\tilde{x} \neq 0$, $\tilde{y} \neq 0$ 和 $\tilde{z} \neq 0$ 为系统 (1.1) 的一个计算解. 且 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的定义由 (3.1) 和 (3.2) 给出. 则

$$
\begin{aligned}
&\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2\\
=&\frac{2\theta_1^2\theta_2^2\left(\mu_1-2\theta_1^2\theta_2^2\right)}{\gamma_1\mu_1}\|r_f\|_2^2+\frac{2\theta_2^2\theta_3^2\left(\mu_2-2\theta_2^2\theta_3^2\right)}{\gamma_2\mu_2}\|r_g\|_2^2+\frac{2\theta_4^2\left(\mu_3-2\theta_4^2\right)}{\|\tilde{z}\|_2^2\mu_3}\|r_h\|_2^2\\
&+\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2k_1+\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2k_2+\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2k_3+\left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(r_g^T\tilde{y}\right)k_4,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

其中

$$
\mu_1=\gamma_1\lambda_1^2+2\theta_1^2\theta_2^2,\ \mu_2=\gamma_2\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2,\ \mu_3=\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+2\theta_4^2,\ \mu_4=\theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4+\gamma_1\gamma_3\lambda_1^2+2\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3,
$$
$$
\mu_5=\theta_1^2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\gamma_5+\theta_3^2\gamma_1\gamma_3\gamma_5\lambda_1^2+2\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3\gamma_5-\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_1\gamma_2,\ \mu_6=\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+\theta_4^2,
$$

和

$$
\Omega_1=\gamma_3\mu_2\mu_4+\|\tilde{y}\|_2^2\mu_5,\ \Omega_2=\theta_1^2\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mu_1-\gamma_3\gamma_4\mu_2\mu_4-\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\mu_5,
$$

和

$$
\begin{aligned}
k_1=&\frac{\theta_1^2\gamma_4\left(\gamma_3\mu_1\mu_4\Omega_1-4\theta_1^4\theta_2^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_3\Omega_2-\theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\mu_4\Omega_1-\theta_1^4\|\tilde{x}\|_2^4\gamma_4\Omega_2\right)}{\gamma_1\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1}\\
&-\frac{\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_2\left(\Omega_1-\|\tilde{y}\|_2^2\mu_5-4\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3^2\mu_2\right)}{\gamma_3^2\mu_2\Omega_1}\\
&-\frac{2\theta_1^4\left(2\theta_2^2\gamma_4\mu_4\Omega_1+2\theta_1^2\theta_2^4\gamma_3\Omega_2-\theta_1^2\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_4\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_1\gamma_3\mu_1\mu_4\Omega_1},\\
k_2=&\frac{\theta_3^2\gamma_5\left(\gamma_3\mu_2\Omega_1-\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_5\Omega_1+4\theta_2^2\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_3\mu_5+\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^4\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_2\gamma_3^2\mu_2\Omega_1}\\
&-\frac{\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_1\left(\mu_4\Omega_1+\theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\Omega_2-4\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1}\\
&-\frac{2\theta_3^4\left(2\theta_2^2\gamma_5\Omega_1-\theta_1^4\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_5\mu_2-2\theta_2^4\gamma_3\mu_5\right)}{\gamma_2\gamma_3\mu_2\Omega_1},\\
k_3=&\frac{\theta_4^2\left(3\theta_4^2\mu_6-\mu_3\mu_6-\theta_4^4\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4\mu_3\mu_6},\\
k_4=&\frac{2\theta_1^2\theta_3^2\left(\Omega_1+\theta_1^2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\gamma_5+\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\right)}{\gamma_3\Omega_1}\\
&-\frac{2\theta_1^4\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\left(\gamma_4\mu_4\Omega_1+\theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\Omega_2+2\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3\Omega_2-2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\gamma_4\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1}\\
&-\frac{2\theta_1^2\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\left(\gamma_5\Omega_1-2\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3^2\gamma_5\mu_2-2\theta_2^2\gamma_3\mu_5-\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_3^2\mu_2\Omega_1}\\
&-\frac{4\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\left(\theta_1^2\mu_2\Omega_1-2\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3\mu_1\mu_2+\theta_3^2\mu_1\Omega_1\right)}{\gamma_3\mu_1\mu_2\Omega_1}.
\end{aligned}
$$

**证明** 根据 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的定义 (3.2) 和部分结构向后误差 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 的表达式 (3.6), 可以推出

$$\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2=\min_{\Delta f\in\mathbb{R}^n,\Delta g\in\mathbb{R}^m,\Delta h\in\mathbb{R}^p}\mathcal{X}(\Delta f,\Delta g,\Delta h),$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}(\Delta f,\Delta g,\Delta h)\\=&\lambda_1^2\|\Delta f\|_2^2+\lambda_2^2\|\Delta g\|_2^2+\lambda_3^2\|\Delta h\|_2^2+\frac{2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1}\|r_f+\Delta f\|_2^2+\frac{2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2}\|r_g+\Delta g\|_2^2\\&+\frac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\|r_h+\Delta h\|_2^2+\frac{\theta_1^2\gamma_4}{\gamma_1\gamma_3}\left[(r_f+\Delta f)^T\tilde{x}\right]^2+\frac{\theta_3^2\gamma_5}{\gamma_2\gamma_3}\left[(r_g+\Delta g)^T\tilde{y}\right]^2\\&-\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}\left[(r_h+\Delta h)^T\tilde{z}\right]^2+\frac{2\theta_1^2\theta_3^2}{\gamma_3}\left[(r_f+\Delta f)^T\tilde{x}\right]\left[(r_g+\Delta g)^T\tilde{y}\right].\end{aligned}$$

