Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1578-1588
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136160

双相问题基态解的存在性

鄢兴业，杨艺豪

江西理工大学理学院，江西 赣州

收稿日期：2023年5月5日；录用日期：2023年6月5日；发布日期：2023年6月13日

摘 要

本文在全空间 $\boldsymbol{R}^N$ 上研究了具有一般非线性项双相问题的基态解。利用变分法和单调性技巧，得到了双相问题在Berestycki-Lions条件下具有非平凡径向对称的基态解。

关键词

双相算子，单调性技巧，基态解

Existence of Ground State Solution of Double Phase Problem

Xingye Yan, Yihao Yang

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: May 5th, 2023; accepted: Jun. 5th, 2023; published: Jun. 13th, 2023

Abstract

We study a double phase problem with a general nonlinear term satisfying the Berestycki-Lions condition in $\boldsymbol{R}^N$. Based on the Monotonicity trick and variational method, we are going to prove the existence of a nontrivial radial ground state solution for this problem.

Keywords

Double Phase Operator, Monotonicity Trick, Ground State Solution

文章引用: 鄢兴业, 杨艺豪. 双相问题基态解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1578-1588.
DOI: 10.12677/pm.2023.136160

1. 引言

本文主要研究以下双相问题：

$$\begin{cases} L(u)+|u|^{p-2}u+a(x)|u|^{q-2}u=f(x,u), & \text{in } R^N \\ u\in W_0^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $L(u):=-div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+a(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)$ $N\geq 3$，$1<p<q<N$。$f:R^N\times R\to R$ 是一个 Caratheodory 函数，满足文献[1]的 Berestycki-Lions 条件：

(f_1) $f\in C\left(R^N,R\right)$，对所有的 $s\leq 0$，都有 $f(s)\equiv 0$；

(f_2)对所有的 $l\in\left[p,p^*\right]$，$-\infty<\liminf\limits_{s\to 0^+}\dfrac{f(x,s)}{s^{l-1}}\leq\limsup\limits_{s\to 0^+}\dfrac{f(x,s)}{s^{l-1}}<0$，其中 $p^*=\dfrac{Np}{N-p}\in(p,+\infty)$；

(f_3) $-\infty\leq\limsup\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(x,s)}{s^{q^*-1}}\leq 0$，其中 $q^*=\dfrac{Nq}{N-q}\in\left(p^*,+\infty\right)$；

(f_4) 存在一个 $\zeta>0$，使得 $F(\zeta)=\int_0^\zeta f(x,s)\mathrm{d}s>0$。

本文对于问题(1)的解是在弱的意义下讨论的，即对于所有的 $v\in W_0^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$，下面等式成立

$$\int_{R^N}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+a(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)\nabla v\mathrm{d}x+\int_{R^N}\left(|u|^{p-2}u+a(x)|u|^{q-2}u\right)v\mathrm{d}x=\int_{R^N}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

我们将在第二节介绍 Sobolev 空间 $W_0^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$。

形如

$$div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u+a(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)\quad u\in W_0^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$$

的算子称为双相算子。它的积分形式为

$$\int_{R^N}\left(|\nabla u|^p+a(x)|\nabla u|^q\right)\mathrm{d}x$$

在研究强各向异性材料的行为特性时，Zhikov 引入了这个算子。算子中函数 $a(x)$ 用作调节两种不同材料之间的混合物的辅助工具。同时，他了解到，强各向异性材料的硬化性能因点而异，泛函根据点改变其椭圆率，当 $a(x)>0$ 时，泛函表现为 (p,q) 相，具体表现为梯度多项式的次数为 q。在 $|\nabla u|$ 很小时，$|\nabla u|^p$ 是主项，反之 $|\nabla u|^q$ 是主项。特别的，当 $a(x)=0$ 时，梯度多项式的次数变为 p。关于这个算子的更多性质请参阅文献[2] [3]。

Berestycki-Lions 在文献[1]中对非线性项 f 作出以下假设

(f_1') $f:R\to R$ 是连续的奇函数；

(f_2') $-\infty<\liminf\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}\leq\limsup\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}<0$；

(f_3') $\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^{2^*-1}}\leq 0$，其中 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$；

(f_4') 存在一个 $\zeta>0$，使得 $F(\zeta)>0$，其中 $F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$。

