**Pure Mathematics** 理论数学, 2023, 13(6), 1571-1577
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136159

Hans汉斯

# Frobenius扩张下的$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein平坦模

**魏玉娟[*]，周彩霞**

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年5月5日；录用日期：2023年6月5日；发布日期：2023年6月13日

## 摘 要

**设 $R\subseteq S$ 是环的Frobenius扩张，$M$是任意左$S$-模，假设$\mathcal{A}$是右$R$-模的类，$\mathcal{B}$是右$S$-模的类，且$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$关于扩张封闭，$\mathcal{I}\left(S^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$，在一些条件下证明了$M$是$(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein平坦左$S$-模当且仅当$M$是$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein平坦左$R$-模当且仅当$S\otimes_R M$是$(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein平坦左$S$-模。**

## 关键词

**Frobenius扩张，$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein平坦模，$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein平坦维数**

# $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein Flat Modules under Frobenius Extension

**Yujuan Wei[*], Caixia Zhou**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 5th, 2023; accepted: Jun. 5th, 2023; published: Jun. 13th, 2023

## Abstract

**Let $R\subseteq S$ be a Frobenius extensin of rings, $M$ be any left $S$-modules. Let $\mathcal{A}$ be class of right $R$-modules and $\mathcal{B}$ be class of right $S$-modules. $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ be closed by extension, $\mathcal{I}\left(S^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$, under some conditions proved that $M$ be $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein flat left $S$-modules if and only if $M$ be $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein flat left $S$-modules if and only if $S\otimes_R M$ be $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein flat left $S$-modules.**

[*]第一作者。

文章引用: 魏玉娟, 周彩霞. Frobenius 扩张下的 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1571-1577.
DOI: 10.12677/pm.2023.136159

**Keywords**

**Frobenius Extensin, $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein Flat Module, $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein Flat Dimension**



## 1. 引言

作为平坦模的推广，1993 年，Overtoun 等[1]引入了 Gorenstein 平坦模的概念，研究了其性质。2009 年，Holm 和 Jorgensen [2]引入了对偶对的概念。2019 年，Gillespie [3]引入了相对于对偶对$(\mathcal{L},\mathcal{A})$的 Gorenstein 投射、内射和平坦模的概念。2022 年，Becerril [4]进一步研究了$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模的同调性质及其维数。

1954 年，Kasch [5]引入了 Frobenius 扩张的概念。1960 年，Nakayam，Tsuzuku [6]和 Morita [7]对 Frobenius 扩张做了更深入的研究。近年来，Ren [8]引入了可分 Frobenius 扩张的概念，研究了在环的 Frobenius 扩张下 Gorenstein 投射模与 Gorenstein 投射维数，证明了左 $S$-模 $M$ 是 Gorenstein 投射模当且仅当 $M$ 作为左 $R$-模也是 Gorenstein 投射模。2019 年，Ren [9]研究了在环的 Frobenius 扩张 $R\subseteq S$ 下，其中 $S$-是右凝聚环，Gorenstein 平坦模与 Gorenstein 平坦维数的同调不变性。

受以上结论的启发，本文研究了在环的 Frobenius 扩张下$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模与$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦维数的同调不变性。

文中环 $R$ 和 $S$-均指有单位元的结合环，模均指酉模。$R$-模(或者 $S$-模)表示所有的左 $R$-模(或者左 $S$-模)。$R^{op}$-模(或者 $S^{op}$-模)表示所有的右 $R$-模(或者右 $S$-模)。对任意的环 $R$，$Mod(R)$表示所有左 $R$-模的范畴，$Mod(R^{op})$表示所有右 $R$-模的范畴。$I(R)$表示所有内射左 $R$-模构成的类。$F(R)$表示所有平坦左 $R$-模构成的类。

在本文中，$\mathcal{A}$ 表示所有右 $R$-模构成的类，$\mathcal{B}$ 表示所有右 $S$-模构成的类，且 $I(S^{op})\subseteq\mathcal{B}$。