经过一些基本的计算, 可以得出

$$\mathcal{X}(\Delta f,\Delta g,\Delta h)=\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2+\begin{bmatrix}\Delta f\\\Delta g\\\Delta h\end{bmatrix}^T\Phi\begin{bmatrix}\Delta f\\\Delta g\\\Delta h\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\Delta f\\\Delta g\\\Delta h\end{bmatrix}^T q,$$

且

$$\Phi=\begin{bmatrix}\frac{\gamma_1\lambda_1^2+2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1}I_n+\frac{\theta_1^2\gamma_4\tilde{x}\tilde{x}^T}{\gamma_1\gamma_3} & \frac{\theta_1^2\theta_3^2\tilde{x}\tilde{y}^T}{\gamma_3} & 0\\ \frac{\theta_1^2\theta_3^2\tilde{y}\tilde{x}^T}{\gamma_3} & \frac{\gamma_2\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2}I_m+\frac{\theta_3^2\gamma_5\tilde{y}\tilde{y}^T}{\gamma_2\gamma_3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}I_p-\frac{\theta_4^2\tilde{z}\tilde{z}^T}{\|\tilde{z}\|_2^4}\end{bmatrix},$$

和

$$q=\begin{pmatrix}\dfrac{2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1}r_f+\dfrac{\theta_1^2\gamma_4\left(r_f^T\tilde{x}\right)}{\gamma_1\gamma_3}\tilde{x}+\dfrac{\theta_1^2\theta_3^2\left(r_g^T\tilde{y}\right)}{\gamma_3}\tilde{x}\\ \dfrac{2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2}r_g+\dfrac{\theta_3^2\gamma_5\left(r_g^T\tilde{y}\right)}{\gamma_2\gamma_3}\tilde{y}+\dfrac{\theta_1^2\theta_3^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)}{\gamma_3}\tilde{y}\\ \dfrac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}r_h-\dfrac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4}\tilde{z}\end{pmatrix}.$$

通过繁琐的计算, 对于任意非零向量 $s=\left(a^T,b^T,c^T\right)^T$, 其中 $a\in\mathbb{R}^n,b\in\mathbb{R}^m$, 和 $c\in\mathbb{R}^p$, 可得

$$\begin{aligned}s^T\Phi s=&\frac{\gamma_1\lambda_1^2+2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1}a^Ta+\frac{\theta_1^2\gamma_4}{\gamma_1\gamma_3}a^T\tilde{x}\tilde{x}^Ta+\frac{\gamma_2\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2}b^Tb+\frac{\theta_3^2\gamma_5}{\gamma_2\gamma_3}b^T\tilde{y}\tilde{y}^Tb\\&+\frac{\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}c^Tc-\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}c^T\tilde{z}\tilde{z}^Tc+\frac{2\theta_1^2\theta_3^2}{\gamma_3}a^T\tilde{x}\tilde{y}^Tb\\=&\lambda_1^2a^Ta+\lambda_2^2b^Tb+\frac{\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}c^Tc+\frac{\theta_1^2\theta_2^2\|\tilde{y}\|_2^2}{\gamma_3\|\tilde{x}\|_2^2}a^T\tilde{x}\tilde{x}^Ta+\frac{\theta_2^2\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2}{\gamma_3\|\tilde{y}\|_2^2}b^T\tilde{y}\tilde{y}^Tb\\&+\frac{\theta_1^2\theta_3^2}{\gamma_3}\left(a^T\tilde{x}+b^T\tilde{y}\right)^2+\frac{2\theta_1^2\theta_2^2}{\gamma_1\|\tilde{x}\|_2^2}a^T\left(\|\tilde{x}\|_2^2I_n-\tilde{x}\tilde{x}^T\right)a\\&+\frac{2\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_2\|\tilde{y}\|_2^2}b^T\left(\|\tilde{y}\|_2^2I_m-\tilde{y}\tilde{y}^T\right)b+\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}c^T\left(\|\tilde{z}\|_2^2I_p-\tilde{z}\tilde{z}^T\right)c\\>&0,\end{aligned}$$

这表明 $\Phi$ 是一个对称正定矩阵. 因此, $\mathcal{X}(\Delta f,\Delta g,\Delta h)$ 的最小值点为

$$\left(\Delta f^T, \Delta g^T, \Delta h^T\right)^T = -\Phi^{-1} q.$$

相应的,

$$\left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2 = \left[\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2 - q^T\Phi^{-1}q. \tag{3.17}$$

令

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33} \end{bmatrix}, \ \Psi_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \Psi_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m},\ \Psi_{33} \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

经过一系列初等行变换，有

$$\Psi_{11} = \frac{\gamma_1}{\mu_1} I_n + \frac{\theta_1^2\gamma_1\Omega_2}{\mu_1\mu_4\Omega_1}\tilde{x}\tilde{x}^T,\ \ \Psi_{12} = -\frac{\theta_1^2\theta_3^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\Omega_1}\tilde{x}\tilde{y}^T,$$

$$\Psi_{22} = \frac{\gamma_2}{\mu_2} I_m - \frac{r_2\mu_5}{\mu_2\Omega_1}\tilde{y}\tilde{y}^T,\ \ \Psi_{33} = \frac{\|\tilde{z}\|_2^2}{\mu_3} I_p + \frac{\theta_4^2}{\mu_3\mu_6}\tilde{z}\tilde{z}^T.$$

经过一系列繁琐的初级代数计算, 可以得到

$$\begin{aligned} q^T\Phi^{-1}q =& \frac{4\theta_1^4\theta_2^4\left\|r_f\right\|_2^2}{\gamma_1\mu_1} + \frac{4\theta_2^4\theta_3^4\left\|r_g\right\|_2^2}{\gamma_2\mu_2} + \frac{4\theta_4^4\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2\mu_3} \\ &+ \left(r_f^T\tilde{x}\right)^2 l_1 + \left(r_g^T\tilde{y}\right)^2 l_2 + \left(r_h^T\tilde{z}\right)^2 l_3 + \left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(r_g^T\tilde{y}\right) l_4, \end{aligned} \tag{3.18}$$