得到了

$$-\Delta u=f(u)\ \text{in } R^N\quad u\in H^1\left(R^N\right)$$

的解，并且他们证明这是得到该问题解的最优条件。

受文献[1]的启发，在处理问题(1)时，我们也希望在 Berestycki-Lions 条件下找到双相问题的解。

双相问题应用广泛，近些年来，许多学者都对双相问题的研究产生了兴趣，其中 Liu 和 Dai 在文献[4] [5]中利用变分法对双相问题解的存在性和多重性进行了研究。但是他们是在以下条件研究的

(F_1) $f\in C\left(R^N\times R\right)$，存在一个 $\gamma\in\left(q,p^*\right)$，使得 $\left|f\left(x,t\right)\right|\le k\left(x\right)\left|t\right|^{\gamma-1},\forall\left(x,t\right)\in R^N\times R$。其中 $p^*=\dfrac{Np}{N-p}$，$k\left(x\right)\in L^{\theta}\left(R^N\right)\cap L^{\infty}\left(R^N\right)$；

(F_2) 对 $x\in R^N$，一致地有 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f\left(x,t\right)}{t^{p-1}}=0$；

(F_3) 对 $x\in R^N$，一致地有 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{F\left(x,t\right)}{t^{q}}=+\infty$；

(F_4) $\dfrac{f\left(x,t\right)}{t^{q-1}}$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $\left(0,+\infty\right)$ 是严格单调递增的；

(F_5) (A-R 条件)存在 $M>0$，$\theta>q$ 使得对所有的 $\left|t\right|\ge M$，都有 $0<\theta F\left(x,t\right)\le tf\left(x,t\right)$。

需要指出的是，(F_1)是次临界增长条件，(F_3)意味着函数 $f\left(x,t\right)$ 在无穷远处是超线性的，(F_4)则是著名的 Nehair 条件。特别地，他们证明了符号变化解的存在。文献[6]通过用超线性条件代替[5]中的 A-R 条件，证明了该问题存在无穷多个解。文献[7]中，Leszek Gasinski and Patrick Winkert 利用 Nehair 流形方法，解决了具有非线性边界条件的双相问题的符号变化解。除此之外，双相问题在跨音速流动理论[8]，量子物理学[9]，反应扩散系统[10]等方面都有应用。

本文的创新点在于：我们是 Berestycki-Lions 条件下进行研究的，利用单调技巧找到 PS 序列，从而证明基态解的存在性。这在之前的文献中是没有的。

本文的主要结构如下：第一部分为引言，介绍了所研究的双相算子的背景和一些应用；第二部分是准备工作，介绍了 Musielak-Orlicz Sobolev 空间 $L^{\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 和 $W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 的一些性质和定理，然后是对非线性项进行了截断处理；最后在 2.3 节介绍了本文主要用到的方法—单调技巧(Monotonicity trick)。第三部分主要是利用单调技巧[11]找到泛函有界的 PS 序列，以及证明了问题(1)非平凡径向对称的基态解的存在性。

2. 预备知识

2.1. Musielak-Orlicz Sobolev 空间

在这一小节中我们回顾了 Musielak-Orlicz Sobolev 空间的一些性质和重要的定理。具体的可参阅文献[12] [13] [14] [15]。

我们定义函数 $\mathcal{H}:R^N\times\left[0,+\infty\right)\to\left[0,+\infty\right)$，且

$$\mathcal{H}\left(x,t\right)=t^p+a\left(x\right)t^q .$$

Musielak-Orlicz Sobolev 空间 $L^{\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 定义为

$$L^{\mathcal{H}}\left(R^N\right)=\left\{u:R^N\to R\text{是可测的且}\rho_{\mathcal{H}}\left(u\right)<\infty\right\},$$

其 Luxemburg 范数为

$$\left\|u\right\|_{\mathcal{H}}=\inf\left\{\tau>0:\rho_{\mathcal{H}}\left(\frac{u}{\tau}\right)\le1\right\},$$

模函数

$$\rho_{\mathcal{H}}(u):=\int_{R^N}\mathcal{H}(x,|u|)\mathrm{d}x=\int_{R^N}\left(|u|^p+a(x)|u|^q\right)\mathrm{d}x .$$

同时我们可定义 $W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 空间

$$W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right):=\left\{u\in L^{\mathcal{H}}\left(R^N\right):|\nabla u|\in L^{\mathcal{H}}\left(R^N\right)\right\},$$