## 2. $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模

**定义 2.1** ([9]**定义 2.1**)称 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，如果满足下面五条等价条件中的一条

1) 函子 $S\otimes_R -$ 和 $Hom_R(S,-)$ 是自然等价的；
2) 函子 $-\otimes_R S$ 和 $Hom_{R^{op}}(S,-)$ 是自然等价的；
3) ${}_RS$ 是有限生成投射模，且 ${}_SS_R\cong Hom_R({}_RS_S,R)$；
4) $S_R$ 是有限生成投射模，且 ${}_RS_S\cong Hom_R({}_SS_R,R)$；
5) 存在 $R$-同态 $\xi:S\to R$ 和 $\mathcal{X}_i,\mathcal{Y}_i\in S$，使得对任意 $s\in S$，$\sum_i\mathcal{X}_i\xi(\mathcal{Y}_is)=s$ 和 $\sum_i\xi(s\mathcal{X}_i)\mathcal{Y}_i=s$。

**定义 2.2** 设 $M$ 是左 $R$-模，称 $M$ 是$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模，如果存在平坦左 $R$-模的正合列

$$F:\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong Ker(F^0\to F^1)$，且对任意 $A\in\mathcal{A}$，$A\otimes_R F$ 正合。

通常，我们将$(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模类记为 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(R)$。

**引理 2.3** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$M$ 是任意左 $S$-模，假设以下成立

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$， $A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$， $B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

若 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模，则 $M$ 也是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模。

**证明** 设 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模，则存在平坦左 $S$-模的正合复形

$$F=\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong Ker\left(F^0\to F^1\right)$，且对任意 $B\in\mathcal{B}$， $B\otimes_S F$ 是正合的。因为任意平坦左 $S$-模都是平坦左 $R$-模，所以 $F$ 是平坦左 $R$-模的正合复形。

令 $A\in\mathcal{A}\subseteq Mod\left(R^{op}\right)$，因为 $A\otimes_R S\cong Hom_{R^{OP}}(S,A)$，且 $Hom_{R^{OP}}(S,A)$ 是右 $S$-模，所以 $Hom_{R^{OP}}(S,A)\otimes_S F$ 正合，又由同构 $A\otimes_R F\cong A\otimes_R S\otimes_S F\cong Hom_{R^{OP}}(S,A)\otimes_S F$ 知， $A\otimes_R F$ 是正合的，所以 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模。

**引理 2.4** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$M$ 是任意左 $S$-模，假设以下成立：

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$， $A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$， $B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

若 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则 $S\otimes_R M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模。

**证明** 设 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则存在平坦左 $R$-模的正合复形

$$F:\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$$

使得 $M\cong Ker\left(F^0\to F^1\right)$，且对任意 $A\in\mathcal{A}$， $A\otimes_R F$ 正合。由([10]定理 2.1.13)，知 $S\otimes_R F$ 是平坦左 $S$-模的正合复形，且 $S\otimes_R M\cong Ker\left(S\otimes_R F^0\to S\otimes_R F^1\right)$。对任意 $B\in\mathcal{B}$，由同构 $B\otimes_R F\cong B\otimes_S S\otimes_R F$ 知，$B\otimes_S S\otimes_R F$ 正合，因此 $S\otimes_R M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模。

**引理 2.5** ([4] **Lemma 3.11**)设 $\mathcal{A}\subseteq Mod\left(R^{op}\right)$， $\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{A}$， 以下等价

1) $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$ 关于扩张封闭；

2) $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$ 是预可解的；

3) $0\to G_1\to G_0\to M\to 0$ 是左 $R$-模的正合序列，其中 $G_0,G_1\in\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$，如果对任意 $A\in\mathcal{A}$，$Tor_1^R(A,M)=0$，则 $M\in\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$。

**命题 2.6** 若 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$ 关于扩张封闭，且 $\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{A}$，则 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$ 关于直和和直和项封闭。

