Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1643-1651
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136167

Hans汉斯

严格α-对角占优M-矩阵A的$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的上界估计

罗雨薇，莫宏敏*，陈胜男

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2023年5月11日；录用日期：2023年6月13日；发布日期：2023年6月21日

摘 要

利用严格α-对角占优M-矩阵的元素性质，特殊矩阵级数的收敛性，矩阵范数的性质，矩阵分裂技巧以及严格对角占优M-矩阵逆的无穷范数上界，得到了严格α-对角占优M-矩阵A的$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$一个新的上界估计式。数值例子说明新估计式是可行的、有效的。

关键词

严格α-对角占优矩阵，M-矩阵，无穷范数，上界

Upper Estimates of $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ for Strictly α-Diagonally Dominant M-Matrices

Yuwei Luo, Hongmin Mo*, Shengnan Chen

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: May 11th, 2023; accepted: Jun. 13th, 2023; published: Jun. 21st, 2023

Abstract

By using the properties of elements of strictly α-diagonally dominant M-matrices, the convergence of special matrix series, the properties of matrix norm, matrix splitting techniques, and the infinite norm upper bound for the inverse of strictly diagonally dominant M-matrices, a new upper bound estimation formula of $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ for strictly α-diagonally dominant M-matrices is obtained. Numerical examples show that the new estimation formula is feasible and effective.

*通讯作者。

文章引用: 罗雨薇, 莫宏敏, 陈胜男. 严格α-对角占优M-矩阵A的$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$的上界估计[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1643-1651.
DOI: 10.12677/pm.2023.136167

Keywords

Strict α-Diagonally Dominant Matrix, M-Matrices, Infinite Norm, Upper Bound

1. 引言

线性互补问题是双矩阵规划问题、线性规划和二次规划的统一结合，是一类重要的优化问题，也是运筹学与计算数学相互交叉的一个研究领域，特殊矩阵线性互补问题解的误差界的研究是许多学者研究的热点。2006 年，文献[1]将 P-矩阵线性互补问题解的误差界的计算变成 P-矩阵线性区间系统问题，得到 P-矩阵线性互补问题解的误差界的一个新估计式，此后 P-矩阵子类的线性互补问题解的误差界的研究大都基于上述结果。如弱链对角占优 B-矩阵[2] [3]、B^S-矩阵[4]、Nekrosov-矩阵[5]等。许多特殊矩阵线性互补问题解的误差界都可利用逆矩阵的无穷范数来进行估计，将逆矩阵无穷范数的估计式应用在线性互补问题解的误差界估计上，也一直是一个热门的研究课题。B-矩阵、B^S-矩阵和弱链对角占优 B-矩阵的线性互补问题解的误差界[6] [7] [8] [9]就是利用严格对角占优 M-矩阵逆的无穷范数上界来进行估计的。

严格对角占优 M-矩阵是一类应用背景非常丰富的特殊矩阵。1975 年，文献[10]提出当矩阵 A 是严格对角矩阵时，矩阵 A 的 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的估计式为：

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le \frac{1}{\min\left\{\left|a_{ii}\right|-\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|\right\}},\quad i\in N.$$

1996 年，文献[11]给出弱对角占优 M-矩阵逆矩阵的无穷范数的上界估计式，并将弱对角占优 M-矩阵的双边边界应用在电路动力学中，使得 M-矩阵逆矩阵无穷范数的估计范围及在其应用问题中有了重大突破，引起了国内外众多学者们的广泛关注。2007 年，文献[12]利用新的方法得到关于严格对角占优 M-矩阵逆矩阵的新上界估计式，这将严格对角占优 M-矩阵逆矩阵的无穷范数的研究推向了一个新的高度。

严格 α-对角占优 M-矩阵是一类由严格对角占优 M-矩阵拓展而来的特殊矩阵，许多学科与研究领域都涉及到该类矩阵，例如在运筹学、物理学、科学计算和工程应用、控制论、经济数学等方面严格 α-对角占优 M-矩阵都有很大的实用价值。同时在矩阵扰动分析、矩阵方程组的求解时需要考虑系数矩阵的条件数问题，此时就需要对矩阵逆的无穷范数的上界进行估计，因此对其逆矩阵的无穷范数的上界进行估计是很有必要的。2013 年，文献[13]给出严格 α-对角占优 M-矩阵 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的上界：

