Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1596-1600
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136162

非简单曲线的保长度流及其应用

刘　琳*，吴玮娉

大连海事大学理学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年5月6日；录用日期：2023年6月7日；发布日期：2023年6月14日

摘　要

本文主要研究非简单曲线的保长度流及其应用，在该保长度流下，如果初始曲线是具有对称性的局部凸曲线，那么在演化过程中该曲线保持局部凸性和长度，且收敛到一个多重圆。作为该流的应用，可获得非简单曲线的等周不等式和对数型不等式。

关键词

非简单曲线，保长度流，几何不等式

A Length-Preserving Flow for Non-Simple Curves and Its Applications

Lin Liu*, Weiping Wu

School of Science, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning

Received: May 6th, 2023; accepted: Jun. 7th, 2023; published: Jun. 14th, 2023

Abstract

This article mainly studies the length-preserving flow of non-simple curves and its applications. Under this flow, if the initial curve is a locally convex curve with symmetry, this curve is still locally convex and keeps length, and converges to a multiple circle. As an application of this flow, isoperimetric inequality and logarithmic inequalities for non-simple curves can be obtained.

Keywords

Non-Simple Curves, Length-Preserving Flow, Geometric Inequalities

*通讯作者。

文章引用: 刘琳, 吴玮娉. 非简单曲线的保长度流及其应用[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1596-1600.
DOI: 10.12677/pm.2023.136162

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言及主要结果

曲线流自 20 世纪 80 年代以来受到广泛关注，相关研究已深入到图像处理、相变模拟、医学断层扫描等诸多应用领域。曲线流研究中的最简单模型是平面曲线收缩流(CSF)，嵌入曲线在该流下先变凸，而后在有限时间内收敛到一个点。曲线收缩流(CSF)下的自相似解研究对流的奇性分析至关重要，而非简单曲线中的 Abresch-Langer 曲线(全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称局部凸曲线，且 $1/2 \le m/n \le \sqrt{2}/2$)是曲线收缩流的一类重要自相似解。非简单曲线是指平面上含有自交点的浸入曲线，若非简单曲线的相对曲率处处大于零，则称这样的非简单曲线为局部凸曲线。

Epstein 和 Gage 在[1]中首次考虑了局部凸曲线的收缩流，Wang，Li 和 Chao 在[2]中讨论了全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称局部凸曲线($m/n \le 1$)的保面积流(演化过程中曲线的代数面积保持不变)。在 2001 年，潘生亮在[3]中首次提出速度项带有支撑函数的曲线流模型。近年来，速度项带有支撑函数的逆曲率流在等周型问题的研究中起到重要作用，可参见 Guan 和 Li 的综述文章[4]。Yang 和 Wu 在[5]中利用速度项带有支撑函数的保长度流(演化过程中曲线的长度保持不变)，讨论了平面凸曲线的曲率型不等式和反向等周不等式。

本文考虑非简单曲线的如下演化模型：

$$\begin{cases} X_t = \left(p - \dfrac{1}{k}\right)N, \\ X(\cdot,0) = X_0(\cdot), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 p 和 k 是演化曲线 X 的支撑函数和曲率，N 是演化曲线的单位内法向量。

因为增加演化模型的切分量不改变演化曲线的形状[6]，所以可以在流(1.1)中增加恰当的切分量 α，使得模型分析简单。通过引入局部凸曲线的切向角 θ，可取 $\alpha = -\left(p - 1/k\right)_\theta$，得到与流(1.1)等价的如下模型：

$$\begin{cases} X_t = \alpha T + \left(p - \dfrac{1}{k}\right)N, \\ X(\theta,0) = X_0(\theta), \theta \in [0, 2m\pi], \end{cases} \tag{1.2}$$

同时保证切向量 T，单位内法向量 N 和切向角 θ 均与时间 t 无关[6]。

本文主要考虑一类非简单曲线在流(1.2)下的演化，并利用该流来讨论相应的等周不等式和对数型不等式. 本文的主要结果如下：

定理 1.1 如果初始曲线是全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称局部凸曲线，且 $m/n \le 1$，那么该曲线在流(1.2)下演化保持局部凸性，长度不变，且收敛到一个 m 重圆。

定理 1.2 (等周不等式) 如果 X 是全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称局部凸曲线，且 $m/n \le 1$，那么有

$$L^2 \ge 4m\pi A, \tag{1.3}$$

其中 L 为 X 的长度，A 为 X 的代数面积，且(1.3)中等号成立当且仅当 X 是一个 m 重圆。

定理 1.3 (对数型不等式) 如果 X 是全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称局部凸曲线，且 $m/n \le 1$，那么有

$$\int_0^{2m\pi}\log k\mathrm{d}\theta\geq 2m\pi\log\frac{2m\pi}{L}, \tag{1.4}$$

$$\int_0^{2m\pi}\frac{\log k}{k}\mathrm{d}\theta\leq L\log\frac{2m\pi}{L}, \tag{1.5}$$