这里

$$\begin{aligned} l_1 =& \frac{\theta_1^4\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\left(4\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3\Omega_2 + \gamma_4\mu_4\Omega_1 + \theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\Omega_2\right)}{\gamma_1\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1} \\ &+ \frac{\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_2\left(\Omega_1 - \|\tilde{y}\|_2^2\mu_5 - 4\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3^2\mu_2\right)}{\gamma_3^2\mu_2\Omega_1} \\ &+ \frac{2\theta_1^4\left(2\theta_2^2\gamma_4\mu_4\Omega_1 + 2\theta_1^2\theta_2^4\gamma_3\Omega_2 - \theta_1^2\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_4\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_1\gamma_3\mu_1\mu_4\Omega_1}, \\ l_2 =& \frac{\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_1\left(\mu_4\Omega_1 + \theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\Omega_2 - 4\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1} \\ &+ \frac{\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_5\left(\gamma_5\Omega_1 - 4\theta_2^2\gamma_3\mu_5 - \|\tilde{y}\|_2^2\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_2\gamma_3^2\mu_2\Omega_1} \\ &+ \frac{2\theta_3^4\left(2\theta_2^2\gamma_5\Omega_1 - \theta_1^4\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_5\mu_2 - 2\theta_2^4\gamma_3\mu_5\right)}{\gamma_2\gamma_3\mu_2\Omega_1}, \\ l_3 =& \frac{\theta_4^4\left(\theta_4^2 - 3\mu_6\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4\mu_3\mu_6}, \\ l_4 =& \frac{2\theta_1^4\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2\left(\gamma_4\mu_4\Omega_1 + \theta_1^2\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_4\Omega_2 + 2\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3\Omega_2 - 2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\gamma_4\mu_1\mu_4\right)}{\gamma_3^2\mu_1\mu_4\Omega_1} \\ &+ \frac{2\theta_1^2\theta_3^4\|\tilde{y}\|_2^2\left(\gamma_5\Omega_1 - 2\theta_1^2\theta_2^2\gamma_3^2\gamma_5\mu_2 - 2\theta_2^2\gamma_3\mu_5 - \|\tilde{y}\|_2^2\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_3^2\mu_2\Omega_1} \\ &- \frac{2\theta_1^4\theta_3^4\|\tilde{x}\|_2^2\|\tilde{y}\|_2^2\left(\gamma_4\gamma_5 + \theta_1^2\theta_3^2\gamma_1\gamma_2\right)}{\gamma_3\Omega_1} \\ &+ \frac{4\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\left(\theta_1^2\mu_2\Omega_1 - 2\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3\mu_1\mu_2 + \theta_3^2\mu_1\Omega_1\right)}{\gamma_3\mu_1\mu_2\Omega_1}. \end{aligned}$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 和 $\gamma_5$ 在定理 3.1 的前面部分定义过, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 在定理 3.2 的前面部分定义过, 最后将 (3.18) 和 (3.6) 带入 (3.17) 中得到期望的表达式 (3.16).

结构向后误差 $\eta^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 的表达式 (3.16) 虽然看起来很复杂, 但是从计算的角度来看, 表达式 (3.16) 是容易计算的, 因为它只涉及加、减、乘、除这样基本的运算.

## 4. 求解系统 (1.1) ($\tilde{y} = 0,\ \tilde{x} \neq 0$ 和 $\tilde{z} \neq 0$) 的结构向后误差问题

令 $\tilde{t_1} = \left(\tilde{x}^T, 0, \tilde{z}^T\right)^T$ 是系统 (1.1) 的计算解, 定义结构向后误差 $\eta_{S_1}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ 为

$$\eta_{S_1}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = \min_{\begin{pmatrix} \Delta A, \Delta B, \Delta C, \\ \Delta D, \Delta f, \Delta g, \\ \Delta h \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_1} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\|\Delta A\|_F}{\|A\|_F} & \frac{\|\Delta B\|_F}{\|B\|_F} & \frac{\|\Delta C\|_F}{\|C\|_F} \\ \frac{\|\Delta D\|_F}{\|D\|_F} & \frac{\|\Delta f\|_2}{\|f\|_2} & \frac{\|\Delta g\|_2}{\|g\|_2} \\ \frac{\|\Delta h\|_2}{\|h\|_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F,$$

其中

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \Delta A, \Delta B, \Delta C, \\ \Delta D, \Delta f, \Delta g, \\ \Delta h \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} A + \Delta A & (B + \Delta B)^T & 0 \\ B + \Delta B & -(E + \Delta E) & (C + \Delta C)^T \\ 0 & C + \Delta C & D + \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f + \Delta f \\ g + \Delta g \\ h + \Delta h \end{bmatrix},\ \begin{matrix} \Delta A = \Delta A^T, \\ \Delta D = \Delta D^T \end{matrix} \right\}. \tag{4.1}$$