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty \le \frac{\kappa_1(B)}{1-\kappa_1(B)\max\limits_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]},\tag{1}$$

其中，

$$\kappa_1(B)=\frac{1}{\left|b_{11}\right|-\sum\limits_{k=2}^{n}\left|b_{1k}\right|p_{k1}(B)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\left|b_{ii}\right|-\sum\limits_{k\ne i,i\le k\le n}^{n}\left|b_{ik}\right|p_{ki}(B)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_j(B)l_i(B)}\right].$$

此后，文献[14] [15] [16]等又给出了几个优于文献[13]结果的估计式。本文将对该问题做进一步研究，给出严格 α-对角占 M-矩阵逆的无穷范数的一个新的估计式，并用数值算例证明新结果的可行性与有效性。

2. 预备知识

为了方便讨论，本文引进下述记号：设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，定义：

$$R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,C_i(A)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ji}|,r_i(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$d_i(A)=\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|},J(A)=\{i\in N:d_i<1\},u_i(A)=\frac{\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|},$$

$$l_k(A)=\max_{k\le i\le n}\left\{\frac{\sum_{j\neq i,k\le j\le n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right\},l_n(A)=u_n(A)=0,$$

$$w_{ij}(A)=\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum_{k\neq j,i}|a_{ik}|},i\neq j,j<k\le n,w_i(A)=\max_{j\neq i}\{w_{ij}(A)\},$$

$$p_{ij}(A)=\frac{|a_{ij}|+\sum_{k\neq i,j}|a_{ik}|w_k(A)}{|a_{ii}|},i\neq j,j<k\le n,$$

$$w_{ij}^{(m)}(A)=\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum_{k\neq j,i}|a_{ik}|},j\neq i,m\le i\le n,m\le k\le n,m\le j\le n,m\in N,$$

$$w_i^{(m)}(A)=\max_{j\neq i}\{w_{ij}^{m}(A)\},j\neq i,m\le i\le n,m\le k\le n,m\le j\le n,m\in N,$$

$$m_{ij}(A)=\frac{|a_{ij}|+\sum_{k\neq i,j}|a_{ik}|w_k^{(1)}(A)}{|a_{ii}|},i\neq j,i<k\le n,$$

$$K^{(j)}(A)=\max_{m\le i\le n}\left\{\frac{|a_{ij}|+\sum_{\substack{k\neq 1,i\\ i\le k\le n}}|a_{ik}|w_k^{(m)}(A)}{|a_{ii}|}\right\},j\neq i,m\le i\le n,m\le k\le n,m\le j\le n,m\in N.$$

下面介绍一些本文需要用到的定义和引理。

定义 1.1 [17] 令 $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$I$ 为一 n 阶单位矩阵，如果存在一个 $n\times n$ 非负矩阵 C 和一个实数 k，使得 $B=kI-C$。若 $k\ge\rho(C)$，则称 B 为 M-矩阵，若 $k>\rho(C)$，则称 B 为非奇异 M-矩阵，其中 $\rho(C)$ 为矩阵 C 的谱半径。

定义 1.2 [18] 若定义 1.1 中的 B 矩阵还满足条件：$|b_{ii}|>\sum_{j\neq i}|b_{ij}|$，$i\in\{1,\cdots,n\}$，则称 B 为严格对角占优 M-矩阵。

定义 1.3 [19] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$，$C_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$，若存在 $\alpha\in[0,1)$，使得：

$$|a_{ii}|>(1-\alpha)R_i(A)+\alpha C_i(A),i\in N,$$

则称 A 为严格 α-对角占优矩阵。当 $\alpha=0$ 时，A 为严格对角占优矩阵。

若矩阵 A 是 M-矩阵且同时满足定义 1.3，那么称 A 为严格 α-对角占优 M-矩阵。

引理 1.1 [20] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则 $I-A$ 非奇异且矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^K$ 收敛，当且仅当谱半径 $\rho(A)<1$。此时，$(I-A)^{-1}=\sum_{K=0}^{\infty}A^K$。此外，若对某个满足 $\|I\|=1$ 的矩阵范数 $\|*\|$，有 $\|A\|<1$，则 $\sum_{K=0}^{\infty}A^K$ 绝对收敛，且有 $\left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\dfrac{1}{1-\|A\|}$。