**命题 2.7** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$L$ 是任意左 $S$-模，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ 关于扩张封闭，$\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$，假设以下成立

1) 对任意 $A\in\mathcal{A}$， $A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 对任意 $B\in\mathcal{B}$， $B\in\mathcal{A}$；

3) 对任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

则 $L$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，当且仅当 $S\otimes_R L$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模。

**证明** $\Rightarrow$)由引理 2.4 易知。

$\Leftarrow$)若 $S\otimes_R L$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模，由引理 2.3 知， $S\otimes_R L$ 也是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，设 $L$ 是左 $S$-模，则有自然满同态 $\pi:S\otimes_R L\to L$， $\pi(s\otimes l)=sl$，当看作 $R$-同态时， $\pi$ 可裂，因此 ${}_RL$ 是 ${}_R(S\otimes_R L)$ 的直和项，又由命题 2.6 知 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模关于直和项封闭，所以 $L$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模。

**命题 2.8** 设 $M$ 是左 $R$-模，以下等价：

1) $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模；

2) 对任意 $A\in\mathcal{A}$ 及整数 $i\geq 1$，$Tor_R^i(A,M)=0$，且 $M$ 存在 $A\otimes_R -$ 正合的右平坦分解；

3) 存在短正合序列 $0\to M\to F\to K\to 0$，其中 $F\in F(R)$，则 $K\in\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$。

**证明** (1)$\Rightarrow$(2)易得。

(3)$\Rightarrow$(2)因为 $K\in\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$，所以对任意 $A\in\mathcal{A}$ 及整数 $i\geq 1$，$Tor_R^i(A,K)=0$，且 $K$ 存在 $A\otimes_R -$ 正合的右平坦分解，

$$0\to K\to F_0\to F_1\to\cdots, \qquad ①$$

将短正合序列 $0\to M\to F\to K\to 0$ 与正合序列①连接起来，存在 $M$ 的一个 $A\otimes_R -$ 正合的右平坦分解，

$$0\to M\to F\to F_0\to F_1\to\cdots, \qquad ②$$

将 $A\otimes_R -$ 作用于短正合序列 $0\to M\to F\to K\to 0$，可得长正合序列

$$\cdots\to Tor_R^{i+1}(A,F)\to Tor_R^{i+1}(A,K)\to Tor_R^i(A,M)\to Tor_R^i(A,F)\to Tor_R^i(A,K)\to\cdots,$$

从而 $Tor_R^{i+1}(A,K)\cong Tor_R^i(A,M)=0$。

**定理 2.9** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ 关于扩张封闭，$\mathcal{I}(R^{OP})\subseteq\mathcal{B}$，$M$ 是任意左 $S$-模，假设以下成立

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$，$A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

则 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})-$Gorenstein 平坦左 $S$-模，当且仅当 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})-$Gorenstein 平坦左 $R$-模。

**证明** $\Rightarrow$)显然。

$\Leftarrow$)设 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则对任意 $A\in\mathcal{A}$ 及整数 $i>0$，$Tor_i^R(A,M)=0$。由于对任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项，因此由同构

$$Tor_i^S\left(Hom_{R^{op}}(S,B),M\right)\cong Tor_i^S(B\otimes_R S,M)\cong Tor_i^R(B,M)=0$$

可知 $Tor_i^S(B,M)=0$。

由命题 2.8 可知，我们只需要构造 ${}_SM$ 的向右的一个平坦分解，由引理 2.4 知，$S\otimes_R M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模，又因 $S\otimes_R M\cong Hom_R(S,M)$，所以存在左 $S$-模的短正合序列

$$0\to Hom_R(S,M)\xrightarrow{f}F^0\to K\to 0$$

其中 $F^0$ 是平坦模，$K$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模，另外，有 $S$-模单同态 $\varphi: M\to Hom_R(S,M)$，$\varphi(m)(s)=sm$，将 $\varphi$ 限制在 $R$-同态上，$\varphi$ 可裂，于是存在 $\varphi': Hom_R(S,M)\to M$，使得 $\varphi'\varphi=1_M$，考虑左 $S$-模的短正合序列