若计算解 $\tilde{t_1}$ 的结构向后误差是机器精度的同量级, 则计算解 $\tilde{t_1}$ 是一个结构向后稳定解, 相应的数值算法是结构向后稳定的 (或强稳定 [14] ). 因此, 给出结构向后误差 $\eta_{S_1}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ 的可计算的具体表达式将有助于测试实际数值算法的稳定性. 为此, 进一步定义 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ 为

$$\begin{aligned} &\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) \\ = &\min_{\begin{pmatrix} \Delta A, \Delta B, \Delta C, \\ \Delta D, \Delta f, \Delta g, \\ \Delta h \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_1} \left\| \begin{bmatrix} \theta_1\|\Delta A\|_F & \theta_2\|\Delta B\|_F & \theta_3\|\Delta C\|_F \\ \theta_4\|\Delta D\|_F & \lambda_1\|\Delta f\|_2 & \lambda_2\|\Delta g\|_2 \\ \lambda_3\|\Delta h\|_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \lambda_1, \lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 为正参数. 从而有

$$\eta_{S_1}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = \eta_1^{(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3,\tilde{\theta}_4,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}). \tag{4.3}$$

为了给出 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$ 的结构向后误差的明确表达式. 我们首先研究了部分结构向后误差 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$, 其定义为

$$\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = \min_{(\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D) \in \mathcal{F}_1^0} \left\| \begin{bmatrix} \theta_1\|\Delta A\|_F & \theta_2\|\Delta B\|_F \\ \theta_3\|\Delta C\|_F & \theta_4\|\Delta D\|_F \end{bmatrix} \right\|_F, \tag{4.4}$$

其中

$$\mathcal{F}_1^0=\left\{\left(\begin{array}{c}\Delta A,\Delta B,\\ \Delta C,\Delta D\end{array}\right):\begin{bmatrix}A+\Delta A & (B+\Delta B)^T & 0\\ B+\Delta B & -(E+\Delta E) & (C+\Delta C)^T\\ 0 & C+\Delta C & D+\Delta D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ 0\\ \tilde{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\\ g\\ h\end{bmatrix},\ \begin{array}{c}\Delta A=\Delta A^T,\\ \Delta D=\Delta D^T\end{array}\right\}. \tag{4.5}$$

下面给出 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的明确表达式.

**定理 4.1** 假设 $(\tilde{x}^T,0,\tilde{z}^T)^T$ 满足 $\tilde{x}\neq 0$ 和 $\tilde{z}\neq 0$ 为系统 (1.1) 的一个计算解. 则

$$\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})\right]^2=\frac{2\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}\|r_f\|_2^2+\frac{\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_1}\|r_g\|_2^2+\frac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\|r_h\|_2^2-\frac{\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2-\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2, \tag{4.6}$$

其中

$$r_f=f-A\tilde{x},\ \ r_g=g-B\tilde{x}-C^T\tilde{z},\ \ r_h=h-D\tilde{z},\ \ \gamma_1=\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2+\theta_2^2\|\tilde{z}\|_2^2.$$

**证明** 由 (4.5) 知, $(\Delta A,\Delta B,\Delta C,\Delta D)\in\mathcal{F}_1^0$ 当且仅当 $\Delta A,\Delta B,\Delta C$ 和 $\Delta D$ 满足

$$\Delta A\tilde{x}=r_f,\ \ \Delta B\tilde{x}=r_g-\Delta C^T\tilde{z},\ \ \Delta D\tilde{z}=r_h,\ \ \Delta A=\Delta A^T,\ \ \Delta D=\Delta D^T. \tag{4.7}$$

将引理 2.1 应用于 (4.7) 的第二个等式, 可得

$$\Delta B=\left(r_g-\Delta C^T\tilde{z}\right)\tilde{x}^\dagger+Z\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right),\ \ Z\in\mathbb{R}^{m\times n} \tag{4.8}$$

将引理 2.2 应用于 (4.7) 的第一、三个等式, 可得

$$\Delta A=r_f\tilde{x}^\dagger+\left(\tilde{x}^\dagger\right)^T r_f^T\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)+\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right),\ \ T_1\in\mathbb{SR}^{n\times n} \tag{4.9}$$

$$\Delta D=r_h\tilde{z}^\dagger+\left(\tilde{z}^\dagger\right)^T r_h^T\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)+\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_2\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right),\ \ T_2\in\mathbb{SR}^{p\times p}. \tag{4.10}$$

对 (4.8), (4.9) 和 (4.10) 的等号两边同时取 Frobenius 范数, 可得

$$\begin{aligned}\|\Delta A\|_F^2&=\frac{\|r_f\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\left\|\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\right\|_F^2+\frac{\left\|\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}\\&=\frac{2\|r_f\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}-\frac{\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}+\left\|\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)T_1\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\right\|_F^2,\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\|\Delta B\|_F^2=\frac{\left\|r_g-\Delta C^T\tilde{z}\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\left\|Z\left(I_n-\tilde{x}\tilde{x}^\dagger\right)\right\|_F^2, \tag{4.12}$$

和

$$\begin{aligned}\|\Delta D\|_F^2&=\frac{\|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}+\left\|\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_2\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)\right\|_F^2+\frac{\left\|\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\\&=\frac{2\|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}+\left\|\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)T_2\left(I_p-\tilde{z}\tilde{z}^\dagger\right)\right\|_F^2,\end{aligned} \tag{4.13}$$

根据 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的定义 (4.4), 以及表达式 (4.11), (4.12) 和 (4.13) 可以得出

$$\begin{aligned}
&\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})\right]^2 \\
=&\min_{\substack{\Delta C\in\mathbb{R}^{p\times m},Z\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ T_1\in\mathbb{SR}^{n\times n},T_2\in\mathbb{SR}^{p\times p}}}\left\{\theta_1^2\left\|\Delta A\right\|_F^2+\theta_2^2\left\|\Delta B\right\|_F^2+\theta_3^2\left\|\Delta C\right\|_F^2+\theta_4^2\left\|\Delta D\right\|_F^2\right\} \\
=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_4^2\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}+\min_{\Delta C\in\mathbb{R}^{p\times m}}p\left(\Delta C\right),
\end{aligned}\tag{4.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
p(\Delta C)&=\frac{\theta_2^2\left\|r_g-\Delta C^T\tilde{z}\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\theta_3^2\|\Delta C\|_F^2 \\
&=\frac{\theta_2^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}-\frac{2\theta_2^2\left(\tilde{z}^T\Delta C r_g\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{\theta_2^2\|\tilde{z}^T\Delta C\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\theta_3^2\|\Delta C\|_F^2.
\end{aligned}$$