其范数形式为

$$\|u\|:=\|u\|_{\mathcal{H}}+\|\nabla u\|_{\mathcal{H}} .$$

其中 $\|\nabla u\|_{\mathcal{H}}=\||\nabla u|\|_{\mathcal{H}}$。参阅文献[5]，我们有范数 $\|\cdot\|$ 和模 ρ 的关系如下

定义 1 [5]令 $\rho(u)=\int_{R^N}\left(|\nabla u|^p+a(x)|\nabla u|^q+|u|^p+a(x)|u|^q\right)\mathrm{d}x$，则下面关系成立：

a) 若 $u\neq 0$，$\|u\|=\lambda$ 当且仅当 $\rho\left(\dfrac{u}{\lambda}\right)=1$；

b) $\|u\|<1$ (或 $=1;>1$)当且仅当 $\rho(u)<1$ (或 $=1;>1$)；

c) 若 $\|u\|<1$，则 $\|u\|^q\le\rho(u)\le\|u\|^p$，若 $\|u\|>1$，则 $\|u\|^p\le\rho(u)\le\|u\|^q$；

d) $\|u\|\to 0$ 当且仅当 $\rho(u)\to 0$，$\|u\|\to+\infty$ 当且仅当 $\rho(u)\to+\infty$。

接下来我们定义 $W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 的径向对称空间

$$W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right):=\left\{u\in W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right):u\text{是径向对称的}\right\}$$

我们很容易知道 Sobolev 空间 $W^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 和 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 是自反的 Banach 空间。为了得到径向对称的解，接下来的工作都是在 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 进行的。此外，我们还有以下紧嵌入结论

定义 2 [4]若 $1\le p<N$，则对于所有的 $\gamma\in\left(p,p^*\right)$，$W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)\to L^{\gamma}\left(R^N\right)$ 是连续的紧映射。

接下来，我们定义问题(1)所对应的泛函为

$$J(u)=\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(x,u)\mathrm{d}x$$

其中，$F(x,u)=\int_{R^N}f(x,s)\mathrm{d}s$。易知 J 是 C^1 的并且问题(1)的解就是泛函 J 的临界点。

2.2. 截断与分解

这一小节，我们主要是对非线性项 f 进行截断和分解处理。

我们定义

$$s_0:=\min\left\{s\in[\zeta,+\infty)\mid f(s)=0\right\}$$

对于所有的 $s\ge\zeta$，若 $f(s)\neq 0$，则 $s_0=+\infty$。令

$$\tilde{f}(s)=\begin{cases}f(s) & \text{当}s\in[0,s_0],\\ 0 & \text{当}s\in(s_0,+\infty).\end{cases}$$

通过计算分析易知 $\tilde{f}(s)$ 也满足同样的条件，因此由极大值定理，$\tilde{f}(s)$ 对应方程的解同时也是 $f(s)$ 对应方程的解。不失一般性，接下来我们用 $\tilde{f}(s)$ 代替 $f(s)$。

接下来我们对非线性项进行分解处理。

对于所有的 $s\ge 0$，令

$$f_1(s):=f_+(s),\quad f_2(s):=f_1(s)-f(s).$$

由 f_2 和 f_3，我们有

$$\lim_{s\to 0}\frac{f_1(x,s)}{s^{p^*-1}}=0,\quad \lim_{s\to+\infty}\frac{f_1(x,s)}{s^{q^*-1}}=0. \tag{2}$$

因此，对所有的 $s\ge 0$，由(2)得

$$0\le f_1(x,s)\le C\left(s^{p^*-1}+s^{q^*-1}\right), \tag{3}$$

$$0\le f_2(x,s). \tag{4}$$

对于 $i=1,2$，不妨设 $F_i(x,s)=\int_{R^N} f_i(x,s)\mathrm{d}s$，则对所有的 $s\in R$，我们有

$$F_2(x,s)\ge 0 \tag{5}$$

$$0\le F_1(x,s)\le C\left(s^{p^*}+s^{q^*}\right) \tag{6}$$

2.3. 单调技巧

下面我们简单介绍单调技巧：假设 $\left(W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right),\|\cdot\|\right)$ 是一个 Banach 空间且 $\left(W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right),\|\cdot\|\right)^{-1}$ 为其对偶空间，$I\subset R^+$ 是一个非空的紧区间。考虑一个 C^1 泛函族 $\{J_\lambda\}_{\lambda\in I}$

$$J_\lambda(u)=A(u)-\lambda B(u)$$

其中 A，B 都是 C^1 泛函，B 是非负的，当 $\|u\|\to\infty$ 时，$A(u)\to+\infty$ 或者 $B(u)\to+\infty$。