引理 1.2 [21] 设 $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优 M-矩阵，则

$$\begin{aligned}\left\|B^{-1}\right\|_\infty&\le\lambda(B)\\&=\frac{1}{|b_{11}|-\sum_{k=2}^{n}|b_{1k}|m_{k1}(B)}\\&\quad+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{|b_{ii}|-\sum_{k\ne i,i\le k\le n}|b_{ik}|m_{ki}(B)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\left\{u_j(B),1+u_j(B)\left(K^{(j)}(B)-l_j(B)\right)\right\}}{1-u_j(B)l_j(B)}\right].\end{aligned}$$

3. 主要结果

定理 2.1 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格 α-对角占优 M-矩阵，$\alpha\in[0,1)$，若集合 $N_1=\{i\in N:R_i(A)>C_i(A)\}\ne\varnothing$，且满足

$$\lambda(B)\max_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]<1,$$

则有

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le\frac{\lambda(B)}{1-\lambda(B)\max_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]},\tag{2}$$

其中

$$B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n},b_{ij}=\begin{cases}a_{ii}+\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right], & i=j,i\in N_1\\ a_{ij}, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\lambda(B)=\frac{1}{|b_{11}|-\sum_{k=2}^{n}|b_{1k}|m_{k1}(B)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{|b_{ii}|-\sum_{k\ne i,i\le k\le n}|b_{ik}|m_{ki}(B)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\max\left\{u_j(B),1+u_j(B)\left(K^{(j)}(B)-l_j(B)\right)\right\}}{1-u_j(B)l_j(B)}\right].$$

证明 由 A 是严格 α-对角占优 M-矩阵，知

$$|a_{ii}|>(1-\alpha)R_i(A)+\alpha C_i(A)=R_i(A)-\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right],\forall i\in N.$$

当 $i\in N_1$ 时，有 $R_i(A)>C_i(A)$，由上式可得

$$|b_{ii}|=a_{ii}+\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]>R_i(A)=R_i(B).$$

当 $i\notin N_1$ 时，即 $R_i(A)\le C_i(A)$，同由上式可得

$$\left|b_{ii}\right| = a_{ii} > R_i(A) - \alpha\left[R_i(A) - C_i(A)\right] \ge R_i(A) = R_i(B).$$

因此可得

$$\sum_{i\neq j} b_{ij} < \left|b_{ii}\right|,$$

那么矩阵 B 为一严格对角占优矩阵，且不难得出 B 的对角元素为正值，非对角元素非正值。

令 $B = D - P$，其中

$$D = diag\left(b_{11},\cdots,b_{nn}\right),\ P = \begin{pmatrix} 0 & \left|a_{12}\right| & \cdots & \left|a_{1n}\right| \\ \left|a_{21}\right| & 0 & \cdots & \left|a_{2n}\right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|a_{n1}\right| & \left|a_{n2}\right| & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

那么有 $D > 0$， $P \ge 0$，且 $D^{-1} > 0$，则

$$D^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{b_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \left|a_{12}\right| & \cdots & \left|a_{1n}\right| \\ \left|a_{21}\right| & 0 & \cdots & \left|a_{2n}\right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|a_{n1}\right| & \left|a_{n2}\right| & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\left|a_{12}\right|}{b_{11}} & \cdots & \frac{\left|a_{1n}\right|}{b_{11}} \\ \frac{\left|a_{21}\right|}{b_{22}} & 0 & \cdots & \frac{\left|a_{2n}\right|}{b_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\left|a_{n1}\right|}{b_{nn}} & \frac{\left|a_{n2}\right|}{b_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} > 0.$$

由

$$\rho\left(D^{-1}P\right) \le \left\|D^{-1}P\right\|_\infty,$$

且 B 为严格对角占优矩阵可得：

$$\left\|D^{-1}P\right\|_\infty = \max\left\{\sum_{j\neq i}\frac{\left|b_{ij}\right|}{b_{ii}}\right\} < 1,$$