记 $t_1=\mathrm{vec}(\Delta C)\in\mathbb{R}^{mp}$, 利用 Kronecker 积的性质 (2.1) 和 (2.2), 上面的式子可以进一步化为

$$p(\Delta C)=\frac{\theta_2^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\theta_3^2t_1^TI_{mp}t_1-\frac{2\theta_2^2\left(r_g^T\otimes\tilde{z}^T\right)t_1}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{\theta_2^2t_1^T\left(I_m\otimes\tilde{z}\right)\left(I_m\otimes\tilde{z}^T\right)t_1}{\|\tilde{x}\|_2^2}$$

将上面的等式带入到 (4.14) 中, 并重复使用 (2.2), 可以得到

$$\begin{aligned}
\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2=&\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{\theta_2^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_4^2\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4} \\
&+\min_{t_1\in\mathbb{R}^{mp}}H(t_1),
\end{aligned}$$

这里 $H(t_1)=t_1^TK_1t_1-2k_1^Tt_1$, 其中

$$K_1=\theta_3^2I_{mp}+\frac{\theta_2^2\left(I_m\otimes\tilde{z}\right)\left(I_m\otimes\tilde{z}^T\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2},\quad k_1=\frac{\theta_2^2\left(r_g\otimes\tilde{z}\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2},$$

显然$K_1$ 是一个对称正定矩阵. 从而当 $t_1=K_1^{-1}k_1$ 时, $H(t_1)$ 能取得最小值. 相应的,

$$\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\right]^2=\frac{2\theta_1^2\left\|r_f\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{\theta_2^2\left\|r_g\right\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}+\frac{2\theta_4^2\left\|r_h\right\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}-\frac{\theta_1^2\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}-\frac{\theta_4^2\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}-k_1^TK_1^{-1}k_1.\tag{4.15}$$

利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式(见文献 [15]), 可得

$$K_1^{-1}=\frac{1}{\theta_3^2}I_{mp}-\frac{\theta_2^2\left(I_m\otimes\tilde{z}\tilde{z}^T\right)}{\theta_3^2\left(\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2+\theta_2^2\|\tilde{z}\|_2^2\right)}$$

经过一些初等计算, 可以得出

$$k_1^TK_1^{-1}k_1=\frac{\theta_2^4\|\tilde{z}\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2\gamma_1}\left\|r_g\right\|_2^2,$$

其中 $\gamma_1=\theta_3^2\|\tilde{x}\|_2^2+\theta_2^2\|\tilde{z}\|_2^2$. 将上式带入到 (4.15) 中, 推出 (4.6). 证明完毕.

下面, 利用定理 4.1 中部分结构向后误差 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的表达式推出结构向后误差 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的具体表达式.

**定理 4.2** 假设 $(\tilde{x}^T,0,\tilde{z}^T)^T$ 满足 $\tilde{x}\neq 0$ 和 $\tilde{z}\neq 0$ 为系统 (1.1) 的一个计算解. 且 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的定义由 (4.1) 和 (4.2) 给出. 则

$$\begin{aligned}&\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},0,\tilde{z})\right]^2\\ =&\frac{2\theta_1^2\left(\mu_1-2\theta_1^2\right)}{\|\tilde{x}\|_2^2\mu_1}\|r_f\|_2^2+\frac{\theta_2^2\theta_3^2\left(\mu_2-\theta_2^2\theta_3^2\right)}{\gamma_1\mu_2}\|r_g\|_2^2+\frac{2\theta_4^2\left(\mu_3-2\theta_4^2\right)}{\|\tilde{z}\|_2^2\mu_3}\|r_h\|_2^2\\ &+\frac{\theta_1^2\left(3\theta_1^2\mu_4-\theta_1^4-\mu_1\mu_4\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4\mu_1\mu_4}\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2+\frac{\theta_4^2\left(3\theta_4^2\mu_5-\theta_4^4-\mu_3\mu_5\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4\mu_3\mu_5}\left(r_h^T\tilde{z}\right)^2,\end{aligned}\tag{4.16}$$

其中

$$\mu_1=\|\tilde{x}\|_2^2\lambda_1^2+2\theta_1^2,\ \ \mu_2=\gamma_1\lambda_2^2+\theta_2^2\theta_3^2,\ \ \mu_3=\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+2\theta_4^2,$$
$$\mu_4=\|\tilde{x}\|_2^2\lambda_1^2+\theta_1^2,\ \ \mu_5=\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+\theta_4^2.$$

**证明** 根据 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的定义 (4.2) 和部分结构向后误差 $\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})$ 的表达式 (4.6), 可以推出

$$\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},0,\tilde{z})\right]^2=\min_{\Delta f\in\mathbb{R}^n,\Delta g\in\mathbb{R}^m,\Delta h\in\mathbb{R}^p}\mathcal{X}_1(\Delta f,\Delta g,\Delta h),$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathcal{X}_1(\Delta f,\Delta g,\Delta h)\\ =&\lambda_1^2\|\Delta f\|_2^2+\lambda_2^2\|\Delta g\|_2^2+\lambda_3^2\|\Delta h\|_2^2+\frac{2\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}\|r_f+\Delta f\|_2^2+\frac{\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_1}\|r_g+\Delta g\|_2^2\\ &+\frac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}\|r_h+\Delta h\|_2^2-\frac{\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^4}\left[(r_f+\Delta f)^T\tilde{x}\right]^2-\frac{\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^4}\left[(r_h+\Delta h)^T\tilde{z}\right]^2.\end{aligned}$$