如果对于每一个 $\lambda\in I$，集合

$$\Gamma_\lambda:=\left\{\gamma\in C[0,1],X\mid\gamma(0)=0,J_\lambda(\gamma(t))<0\right\} \tag{7}$$

是非空的。且

$$c_\lambda:=\inf_{\lambda\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_\lambda(\gamma(t))>0 \tag{8}$$

存在。则存在序列 $\{v_n\}\subset W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 使得

a) $\{v_n\}$ 在 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 中是有界的；

b) $J_\lambda(v_n)\to c_\lambda$；

c) 在 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 的对偶空间 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)^{-1}$ 中 $J_\lambda'(v_n)\to 0$。

3. 主要结论

为了得到问题(1)的解，我们先来考虑以下这个辅助问题

$$L(u)+|u|^{p-2}u+a(x)|u|^{q-2}u+f_2(x,u)=\lambda f_1(x,u) \tag{9}$$

当 $\lambda\to 1$ 时，该问题的解就是(1)的解。(9)对应的泛函 $J_\lambda(u)$ 为

$$J_\lambda(u)=\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x+\int_{R^N}F_2(x,u)\mathrm{d}x-\lambda\int_{R^N}F_1(x,u)\mathrm{d}x.$$

不妨令

$$A(u)=\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x+\int_{R^N}F_2(x,u)\mathrm{d}x,$$

$$B(u)=\int_{R^N}F_1(x,u)\mathrm{d}x.$$

由于问题(1)所对应的泛函在 Berestycki-Lions 条件下不满足紧性(A-R)条件，寻找有界的 PS 序列存在

困难，为此，我们需要引入单调技巧，以便找到 PS 序列，即，引理 1，引理 2。

引理 1 对于所有的 $\lambda\in[\lambda_0,1]$，存在 $\lambda_0\in(0,1)$，使得集合 Γ_λ 是非空的。

证明 由 f_4 知，存在一个 $\zeta>0$，使得 $F(\zeta)>0$，又因为 $F(x,s)=F_1(x,s)-F_2(x,s)$，因此存在一个 $0<\lambda_0<1$，使得

$$\lambda_0\int_{R^N}F_1(x,u)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F_2(x,u)\mathrm{d}x>0. \tag{10}$$

作变换 $w(t,x)=\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$，$(t>0)$，则

$$\frac{1}{p}\int_{R^N}|\nabla w|^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{pt^p}\int_{R^N}\left|\nabla\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p}t^{N-p}\int_{R^N}|\nabla\varphi(x)|^p\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{q}a(x)\int_{R^N}|\nabla w|^q\,\mathrm{d}x=\frac{a(xt)}{qt^q}\int_{R^N}\left|\nabla\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^q\mathrm{d}x=\frac{a(xt)}{q}t^{N-q}\int_{R^N}|\nabla\varphi(x)|^q\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{p}\int_{R^N}|w|^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}t^N\int_{R^N}|\varphi(x)|^p\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{a(x)}{q}\int_{R^N}|w|^q\,\mathrm{d}x=\frac{a(xt)}{q}t^N\int_{R^N}|\varphi(x)|^q\,\mathrm{d}x.$$

令 $R_t=\|w\|$，则

$$R_t^{\ p}=\|w\|^p=t^{N-p}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^p+|\varphi(x)|^p\right)\mathrm{d}x+a(xt)t^{N-q}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^q+|\varphi(x)|^q\right)\mathrm{d}x$$

因此

$$\begin{aligned}J(w)=&\frac{1}{p}t^{N-p}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^p+|\varphi(x)|^p\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{q}a(xt)t^{N-q}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^q+|\varphi(x)|^q\right)\mathrm{d}x\\&+t^N\int_{R^N}F_2(\varphi)\mathrm{d}x-\lambda t^N\int_{R^N}F_1(\varphi)\mathrm{d}x\\\le&\frac{1}{p}t^{N-p}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^p+|\varphi(x)|^p\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{q}a(xt)t^{N-q}\int_{R^N}\left(|\nabla\varphi(x)|^q+|\varphi(x)|^q\right)\mathrm{d}x\\&-t^N\left(\int_{R^N}\lambda_0F_1(\varphi)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F_2(\varphi)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