即有 $\rho\left(D^{-1}P\right) \le \left\|D^{-1}P\right\|_\infty < 1$。

由引理 1.1，矩阵级数 $\sum_{k=0}^{n}\left(D^{-1}P\right)^K$ 收敛，且有

$$\left(I - D^{-1}H\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{n}\left(D^{-1}P\right)^K = I + D^{-1}P + \left(D^{-1}P\right)^2 + \cdots,$$

$$B^{-1} = \left(D - P\right)^{-1} = \left(I - D^{-1}P\right)^{-1}D^{-1} = \left(I + D^{-1}P + \left(D^{-1}P\right)^2 + \cdots\right)D^{-1} \ge 0,$$

因此，由 M-矩阵的等价定义可以判断矩阵 B 为一严格对角占优 M-矩阵。

再对 B 应用估计式 $\lambda(B)$ 得 $\left\|B^{-1}\right\|_\infty \le \lambda(B)$。

将矩阵 A 进行分裂，使得 $A = B - G$，其中 $B = \left(b_{ij}\right)$， $G = \left(g_{ij}\right)$，且

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ii} + \alpha\left[R_i(A) - C_i(A)\right], & i = j, R_i(A) > C_i(A) \\ a_{ij}, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$g_{ij}=\begin{cases}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right], & i=j,R_i(A)>C_i(A)\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

那么

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty=\left\|(B-G)^{-1}\right\|_\infty=\left\|\left(I-B^{-1}G\right)^{-1}B^{-1}\right\|_\infty\le\left\|\left(I-B^{-1}G\right)^{-1}\right\|_\infty\left\|B^{-1}\right\|_\infty.$$

下面对$\left\|\left(I-B^{-1}G\right)^{-1}\right\|_\infty$进行估计，

$$\rho\left(B^{-1}G\right)<\left\|B^{-1}G\right\|_\infty\le\left\|B^{-1}\right\|_\infty\left\|G\right\|_\infty\le\lambda(B)\max_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]<1,$$

满足引理 1.1 的条件。那么就有

$$\left\|\left(I-B^{-1}G\right)^{-1}\right\|_\infty\le\frac{1}{1-\left\|B^{-1}G\right\|_\infty}\le\frac{1}{1-\lambda(B)\max\limits_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]},$$

整理可得

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le\frac{\lambda(B)}{1-\lambda(B)\max\limits_{1\le i\le n}\alpha\left[R_i(A)-C_i(A)\right]}.$$

4. 数值算例

例 1 设 $A_1=\begin{pmatrix}2 & -1.8\\ -3.1 & 3\end{pmatrix}$，当 α 取 0.08 时，A_1 为一严格 α-对角占优 M-矩阵，求$\left\|A_1^{-1}\right\|_\infty$。

解：

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}7.14 & 4.29\\ 7.38 & 4.76\end{pmatrix},\left\|A_1^{-1}\right\|_\infty\approx 12.142,$$

将 A_1 进行分解：$A_1=B_1-G_1$，其中

$$B_1=\begin{pmatrix}2 & -1.8\\ -3.1 & 3.104\end{pmatrix},G_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.104\end{pmatrix}.$$

由(2)式给出的估计式可计算得出$\left\|A_1^{-1}\right\|_\infty\le 12.848$，与$\left\|A_1^{-1}\right\|_\infty$的真实值的误差较小。由该例可以证明，新估计式是可行的。

例 2 设 $A_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -0.5 & 0 & 2\end{pmatrix}$，当取 $\alpha=0.5$ 时，A_2 为一严格 α-对角占优 M-矩阵，求$\left\|A_2^{-1}\right\|_\infty$。

解：

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}0.8889 & 0.4444 & 0.6667\\ 0.5556 & 0.7778 & 0.6667\\ 0.2222 & 0.1111 & 0.6667\end{pmatrix},$$

计算得出$\left\|A_2^{-1}\right\|_\infty\approx 2$。

将 A_2 进行分解，$A_2=B_2-G_2$，其中

$$B_2=\begin{pmatrix}2.25 & -1 & -1\\ -1 & 2.5 & -1\\ -0.5 & 0 & 2\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由(1)式给出的估计式可得 $\left\|A_2^{-1}\right\|_\infty \le 11.4259$，由(2)式得 $\left\|A_2^{-1}\right\|_\infty \le 10.2645$。