经过一些基本的计算, 可以得出

$$\mathcal{X}_1(\Delta f,\Delta g,\Delta h)=\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x},0,\tilde{z})\right]^2+\begin{bmatrix}\Delta f\\ \Delta g\\ \Delta h\end{bmatrix}^T\Phi_1\begin{bmatrix}\Delta f\\ \Delta g\\ \Delta h\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\Delta f\\ \Delta g\\ \Delta h\end{bmatrix}^T q_1,$$

且

$$\Phi_1=\begin{bmatrix}\frac{\|\tilde{x}\|_2^2\lambda_1^2+2\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^2}I_n-\frac{\theta_1^2\tilde{x}\tilde{x}^T}{\|\tilde{x}\|_2^4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\gamma_1\lambda_2^2+\theta_2^2\theta_3^2}{\gamma_1}I_m & 0\\ 0 & 0 & \frac{\|\tilde{z}\|_2^2\lambda_3^2+2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2}I_p-\frac{\theta_4^2\tilde{z}\tilde{z}^T}{\|\tilde{z}\|_2^4}\end{bmatrix},$$

和

$$q_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\theta_1^2}{\|\tilde{x}\|_2^2} r_f - \dfrac{\theta_1^2 \left(r_f^T \tilde{x}\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4} \tilde{x} \\ \dfrac{\theta_2^2 \theta_3^2}{\gamma_1} r_g \\ \dfrac{2\theta_4^2}{\|\tilde{z}\|_2^2} r_h - \dfrac{\theta_4^2 \left(r_h^T \tilde{z}\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4} \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

容易证明 $\Phi_1$ 是一个对称正定矩阵. 因此, $\mathcal{X}_1(\Delta f, \Delta g, \Delta h)$ 的最小值点为

$$\left(\Delta f^T, \Delta g^T, \Delta h^T\right)^T = -\Phi_1^{-1} q_1.$$

相应的,

$$\left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})\right]^2 = \left[\eta_1^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)}(\tilde{x}, 0, \tilde{z})\right]^2 - q_1^T \Phi_1^{-1} q_1. \tag{4.17}$$

其中

$$\Phi_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\|\tilde{x}\|_2^2}{\mu_1} I_n + \frac{\theta_1^2}{\mu_1\mu_4} \tilde{x}\tilde{x}^T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1}{\mu_2} I_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\|\tilde{z}\|_2^2}{\mu_3} I_p + \frac{\theta_4^2}{\mu_3\mu_5} \tilde{z}\tilde{z}^T \end{bmatrix}.$$

经过一系列的初级代数计算, 可以得到

$$q_1^T \Phi_1^{-1} q_1 = \frac{4\theta_1^4 \|r_f\|_2^2}{\|\tilde{x}\|_2^2 \mu_1} + \frac{\theta_2^4 \theta_3^4 \|r_g\|_2^2}{\gamma_1 \mu_2} + \frac{4\theta_4^4 \|r_h\|_2^2}{\|\tilde{z}\|_2^2 \mu_3} + \frac{\theta_1^4 \left(\theta_1^2 - 3\mu_4\right)}{\|\tilde{x}\|_2^4 \mu_1 \mu_4} \left(r_f^T \tilde{x}\right)^2 + \frac{\theta_4^4 \left(\theta_4^2 - 3\mu_5\right)}{\|\tilde{z}\|_2^4 \mu_3 \mu_5} \left(r_h^T \tilde{z}\right)^2. \tag{4.18}$$

其中 $\gamma_1$ 在定理 4.1 的前面部分定义过, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 和 $\mu_5$ 在定理 4.2 的前面部分定义过, 最后将 (4.18) 和 (4.6) 带入 (4.17) 中得到期望的表达式 (4.16).

**定理 4.3** 如果 $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} \neq 0$ 和 $\tilde{z} \neq 0$, 可以类似上面的证明给出

$$\begin{aligned} &\left[\eta_2^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(0, \tilde{y}, \tilde{z})\right]^2 \\ =& \frac{\theta_1^2 \left(\mu_1 - \theta_1^2\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2 \mu_1} \|r_f\|_2^2 + \frac{2\theta_2^2 \theta_3^2 \left(\mu_2 - 2\theta_2^2 \theta_3^2\right)}{\gamma_1 \mu_2} \|r_g\|_2^2 + \frac{2\theta_2^2 \theta_4^2 \left(\mu_3 - 2\theta_2^2 \theta_4^2\right)}{\gamma_2 \mu_3} \|r_h\|_2^2 \\ &+ \left(r_g^T \tilde{y}\right)^2 k_1 + \left(r_h^T \tilde{z}\right)^2 k_2 + \left(r_g^T \tilde{y}\right) \left(r_h^T \tilde{z}\right) k_3, \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \lambda_1, \lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 为正参数. 其中

$$r_f = f - B^T \tilde{y}, \;\; r_g = -g - E\tilde{y} + C^T \tilde{z}, \;\; r_h = h - C\tilde{y} - D\tilde{z},$$

$$\gamma_1 = \theta_2^2 \|\tilde{y}\|_2^2 + 2\theta_3^2 \|\tilde{z}\|_2^2, \;\; \gamma_2 = 2\theta_4^2 \|\tilde{y}\|_2^2 + \theta_2^2 \|\tilde{z}\|_2^2, \;\; \gamma_3 = \theta_4^2 \|\tilde{y}\|_2^4 + \theta_2^2 \|\tilde{y}\|_2^2 \|\tilde{z}\|_2^2 + \theta_3^2 \|\tilde{z}\|_2^4,$$

$$\gamma_4 = 2\theta_3^2 \theta_4^2 \|\tilde{z}\|_2^2 - \theta_2^2 \theta_4^2 \|\tilde{y}\|_2^2 - \theta_2^4 \|\tilde{z}\|_2^2, \;\; \gamma_5 = 2\theta_3^2 \theta_4^2 \|\tilde{y}\|_2^2 - \theta_2^2 \theta_3^2 \|\tilde{z}\|_2^2 - \theta_2^4 \|\tilde{y}\|_2^2,$$