因此，由(10)知，当 $t>1$ 且足够大时，$J(w)<0$。定义函数 γ：

$$\gamma(t)=\begin{cases}2t\varphi\left(\frac{2}{\tau}\right) & \text{当}t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \varphi\left(\frac{1}{t\tau}\right) & \text{当}t\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

由此可知，$\gamma\in\Gamma_\lambda$，证毕。

引理 2 对于所有的 $\lambda\in[\lambda_0,1]$，条件(8)成立。

证明 对于任意的 $u\in W_0^{1,\mathcal{H}}(R^N)$ 和 $\lambda\in[\lambda_0,1]$，由(5) (6)，我们有

$$\begin{aligned}J(u)&=\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(x,u)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{q}\|u\|^p-\frac{\varepsilon}{l}m_l|u|^l-\frac{C(\varepsilon)}{q^*}|u|^{q^*}.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon>0, C_1(\varepsilon)>0, C_2(\varepsilon)>0$，由紧嵌入得

$$J(u)\ge C_1(\varepsilon)\|u\|^p - C_2(\varepsilon)\|u\|^{q^*}$$

又因 $q^*>p$，则当 ρ 足够小时，存在一个 $\alpha>0$，使得对所有的 $u\in W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)$，都有 $J(u)\ge\alpha$ 且 $\|u\|\le\rho$。下面固定 $\lambda\in I$ 和 $\gamma\in\Gamma_\lambda$，由于 $\gamma(0)=0\ne\gamma(1)$，$J_\lambda\gamma(1)<0$，我们推断出 $\|\gamma(1)\|>\rho$，又由 γ 的连续性，我们知，存在 $t_\gamma\in(0,1)$，使得 $\|\gamma(t_\gamma)\|=\rho$。因此对于任意的 $\lambda\in I$

我们有

$$\alpha\le\inf_{\gamma\in\Gamma} J_\lambda(\gamma(t_\gamma))\le c_\lambda$$

证毕。

现在由引理 1，引理 2，我们可以找到一个有界的 PS 序列 $\{u_n^\lambda\}\subset W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)$，使得

$$J_\lambda(u_n^\lambda)\to c_\lambda, J'_\lambda(u_n^\lambda)\to 0$$

接下来就是研究其收敛性，取一个子列，即在 $W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)$ 中存在 $\{u^\lambda\}$ 使得当 $n\to+\infty$ 时 $u_n^\lambda\rightharpoonup u_\lambda$，$u_n^\lambda(x)\to u_\lambda(x)\ x\in R^N$ 几乎处处成立。

引理 3 u_λ 满足 $u_\lambda\ne 0$，$J_\lambda(u_\lambda)\le c_\lambda$ 且 $J'_\lambda(u_\lambda)=0$。

证明 由 f_3，f_4 知，存在 $\varepsilon>0$，$C=C(\varepsilon)$ 使得

$$|f(x,t)|\le\varepsilon m_l|t|^{l-1}+C(\varepsilon)|t|^{q^*-1}, t\in R.$$

即

$$|F(x,t)|\le\frac{\varepsilon}{l}m_l|t|^l+\frac{C(\varepsilon)}{q^*}|t|^{q^*}, t\in R.$$

令函数 $P,Q:R\to R$ 且

$$P(t)=F(t),\quad Q(t)=|t|^{p^*}+|t|^{q^*}.$$

则

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(t)}{Q(t)}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}=0.$$

设

$$u_n^\lambda\rightharpoonup u_\lambda$$

则

$$\sup_{n\in N}\int_{R^N}\left|Q\left(u_n^\lambda(x)\right)\right|\mathrm{d}x\le C\sup_{n\in N}\left(\|u_n\|^{p^*}+\|u_n\|^{q^*}\right)<+\infty.$$

因此，由 Strauss 紧性引理[16]，我们有

$$\int_{R^N}F_1\left(x,u_n^\lambda(x)\right)\mathrm{d}x\to\int_{R^N}F_1\left(x,u_\lambda(x)\right)\mathrm{d}x. \tag{11}$$