其中 k 为 X 的曲率，L 为 X 的长度，且等号成立当且仅当 X 是一个 m 重圆。

本文的结构安排如下：

本文分成三个部分，第一部分为引言和主要结果，该部分主要介绍本文的研究目的和主要结论；第二部分是预备知识，该部分主要介绍局部凸曲线的相关概念以及演化模型相关几何量的发展方程；第三部分为主要结果的证明，该部分利用文献[3]和[5]中的技巧给出本文重要定理的证明。

2. 预备知识

设 X 是全曲率为 $2m\pi$ 的局部凸曲线，θ 为局部凸曲线的切向角，则 X 的支撑函数[1]定义为

$$p(\theta)=-X\cdot N.$$

局部凸曲线 X 的曲率与支撑函数满足如下关系[1]：

$$k=\frac{1}{p_{\theta\theta}+p}. \tag{2.1}$$

利用支撑函数，局部凸曲线 X 的长度和代数面积的可以表示为[1]：

$$L=\int_0^{2m\pi}p(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{2.2}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2m\pi}\left(p^2(\theta)-p_\theta^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta. \tag{2.3}$$

类似文献[3]和[6]中计算可得：

引理 2.1 若局部凸曲线按流(1.2)演化，则支撑函数、曲率、长度和代数面积的发展方程分别为

$$p_t=\frac{1}{k}-p, \tag{2.4}$$

$$k_t=-k^2\left(\frac{1}{k}\right)_{\theta\theta}, \tag{2.5}$$

$$L_t=0, \tag{2.6}$$

$$A_t=-2A+\int_0^{2m\pi}\frac{1}{k^2}\mathrm{d}\theta. \tag{2.7}$$

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 记曲率半径 $\rho=1/k$，由(2.5)可得

$$\rho_t=\rho_{\theta\theta}.$$

若 $m=\min\left\{\rho(\theta,0)\,|\,\theta\in[0,2m\pi]\right\}$，$M=\max\left\{\rho(\theta,0)\,|\,\theta\in[0,2m\pi]\right\}$，根据抛物方程的极值原理，$m\leq\rho(\theta,t)\leq M$。由此，对任意时间 t，$k(\theta,t)=1/\rho(\theta,t)>0$，即初始曲线在演化过程中保持局部凸性。再由一致抛物方程的正则性理论，可得

$$\left|\rho^{(i)}\right|\leq C_i,$$

其中 $\rho^{(i)}$ 表示 ρ 的 i 阶导数，C_i 为与时间无关的常数。因此，流(1.2)在 $[0,\infty)$ 存在。

为说明流(1.2)的收敛性，记 L_0 为初始曲线的长度，考虑几何量

$$Q(t)=\int_0^{2m\pi}(\rho-c)^2\,\mathrm{d}\theta,\ c=L_0/2m\pi.$$

通过 $L_t=0$ 和分部积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}&=2\int_0^{2m\pi}(\rho-c)\rho_t\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^{2m\pi}(\rho-c)\rho_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta\\&=-2\int_0^{2m\pi}\rho_\theta^2\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^{2m\pi}(\rho-c)\mathrm{d}\theta=0$，根据 Wirtinger 不等式[7]可知

$$\int_0^{2m\pi}\rho_\theta^2\mathrm{d}\theta\ge\frac{1}{m^2}\int_0^{2m\pi}(\rho-c)^2\,\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\le-\frac{2}{m^2}\int_0^{2m\pi}(\rho-c)^2\,\mathrm{d}\theta=-\frac{2Q}{m^2},$$

这表明

$$Q(t)\le Q(0)\mathrm{e}^{-\frac{2t}{m^2}}.$$

因此，当 $t\to\infty$ 时，$Q(t)\to0$，从而，$\rho=1/k\to c$，即初始曲线收敛到半径为 $L_0/2m\pi$ 的 m 重圆。

定理 1.2 的证明 根据(2.1)，(2.3)和(2.7)，演化曲线的代数面积的发展方程可以重新表示为

$$A_t=\int_0^{2m\pi}\left(p_{\theta\theta}^2-p_\theta^2\right)\mathrm{d}\theta.$$