和

$$\mu_1=\|\tilde{y}\|_2^2\lambda_1^2+\theta_1^2,\ \ \mu_2=\gamma_1\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2,\ \ \mu_3=\gamma_2\lambda_3^2+2\theta_2^2\theta_4^2,\ \ \mu_4=\gamma_1\gamma_3\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3+\theta_3^2\gamma_4\|\tilde{y}\|_2^2,$$

$$\mu_5=\theta_4^2\gamma_1\gamma_3\gamma_5\lambda_2^2+2\theta_2^2\theta_3^2\theta_4^2\gamma_3\gamma_5+\theta_3^2\theta_4^2\gamma_4\gamma_5\|\tilde{y}\|_2^2-\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\gamma_2,$$

$$\Omega_1=\gamma_3\mu_3\mu_4+\|\tilde{z}\|_2^2\mu_5,\ \ \Omega_2=\theta_3^2\theta_4^4\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mu_2-\gamma_3\gamma_4\mu_3\mu_4-\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_4\mu_5,$$

和

$$\begin{aligned}k_1=&\frac{\theta_3^2\gamma_4\left(\mu_2\Omega_1-2\theta_2^2\theta_3^2\Omega_1+2\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{y}\|_2^2\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\mu_2\right)}{\gamma_1\gamma_3\mu_2\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^4\left(2\theta_2^2\gamma_3+\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\right)\left(2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3\Omega_2+\gamma_4\mu_4\Omega_1+\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\Omega_2\right)}{\gamma_1\gamma_3^2\mu_2\mu_4\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_2\left(\Omega_1-\|\tilde{z}\|_2^2\mu_5-4\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\mu_3\right)}{\gamma_3^2\mu_3\Omega_1},\\k_2=&\frac{\theta_4^2\gamma_5\left(\mu_3\Omega_1-2\theta_2^2\theta_4^2\Omega_1+2\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{y}\|_2^2\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\mu_3\right)}{\gamma_2\gamma_3\mu_3\Omega_1}\\&-\frac{\theta_4^4\left(2\theta_2^2\gamma_3+\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_5\right)\left(\gamma_5\Omega_1-2\theta_2^2\gamma_3\mu_5-\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_2\gamma_3^2\mu_3\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_1\left(\mu_4\Omega_1+\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\Omega_2-4\theta_2^2\theta_4^2\gamma_3^2\mu_2\mu_4\right)}{\gamma_3^2\mu_2\mu_4\Omega_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_3=&\frac{\theta_3^2\theta_4^4\left(2\gamma_3\mu_3\Omega_1-\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_5\Omega_1+2\theta_2^2\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_3\mu_5+\|\tilde{z}\|_2^4\gamma_5\mu_5\right)}{\gamma_3^2\mu_3\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^4\theta_4^2\left(2\theta_2^2\gamma_3+\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\right)\left(\mu_4\Omega_1+\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\Omega_2\right)}{\gamma_3^2\mu_2\mu_4\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^2\theta_4^4\left(2\theta_2^2\gamma_3+\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_5\right)\left(\Omega_1-\|\tilde{z}\|_2^2\mu_5-4\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3^2\mu_3-2\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_3\gamma_4\mu_3\right)}{\gamma_3^2\mu_3\Omega_1}\\&-\frac{2\theta_3^2\theta_4^2\left(\theta_2^2\theta_3^2\mu_3\Omega_1-\theta_3^4\theta_4^4\|\tilde{y}\|_2^2\|\tilde{z}\|_2^2\gamma_1\gamma_2\mu_2\mu_3+\theta_2^2\theta_4^2\mu_2\Omega_1\right)}{\gamma_3\mu_2\mu_3\Omega_1}\\&-\frac{\theta_3^4\theta_4^2\|\tilde{y}\|_2^2\left(2\theta_2^2\theta_3^2\gamma_3\Omega_2+\gamma_4\mu_4\Omega_1+\theta_3^2\|\tilde{y}\|_2^2\gamma_4\Omega_2\right)}{\gamma_3^2\mu_2\mu_4\Omega_1}\end{aligned}$$

**定理 4.4** 如果 $\tilde{z}=0$, $\tilde{x}\neq 0$ 和 $\tilde{y}\neq 0$, 可以类似上面的证明给出

$$\begin{aligned}&\left[\eta_3^{(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(\tilde{x},\tilde{y},0)\right]^2\\=&\frac{2\theta_1^2\theta_2^2\left(\mu_1-2\theta_1^2\theta_2^2\right)}{\gamma_1\mu_1}\|r_f\|_2^2+\frac{2\theta_2^2\theta_3^2\left(\mu_2-2\theta_2^2\theta_3^2\right)}{\gamma_2\mu_2}\|r_g\|_2^2+\frac{\theta_3^2\left(\mu_3-\theta_3^2\right)}{\|\tilde{y}\|_2^2\mu_3}\|r_h\|_2^2\\&+\left(r_f^T\tilde{x}\right)^2k_1+\left(r_g^T\tilde{y}\right)^2k_2+\left(r_f^T\tilde{x}\right)\left(r_g^T\tilde{y}\right)k_4,\end{aligned}\tag{4.20}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\lambda_1,\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 为正参数. 其中

$$r_f=f-A\tilde{x}-B^T\tilde{y},\ \ r_g=-g+B\tilde{x}-E\tilde{y},\ \ r_h=h-C\tilde{y},\ \ \mu_3=\|\tilde{y}\|_2^2\lambda_3^2+\theta_3^2.$$

并且 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5,\mu_1,\mu_2,\mu_4,\mu_5,\Omega_1,\Omega_2,k_1,k_2,k_4$ 与第三部分(矩阵 $C$ 不扰动)所定义的相同.