又 $10.2645 < 11.4259$，那么新估计式优于文献[13]给出的估计式，说明新估计式改进了已有的结果。

例 3 设

$$A_3=\begin{pmatrix} 91 & -7 & -9 & -7 & -6 & -9 & -9 & -9 & -4 & -3 \\ -9 & 101 & -10 & -1 & -6 & -5 & -6 & -10 & -8 & -3 \\ -6 & -6 & 66 & -5 & -5 & -4 & -6 & -2 & -6 & -9 \\ -7 & -3 & -9 & 71 & -7 & -7 & -9 & -2 & -5 & -2 \\ -10 & -2 & -5 & -2 & 72 & -8 & -8 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -10 & -7 & -8 & 54 & -6 & -7 & -6 & -3 \\ -3 & -7 & -8 & -4 & -4 & -9 & 64 & -4 & -6 & -8 \\ -2 & -9 & -3 & -9 & -8 & -9 & -2 & 61 & -6 & -9 \\ -1 & -8 & -5 & -3 & -2 & -2 & -6 & -6 & 48 & -5 \\ -4 & -2 & -2 & -9 & -9 & -7 & -2 & -4 & -8 & 47 \end{pmatrix},$$

经计算当取 $\alpha = 0.06$ 时，A_3 为一严格 α-对角占优 M-矩阵，求 $\left\|A_3^{-1}\right\|_\infty$。

解：

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 0.0135 & 0.0034 & 0.0061 & 0.0048 & 0.0050 & 0.0073 & 0.0058 & 0.0057 & 0.0069 & 0.0059 \\ 0.0029 & 0.0122 & 0.0053 & 0.0033 & 0.0042 & 0.0056 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0065 & 0.0051 \\ 0.0036 & 0.0037 & 0.0202 & 0.0050 & 0.0054 & 0.0071 & 0.0060 & 0.0050 & 0.0082 & 0.0081 \\ 0.0035 & 0.0031 & 0.0067 & 0.0179 & 0.0054 & 0.0074 & 0.0063 & 0.0048 & 0.0075 & 0.0059 \\ 0.0038 & 0.0030 & 0.0058 & 0.0042 & 0.0180 & 0.0075 & 0.0059 & 0.0055 & 0.0076 & 0.0058 \\ 0.0038 & 0.0044 & 0.0090 & 0.0068 & 0.0075 & 0.0262 & 0.0076 & 0.0076 & 0.0104 & 0.0084 \\ 0.0035 & 0.0042 & 0.0074 & 0.0054 & 0.0058 & 0.0090 & 0.0209 & 0.0061 & 0.0091 & 0.0086 \\ 0.0037 & 0.0048 & 0.0070 & 0.0069 & 0.0072 & 0.0099 & 0.0063 & 0.0220 & 0.0100 & 0.0095 \\ 0.0030 & 0.0045 & 0.0067 & 0.0051 & 0.0053 & 0.0071 & 0.0066 & 0.0066 & 0.0277 & 0.0080 \\ 0.0044 & 0.0042 & 0.0074 & 0.0077 & 0.0082 & 0.0103 & 0.0070 & 0.0073 & 0.0116 & 0.0284 \end{pmatrix},$$

通过计算 $\left\|A_3^{-1}\right\|_\infty$ 的真实值约为 0.096316。

将 A_3 进行分解，得 $A_3 = B_3 - G_3$，其中

$$B_3=\begin{pmatrix} 91.14 & -7 & -9 & -7 & -6 & -9 & -9 & -9 & -4 & -3 \\ -9 & 101.60 & -10 & -1 & -6 & -5 & -6 & -10 & -8 & -3 \\ -6 & -6 & 66 & -5 & -5 & -4 & -6 & -2 & -6 & -9 \\ -7 & -3 & -9 & 71.24 & -7 & -7 & -9 & -2 & -5 & -2 \\ -10 & -2 & -5 & -2 & 72 & -8 & -8 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -10 & -7 & -8 & 54 & -6 & -7 & -6 & -3 \\ -3 & -7 & -8 & -4 & -4 & -9 & 64 & -4 & -6 & -8 \\ -2 & -9 & -3 & -9 & -8 & -9 & -2 & 61.42 & -6 & -9 \\ -1 & -8 & -5 & -3 & -2 & -2 & -6 & -6 & 48 & -5 \\ -4 & -2 & -2 & -9 & -9 & -7 & -2 & -4 & -8 & 47.18 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 \end{pmatrix},$$