由于演化曲线是全曲率为 $2m\pi$ 的 n 重对称的，且 $m/n\le1$，则支撑函数 p 是周期为 $2m\pi/n\le2\pi$ 的函数。因此，根据 Wirtinger 不等式[7]，有

$$A_t=\int_0^{2m\pi}\left(p_{\theta\theta}^2-p_\theta^2\right)\mathrm{d}\theta\ge0.$$

利用定理 1.1 的结论，可得

$$L(0)^2=L(\infty)^2=4m\pi A(\infty)\ge4m\pi A(0),$$

且等号成立当且仅当 $p_\theta=0$，即对任意时间 t，p 为常数，这表明其为 m 重圆。

定理 1.3 的证明 几何量 $\int_0^{2m\pi}\log\rho\mathrm{d}\theta$ 的发展方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2m\pi}\log\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2m\pi}\frac{\rho_t}{\rho}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2m\pi}\frac{\rho_{\theta\theta}}{\rho}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2m\pi}\frac{\rho_\theta^2}{\rho^2}\mathrm{d}\theta\ge0.$$

由此可得

$$\int_0^{2m\pi}\log\rho(\theta,0)\mathrm{d}\theta\le\int_0^{2m\pi}\log\rho(\theta,\infty)\mathrm{d}\theta=2m\pi\log\frac{L_0}{2m\pi},$$

再由 $\rho=1/k$ 可得(1.4)，(1.4)等号成立当且仅当 $\rho_\theta=0$，即对任意时间 t，ρ 为常数，表明其为 m 重圆。

类似地，可以考虑

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2m\pi}\rho\log\rho\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2m\pi}\frac{\rho_\theta^2}{\rho}\mathrm{d}\theta\le0.$$

由此可得

$$\int_0^{2m\pi}\rho(\theta,0)\log\rho(\theta,0)\mathrm{d}\theta\geq\int_0^{2m\pi}\rho(\theta,\infty)\log\rho(\theta,\infty)\mathrm{d}\theta=L_0\log\frac{L_0}{2m\pi},$$

再由 $\rho=1/k$ 可得(1.5)，(1.5)等号成立当且仅当 $\rho_\theta=0$，即对任意时间t， ρ 为常数，表明其为m重圆。

注 鉴于平面凸曲线的对数型不等式

$$\int_0^{2\pi}\log\left(k\sqrt{A/\pi}\right)\mathrm{d}\theta\geq 0$$

和

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{k}\log\left(k\sqrt{A/\pi}\right)\mathrm{d}\theta+\frac{\sqrt{L^2-4\pi A}}{2}\log\left(\frac{L+\sqrt{L^2-4\pi A}}{L-\sqrt{L^2-4\pi A}}\right)\geq 0$$

在对数型曲线流的渐近行为研究中起到重要作用(参见潘生亮，高来源和史珂的文章[8])，定理1.3的对数型不等式也可以用来考虑非简单曲线的对数型演化问题。

参考文献

[1] Epstein, C.L. and Gage, M. (1987) The Curve Shortening Flow. In: Chorin, A.J. and Majda, A.J., Eds., *Wave Motion*: *Theory*, *Modelling*, *and Computation*, Springer, New York, NY, 15-59. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9583-6_2

[2] Wang, X.L., Li, H.L. and Chao, X.L. (2017) Length-Preserving Evolution of Immersed Closed Curves and the Isoperimetric Inequality. *Pacific Journal of Mathematics*, **290**, 467-479. https://doi.org/10.2140/pjm.2017.290.467

[3] 潘生亮. 几何不等式与曲率流[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2001.

[4] Guan, P.F. and Li, J.F. (2021) Isoperimetric Type Inequalities and Hypersurface Flows. *Journal of Mathematical Study*, **54**, 56-80. https://doi.org/10.4208/jms.v54n1.21.03

[5] Yang, Y. and Wu, W. (2021) The Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves through a Length-Preserving Flow. *Archiv der Mathematik*, **116**, 107-113. https://doi.org/10.1007/s00013-020-01541-5

[6] Chou, K.S. and Zhu, X.P. (2001) The Curve Shortening Problem. Chapman & Hall/CRC, New York. https://doi.org/10.1201/9781420035704

[7] Green, M. and Osher, S. (1999) Steiner Polynomials, Wulff Flow, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves. *Asian Journal of Mathematics*, **3**, 659-676. https://doi.org/10.4310/AJM.1999.v3.n3.a5

[8] Gao, L.Y., Pan, S.L. and Shi, K. (2021) A Log-Type Non-Local Flow of Convex Curves. *Communications in Analysis and Geometry*, **29**, 1157-1182. https://doi.org/10.4310/CAG.2021.v29.n5.a5