## 5. 数值实验

本节将给出一个数值例子来比较第 3 节中推出的结构向后误差 $\eta_S(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 和相应的无结构向后误差 $\eta(\tilde{t})$. 数值实验在 MATLAB R2015b 中进行, 机器精度为 $2.2204\times10^{-16}$.

考虑线性系统 (1.1) 满足

$$A=M_1PM_1,\quad D=M_2PM_2\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\10^{-3}&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\-2&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

和

$$E=I_4,\quad f=\left[10^8,10,0,0,0,0\right]^T,\quad g=\left[10^8,1,0,0\right]^T,\quad h=\left[10^{-8},0,0\right]^T$$

其中

$$M_1=\mathrm{diag}(1,5,10,50,100,10000),\quad M_2=\mathrm{diag}(1,5,10),$$

$$P=(p_{ij}),\quad p_{ij}=\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$$

这个问题是由文 [8] 中的 Example 5.2 修改而来. 很显然系数矩阵是非奇异的. 使用列选主元的高斯消去法可以得到一个计算解 $\tilde{t}=\left(\tilde{x}^T,\tilde{y}^T,\tilde{z}^T\right)^T$, 其中

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix}4.0418\times10^8\\-1.6445\times10^8\\1.0030\times10^8\\-1.4400\times10^7\\2.8125\times10^6\\-4.6236\times10^3\end{pmatrix},\ \tilde{y}=\begin{pmatrix}7.3927\times10^5\\-3.4302\times10^7\\-8.8214\times10^7\\4.0418\times10^5\end{pmatrix}\ \text{和}\ \tilde{z}=\begin{pmatrix}7.6232\times10^7\\-1.7857\times10^7\\3.1926\times10^6\end{pmatrix}.$$

由 (1.2) 得, 无结构向后误差

$$\eta(\tilde{t})=8.8414\times10^{-22}.$$

由 (3.3) 和 (3.16) 得, 结构向后误差

$$\eta_S(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=1.4127\times10^{-8}.$$

## 6. 总结

本文利用文 [10,16] 中的技巧和 Kronecker 积的性质, 首先将 $3\times 3$ 块鞍点问题近似解的结构向后误差这一矩阵优化问题转化为正定二次型的最小值问题，然后利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式, 最终获得结构向后误差的可计算的具体表达式. 最后我们给出了一个数值实验, 以证明我们的结果可以很容易地用来测试实际数值算法的稳定性.

## 基金项目

甘肃省杰出青年基金 (20JR5RA540)。

## 参考文献

[1] Bunch, J.R. (1987) The Weak and Strong Stability of Algorithms in Numerical Linear Algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, **88-89**, 49-66. https://doi.org/10.1016/0024-3795(87)90102-9

[2] Higham, N.J. (2002) Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. 2nd Edition, SIAM, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898718027

[3] Rhebergen, S., Wells, G.N., Wathen, A.J. and Katz, R.F. (2015) Three-Field Block Preconditioners for Models of Coupled Magma/Mantle Dynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A2270-A2294. https://doi.org/10.1137/14099718X

[4] Castelletto, N., White, J.A. and Ferronato, M. (2016) Scalable Algorithms for Three-Field Mixed Finite Element Coupled Poromechanics. *Journal of Computational Physics*, **327**, 894-918. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.063

[5] Frigo, M., Castelletto, N., Ferronato, M. and White, J.A. (2021) Efficient Solvers for Hybridized Three-Field Mixed Finite Element Coupled Poromechanics. *Computers and Mathematics with Applications*, **91**, 36-52. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.07.010

[6] Chen, X.S., Li, W., Chen, X.J. and Liu, J. (2012) Structured Backward Errors for Generalized Saddle Point Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 3109-3119. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.10.012

[7] Meng, L.S., He, Y.W. and Miao, S.X. (2020) Structured Backward Errors for Two Kinds of Generalized Saddle Point Systems. *Linear and Multilinear Algebra*, **70**, 1345-1355. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1760193

[8] Sun, J.G. (1999) Structured Backward Errors for KKT Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **288**, 75-88. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10184-2

[9] Xiang, H. and Wei, Y.M. (2007) On Normwise Structured Backward Errors for Saddle Point Systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **29**, 838-849. https://doi.org/10.1137/060663684

[10] Zheng, B. and Lv, P. (2020) Structured Backward Error Analysis for Generalized Saddle Point Problems. *Advances in Computational Mathematics*, **46**, Article No. 34. https://doi.org/10.1007/s10444-020-09787-x

[11] Sun, J.G. (1996) Optimal Backward Perturbation Bounds for Linear Systems and Linear Least Squares Problems. Tech. Rep., UMINF 96.15, Department of Computing Science, Umea University, Umea.

[12] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1991) Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840371

[13] Sun, J.G. (2001) Matrix Perturbation Analysis. 2nd Edition, Science Press, Beijing.

[14] Boffi, D., Brezzi, F. and Fortin, M. (2013) Mixed Finite Element Methods and Applications. In: *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5

[15] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (2013) Matrix Computations. 4th Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[16] Lv, P. and Zheng, B. (2022) Structured Backward Error Analysis for a Class of Block Three-by-Three Saddle Point Problems. *Numerical Algorithms*, **90**, 59-78. https://doi.org/10.1007/s11075-021-01179-6