同理，得

$$\int_{R^N}f_1\left(x,u_n^\lambda(x)\right)u_n^\lambda(x)\mathrm{d}x\to\int_{R^N}f_1\left(x,u_\lambda(x)\right)u_n^\lambda(x)\mathrm{d}x \tag{12}$$

对任意的 $i=1,2$，$\varphi\in C_0^\infty\left(R^N\right)$，我们有

$$\int_{R^N} f_i\left(x,u_n^\lambda(x)\right)\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^N} f_i\left(x,u_\lambda(x)\right)\varphi\mathrm{d}x. \tag{13}$$

由(13)，$J_\lambda'\left(u_n^\lambda\right)\to 0$ 和 $u_n^\lambda\rightharpoonup u_\lambda$，我们有 $J_\lambda'\left(u_\lambda\right)=0$。假设 $u_\lambda=0$，因为 $J_\lambda'\left(u_n^\lambda\right)\to 0$，我们有

$$\int_{R^N}\left(\left(\left|\nabla u_n^\lambda\right|^p+\left|u_n^\lambda\right|^p\right)+a(x)\left(\left|\nabla u_n^\lambda\right|^q+\left|u_n^\lambda\right|^q\right)\right)\mathrm{d}x+\int_{R^N} f_2\left(x,u_n^\lambda\right)u_n^\lambda\mathrm{d}x=\lambda\int_{R^N} f_1\left(x,u_n^\lambda\right)u_n^\lambda\mathrm{d}x+o(1).$$

根据(12) (13)，我们得到 $\left\|u_n^\lambda\right\|\to 0$，又因为 $J_\lambda\left(u_n^\lambda\right)\to c_\lambda>0$，矛盾。故 $u_\lambda\neq 0$。

最后由于 $u_n^\lambda(x)\to u_\lambda(x)\ x\in R^N$ 几乎处处成立，根据 Fatou's 引理我们有

$$\int_{R^N} F_2\left(x,u_\lambda\right)\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to+\infty}\int_{R^N} F_2\left(x,u_n^\lambda\right)\mathrm{d}x$$

由(11)和 $\|\cdot\|$ 的弱下半连续性，我们有 $J_\lambda\left(u_\lambda\right)\le c_\lambda$，证毕。

到现在为止，我们仅仅是证明了对几乎所有的 $\lambda\in I$，u_λ 是辅助问题(9)的一个非平凡的解。接下来就是寻找问题(1)的解，因此我们考虑序列 $\{\lambda_n\}$，使得当 $n\to+\infty$ 时，$\lambda_n\to 1$。然后根据第二节中单调技巧的结论以及引理 3 知，存在 $\{v_n\}\subset W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)\setminus\{0\}$ 使得下面式子成立

$$J_{\lambda_n}'\left(v_n\right)=0,\quad J_{\lambda_n}\left(v_n\right)\le c_{\lambda_n}. \tag{14}$$

下面这个引理主要是要说明序列 $\{v_n\}$ 的有界性。

引理 4 序列 $\{v_n\}$ 在 $W_r^{1,\mathcal{H}}\left(R^N\right)$ 中是有界的。

证明 首先，由于 $J_{\lambda_n}'\left(v_n\right)=0$，则在弱的意义下 v_n 满足

$$L\left(v_n\right)+\left|v_n\right|^{p-2}v_n+a(x)\left|v_n\right|^{q-2}v_n+f_2\left(x,v_n\right)-\lambda_n f_1\left(x,v_n\right)=0$$

此外，$\{v_n\}$ 满足下列的 Pohozaev 恒等式[17]

$$\begin{aligned}&\int_{R^N}\left(\frac{N-p}{p}\left(\left|\nabla v_n\right|^p+\left|v_n\right|^p\right)+\frac{N-q}{q}a(x)\left(\left|\nabla v_n\right|^q+\left|v_n\right|^q\right)\right)\mathrm{d}x\\&+N\int_{R^N} F_2\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x-N\lambda_n\int_{R^N} F_1\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x=0.\end{aligned} \tag{15}$$

由(14)，得

$$\begin{aligned}J_{\lambda_n}\left(v_n\right)=&\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(\left|\nabla v_n\right|^p+\left|v_n\right|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(\left|\nabla v_n\right|^q+\left|v_n\right|^q\right)\right)\mathrm{d}x\\&+\int_{R^N} F_2\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x-\lambda_n\int_{R^N} F_1\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x\le c_{\lambda_n}.\end{aligned} \tag{16}$$