根据(1)式可计算得出$\left\|A_3^{-1}\right\|_\infty \le 10.5439$，利用本文给的新估计式可得$\left\|A_3^{-1}\right\|_\infty \le 9.3562$。

上述三个例子说明，本文给出的严格 α-对角占优 M-矩阵逆的无穷范数的新估计式是可行的，并且改进了原有的某些结果。

基金项目

吉首大学研究生科研创新项目(JGY2023067)。

参考文献

[1] Chen, X. and Xiang, S. (2006) Computation of Error Bounds for P-Matrix Linear Complementarity Problems. *Mathematical Programming*, **106**, 513-525. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0645-9

[2] Li, C.Q. and Li, Y.T. (2016) Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems. *Numerical Algorithms*, **73**, 985-998. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0125-8

[3] Zhao, R.J., Zheng, B. and Liang, M.L. (2020) A New Error Bound for Linear Complementarity Problems with Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **367**, Article ID: 124788. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124788

[4] Sun, D. (2022) Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems Involving B^s-Matrices. *AIMS Mathematics*, **7**, 1896-1906. https://doi.org/10.3934/math.2022109

[5] Li, C.Q., Yang, S.R., Huang, H., Li, Y.T. and Wei, Y.M. (2020) Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems of Nekrasov Matrices. *Numerical Algorithms*, **83**, 355-372. https://doi.org/10.1007/s11075-019-00685-y

[6] Wang, F. (2017) Error Bounds for Linear Complementarity Problems of Weakly Chained Diagonally Dominant B-Matrices. *Journal of Inequalities & Applications*, **2017**, Article No. 33. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1303-5

[7] Gao, L. and Li, C.Q. (2017) An Improved Error Bound for Linear Complementarity Problems for B-Matrices. *Journal of Inequalities & Applications*, **2017**, Article No. 144. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1414-z

[8] 董瑛雪, 莫宏敏. B^s-矩阵线性互补问题解的误差界估计[J]. 高等学校计算数学学报, 2022, 44(3): 243-254.

[9] 董瑛雪, 莫宏敏, 周翠玲. 弱链对角占优 B-矩阵线性互补问题解的误差界估计[J]. 数值计算与计算机应用, 2022, 43(2): 154-162.

[10] Varah, J.M. (1975) A Lower Bound for the Smallest Singular Value of a Matrix. *Linear Algebra & Its Applications*, **11**, 3-5. https://doi.org/10.1016/0024-3795(75)90112-3

[11] Shivakumar, P.N., Williams, J.J., Ye, Q. and Marinov, C.A. (1996) On Two-Sided Bounds Related to Weakly Diagonally Dominant M-Matrices with Application to Digital Circuit Dynamics. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **17**, 298-312. https://doi.org/10.1137/S0895479894276370

[12] Cheng, G.H. and Huang, T.Z. (2007) An Upper Bound for $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ of Strictly Diagonally Dominant M-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **426**, 667-673. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.06.001

[13] Yang, Z., Zheng, B. and Liu, X. (2013) A New Upper Bound for $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ of α-Diagonally Dominant M-Matrix. *Advances in Numerical Analysis*, **2013**, Article ID: 980615.

[14] 赵建兴, 桑彩丽. 严格 α-对角占优 M-矩阵 A 的 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的估计[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(4): 720-724.

[15] 赵建兴, 桑彩丽. 严格 α_1-对角占优 M 矩阵 A 的 $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ 的估计[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2016, 19(1): 1-4+8.

[16] 周平, 刘金梅, 冯云再. 严格 α-对角占优 M-矩阵逆的无穷范数上界的新估计式[J]. 长春大学学报, 2020, 30(10): 1-5.

[17] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[18] 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[19] Zhang, Y., Mo, H. and Liu, J. (2009) α-Diagonally Dominant and Criteria for Generalized Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Numerical Mathematics*, *A Journal of Chinese Universities*, **31**, 119-128.

[20] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2007.

[21] 王亚强. 严格对角占优 M-矩阵一类界的新估计[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版), 2017, 37(2): 11-15.