$$0\to M\xrightarrow{f\varphi}F^0\to K^0\to 0$$

其中 $K^0=Coker(f\varphi)$。由引理 2.3 知，$K$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则对任意 $A_1\in\mathcal{A}$ 及整数 $i>0$，$Tor_i^R(A_1,K)=0$。从而 $A_1\otimes_R f: A_1\otimes_R Hom_R(S,M)\to A_1\otimes_R F^0$ 是单同态，同时，$A_1\otimes_R\varphi: A_1\otimes_R M\to A_1\otimes_R Hom_R(S,M)$ 也是单同态，因此序列

$$0\to A_1\otimes_R M\to A_1\otimes_R F^0\to A_1\otimes_R K^0\to 0$$

是正合的，故 $Tor_1^R\left(A_1,K^0\right)=0$，从而由引理 2.5 可得，$K^0$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模。用类似的方法，我们可以证得对任意 $B\in\mathcal{B}$，$Tor_1^S\left(B,K^0\right)=0$，从而序列

$$0\to B\otimes_S M\to B\otimes_S F^0\to B\otimes_S K^0\to 0$$

是正合的。

对 $K^0$ 重复以上步骤，可以得到一个在函子 $B\otimes_S -$ 作用后依旧保持正合的短正合序列

$$0\to K^0\to F^1\to K^1\to 0,$$

其中 $F^1$ 是平坦模，$K^1$ 作为 $R$-模是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，通过归纳法，可以构造出 ${}_SM$ 的向右的一个平坦分解，

$$0\to M\to F^0\to F^1\to\cdots \quad ①$$

其中 $F^i$ 是平坦模，且对任意 $B\in\mathcal{B}$，序列①在函子 $B\otimes_S -$ 的作用下保持正合。因此 $M$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模。

## 3. $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦维数

**定义 3.1** 设 $M$ 是任意左 $R$-模，定义 $M$ 的 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦维数为 $M$ 的 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦维数的最短长度，即 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)\le n$ 当且仅当存在左 $R$-模的正合序列

$$0\to L_n\to L_{n-1}\to\cdots\to L_0\to M\to 0$$

其中 $n$ 是非负整数，$L_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦模。

如果这样的 $n$ 不存在，则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)=\infty$。

**引理 3.2** 由([4]定理 3.12)可得 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦维数的另一种定义

$$Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)=\sup\left\{i\in N \mid 存在\ A\in\mathcal{A},\ 使得\ Tor_i^R(A,M)\neq 0\right\}$$

**定理 3.3** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ 关于扩张封闭，$Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)<\infty$，$\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$，$M$ 是左 $S$-模，假设以下成立

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$，$A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

**证明** 由引理 2.3 知，任意 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模都是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)$。下面证 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)\ge Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)$，设 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)=n<\infty$，由引理 3.2，只需证对于任意 $B\in\mathcal{B}$ 及整数 $i>n$，$Tor_i^S(B,M)=0$，又因对任意 $B\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{A}$，所以 $Tor_i^R(B,M)=0$。因此 $Tor_i^S(B\otimes_R S,M)\cong Tor_i^R(B,M)=0$，另外，由于对任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项，且 $Hom_{R^{op}}(S,B)\cong B\otimes_R S$，则对任意整数 $i>n$，$Tor_i^S(B,M)=0$，故 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)\le n$。即 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

**命题 3.4** 若 $(M_i)_{i\in I}$ 是一族左 $R$-模，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}$ 关于扩张封闭，$\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{A}$，则

$$Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}\left(\oplus_I M_i\right)=\sup\left\{Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M_i)\mid i\in I\right\}。$$

**证明** 类似文献[11]命题 3.11 可证。

在定理 3.3 中，我们需要 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)<\infty$，接下来我们研究在什么情况下，任意左 $S$-模 $M$ 的 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦维数沿着环的 Frobenius 扩张是传递的。