在(16)两边同时乘 N，即

$$\begin{aligned}NJ_{\lambda_n}\left(v_n\right)=&\int_{R^N}\left(\frac{N}{p}\left(\left|\nabla v_n\right|^p+\left|v_n\right|^p\right)+\frac{N}{q}a(x)\left(\left|\nabla v_n\right|^q+\left|v_n\right|^q\right)\right)\mathrm{d}x\\&+N\int_{R^N} F_2\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x-N\lambda_n\int_{R^N} F_1\left(x,v_n\right)\mathrm{d}x\le Nc_{\lambda_n}.\end{aligned} \tag{17}$$

由(17) (15)以及 c_λ 关于 λ 的单调性([11], Theorem 1.1)知

$$\int_{R^N}\left(\left(\left|\nabla v_n\right|^p+\left|v_n\right|^p\right)+a(x)\left(\left|\nabla v_n\right|^q+\left|v_n\right|^q\right)\right)\mathrm{d}x\le Nc_{\lambda_n}<Nc_{\lambda_0}.$$

所以$\{v_n\}$是有界的，证毕。

下面的两个定理是本文的主要结果。

定理 1 若条件(f_1)~(f_4)成立，则问题(1)存在非平凡径向对称的解。

证明 由引理 4，取一个子列，使得$v_n \rightharpoonup v$。由$J'(v_n)$和$J'_{\lambda_n}(v_n)$的定义以及$J'_{\lambda_n}(v_n)=0$，我们有

$$J'(v_n)=J'_{\lambda_n}(v_n)+(\lambda_n-1)f_1(v_n)=(\lambda_n-1)f_1(v_n).$$

由(11)的证明，对于任意的$\varphi\in C_0^\infty(R^N)$，都有

$$\int_{R^N} f_1(v_n)\varphi\mathrm{d}x \to \int_{R^N} f_1(v)\varphi\mathrm{d}x.$$

这就意味着

$$(\lambda_n-1)f_1(v_n)=o(1)$$

因此，v_n是泛函J的一个 PS 序列，再次应用紧性引理，得$J'(v)=0$。类似于引理 3 的证明，我们可以得到$v\neq 0$。因为我们是在径向对称空间处理的，很自然的，这个解是径向对称的。下面我们将给出基态解的存在性。所谓的基态解就是所有解中，使得泛函成立的最小能量的解。分两步证明：首先证明集合S_0非空，再证明存在$\bar{u}\in W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)$，使得$J(\bar{u})=\min\limits_{u\in S_0}J(u)$。

定理 2 若条件(f_1)-(f_4)成立，则问题(1)存在非平凡径向对称的基态解。

证明首先，我们定义S_0为所有非平凡径向解的集合

$$S_0=\left\{u\in W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)\setminus\{0\}\mid J'(u)=0\right\}.$$

显然，S_0是非空的，由 Pohozaev 恒等式：

$$\int_{R^N}\left(\frac{N-p}{pN}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{N-q}{qN}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x=\int_{R^N}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{18}$$

又因为

$$J(u)=\int_{R^N}\left(\frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+\frac{1}{q}a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x-\int_{R^N}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{19}$$

由(19)~(18)，得

$$J(u)=\frac{1}{N}\int_{R^N}\left(\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x$$

因此

$$\eta=\inf_{u\in S_0}J(u)>0.$$

令$\{u_n\}\subset S_0$是一个极小化序列，由

$$J(u_n)=\frac{1}{N}\int_{R^N}\left(\left(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p\right)+a(x)\left(|\nabla u_n|^q+|u_n|^q\right)\right)\mathrm{d}x\to\eta$$

我们推断出$\{u_n\}$是有界的，因此存在一个$\bar{u}\in W_r^{1,\mathcal{H}}(R^N)$，使得$u_n\rightharpoonup\bar{u}$，因此我们有$\bar{u}\in S_0$。最后由范数的弱下半连续性得

$$
\begin{aligned}
\eta \le J(\bar{u}) &= \frac{1}{N}\int_{R^N}\left(\left(|\nabla u|^p+|u|^p\right)+a(x)\left(|\nabla u|^q+|u|^q\right)\right)\mathrm{d}x \\
&\le \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{N}\int_{R^N}\left(\left(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p\right)+a(x)\left(|\nabla u_n|^q+|u_n|^q\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to+\infty} J(u_n)=\eta.
\end{aligned}
$$

因此，存在 $\bar{u}\in S_0$，使得 $J(\bar{u})=\min_{u\in S_0}J(u)$。证毕。

4. 不足与展望

本文在 Berestycki-Lions 条件下应用单调技巧得到的基态解是非负非平凡的径向对称的，对于非径向解我们没有提及，我们希望在以后的工作中研究问题(1)的非径向对称解，以及考虑在 Berestycki-Lions 条件下研究解的衰减性。

致　谢

感谢各位审稿专家的指导！

基金项目

本文得到了中国国家自然科学基金会的部分支持(批准号为 11961030)。

参考文献

[1] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations, I Existence of a Ground State. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 313-345. https://doi.org/10.1007/BF00250555

[2] Zhikov, V.V. (1987) Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **29**, 33. https://doi.org/10.1070/IM1987v029n01ABEH000958

[3] Zhikov, V. (1993) Lavrentiev Phenomenon and Homogenization for Some Variational Problems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **316**, 435-439.

[4] Liu, W. and Dai, G. (2020) Multiplicity Results for Double Phase Problems in R^N. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 091508. https://doi.org/10.1063/5.0020702

[5] Liu, W. and Dai, G. (2018) Existence and Multiplicity Results for Double Phase Problem. *Journal of Differential Equations*, **265**, 4311-4334. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.006

[6] Ge, B., Lv, D.J. and Lu, J.-F. (2019) Multiple Solutions for a Class of Double Phase Problem without the Ambrosetti-Rabinowitz Conditions. *Nonlinear Analysis*, **188**, 294-315. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.06.007

[7] Gasiński, L. and Winkert, P. (2021) Sign Changing Solution for a Double Phase Problem with Nonlinear Boundary Condition via the Nehari Manifold. *Journal of Differential Equations*, **274**, 1037-1066. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.11.014

[8] Bahrouni, A., Radulescu, V.D. and Repova, D.D. (2019) Double Phase Transonic Flow Problems with Variable Growth: Nonlinear Patterns and Stationary Waves. *Nonlinearity*, **32**, 2481-2495. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab0b03

[9] Benci, V.P., D'Avenia, P., Fortunato, D. and Pisani, L. (2000) Solitons in Several Space Dimensions: Derrick's Problem and Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, **154**, 297-324. https://doi.org/10.1007/s002050000101

[10] Il'Yasov. Y. and Cherfils, L. (2004) On the Stationary Solutions of Generalized Reaction Diffusion Equations with *p* & *q*-Laplacian. *Communications on Pure Applied Analysis*, **4**, 9-22. https://doi.org/10.3934/cpaa.2005.4.9

[11] Jeanjean, L. (1999) On the Existence of Bounded Palais-Smale Sequences and Application to a Landesman-Lazer-Type Problem Set on R^N. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **129**, 787-809. https://doi.org/10.1017/S0308210500013147

[12] Crespo-Blanco, N., Gasiński, L., Harjulehto, P., *et al*. (2021) A New Class of Double Phase Variable Exponent Problems: Existence and Uniqueness. *Journal of Differential Equations*, **323**, 182-228. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.03.029

[13] Colasuonno, F. and Squassina, M. (2015) Eigenvalues for Double Phase Variational Integrals. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **195**, 1917-1959. https://doi.org/10.1007/s10231-015-0542-7

[14] Harjulehto, P. and Hasto, P. (2016) The Riesz Potential in Generalized Orlicz Spaces. *Forum Mathematicum*, **29**, 229-244. https://doi.org/10.1515/forum-2015-0239

[15] Musielak, J. (1983) Orlicz Spaces and Modular Spaces. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0072210

[16] Azzollini, A. and Pomponio, A. (2008) On the Schrodinger Equation in R^N under the Effect of a General Nonlinear Term. *Indiana University Mathematics Journal*, **58**, 1361-1378. https://doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3576

[17] Pellacci, B. and Squassina, M. (2011) Mountain Pass Solutions for Quasi-Linear Equations via a Monotonicity Trick. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **381**, 857-865. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.014