**命题 3.5** 设 $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ 关于扩张封闭，$\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$，假设以下成立

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$，$A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是右 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

则

a) 若 $M$ 是左 $R$-模，则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$；

b) 若 $M$ 作为左 $S$-模，则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

**证明** a)由引理 2.3 知，任意 $(\mathcal{F},\mathcal{B})$-Gorenstein 平坦左 $S$-模都是 $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein 平坦左 $R$-模，则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)$。由引理 1.3，易得 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

b) 设 $M$ 是左 $S$-模，则 $M$ 作为左 $R$-模是 ${}_R(S\otimes_R M)$ 的直和项，由命题 3.4，易得 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)$。又由(a)知 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$，故 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

作为 Frobenius 代数的推广，2018 年，Ren 在文献[8]中提出了可分 Frobenius 扩张的概念.

**定义 3.6** [8]称 $R\subseteq S$ 是环的可分 Frobenius 扩张，如果满足以下两条

1) $R\subseteq S$ 是环的可分扩张；

2) $R\subseteq S$ 是环的 Frobenius 扩张。

称环扩张 $R\subseteq S$ 是可分的，是指乘法映射 $\varphi:S\otimes_R S\to S$ $(s\otimes_R l\to sl)$ 是可裂满同态。

**定理 3.7** 设 $R\subseteq S$ 是环的可分 Frobenius 扩张，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}$ 关于扩张封闭，$\mathcal{I}\left(R^{OP}\right)\subseteq\mathcal{B}$，$M$ 是任意左 $S$-模，假设以下成立

1) 任意 $A\in\mathcal{A}$，$A\otimes_R S\in\mathcal{B}$；

2) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{A}$；

3) 任意 $B\in\mathcal{B}$，$B$ 是 $S$-模 $Hom_{R^{op}}(S,B)$ 的直和项。

则 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)$。

**证明** 因为 $R\subseteq S$ 是环的可分 Frobenius 扩张，所以 $\varphi:S\otimes_R M\to M$ $(s\otimes_R m\to sm)$ 是可裂满同态，故 $M$ 是 $S\otimes_R M$ 的直和项，由命题 3.4，易知 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)$，由定理 2.7 可得不等式 $Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)\le Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)$，从而由命题 3.5(b)，我们有下面的不等式：

$$Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{A})}(S\otimes_R M)=Gfd_{(\mathcal{F},\mathcal{B})}(S\otimes_R M)\text{。}$$

## 参考文献


[1] Overtoun, M., Enochs, E. and Jendan, O. (2011) Relative Homologocal Algebra. DeGruyter, Berlin.

[2] Holm, H. and Jorgensen, P. (2009) Cotorsion Pairs Induced by Duality Pairs. *Journal of Commutative Algebra*, **1**, 621-633. https://doi.org/10.1216/JCA-2009-1-4-621

[3] Gillespie, J. (2019) Duality and Stable Module Categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **223**, 3425-3435. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.11.010

[4] Becerril, V. (2022) $(\mathcal{F},\mathcal{A})$-Gorenstein flat homological dimensions. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **59**, 1203-1227.

[5] Kasch, F. (1954) Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. *Mathematische Annalen*, **127**, 453-474. https://doi.org/10.1007/BF01361137

[6] Nakayama, T. and Tsuzuku, T. (1960) On Frobenius Extensions I. *Nagoya Mathematical Journal*, **17**, 89-110. https://doi.org/10.1017/S0027763000002075

[7] Morita, K. (1965) Adjoint Pairs of Functors and Frobenius Extension. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, **9**, 40-71.

[8] Ren, W. (2018) Gorenstein Projective Modules and Frobenius Extensions. *Science China Mathematics*, **61**, 1175-1186. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9138-y

[9] 任伟. Gorenstein 平坦模与 Frobenius 扩张[J]. 数学学报, 2019, 62(4): 647-652.

[10] 张睿杰. Frobenius 扩张环上的 n-Ding 投射模[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2020.

[11] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007