Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1822-1828
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136185

半群 $P_{n,r}$ 的极大(正则)子半群

杨平平，张梁松，罗永贵[*]

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年5月21日；录用日期：2023年6月22日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

设 S_n 和 P_n 分别是 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群和部分变换半群。对 $0\le r\le n$，令 $P(n,r)=\{\alpha\in P_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\le r\}$，则 $P(n,r)$ 是部分变换半群 P_n 的子半群。对 $0\le r\le n-1$，考虑半群 $P_{n,r}=P(n,r)\cup S_n$ 的极大(正则)子半群。通过对半群 $P_{n,r}$ 格林关系的分析进一步，获得了半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的。

关键词

部分变换半群，正则半群，理想，极大子半群，极大正则子半群

The Maximal (Regular) Subsemigroups of Semigroup $P_{n,r}$

Pingping Yang, Liangsong Zhang, Yonggui Luo[*]

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: May 21st, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Let S_n and P_n be symmetric group and partial transformation semigroup on $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$, respectively. For $0\le r\le n$, put $P(n,r)=\{\alpha\in P_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\le r\}$, then the set $P(n,r)$ are the subsemigroups of P_n. For $0\le r\le n-1$. In this paper, the maximal (regular) subsemigroups of the se-

[*]通讯作者。

文章引用: 杨平平, 张梁松, 罗永贵. 半群 $P_{n,r}$ 的极大(正则)子半群[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1822-1828.
DOI: 10.12677/pm.2023.136185

migroup $P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$ has been considered. In addition, by analyzing the Green's relations, this paper proved that the maximal subsemigroups and the maximal regular subsemigroups of $P_{n,r}$ coincide.

Keywords

Partial Transformation Semigroup, Regular Semigroup, Ideals, The Maximal Subsemigroup, The Maximal Regular Semigroup

1. 引言与预备知识

设 G 是群，P 是 G 的非空子集，$\langle P\rangle$ 表示群 G 的子集 P 生成的子群。设 G 是群，H 是 G 的真子群，对 G 的任意子群 Q 都有 $H \subseteq Q \subseteq G$ 推出 $Q = H$ 或 $Q = G$，则称 H 是群 G 的极大子群(换句话说：如果 G 是群，H 是 G 的真子群，对任意的 $a \in G \setminus H$ 都有 $G = \langle\{a\}\rangle$，那么称 H 是群 G 的极大子群)。设 S 是半群，A 是 S 的非空子集，$a, e \in S$。若 $e^2 = e$，则称 e 是 S 的幂等元，A 中所有幂等元之集记为 $E(A)$。若存在 $b \in S$ 使得 $a = aba$，则称 a 是 S 的正则元，A 中所有正则元之集记为 $\mathrm{Reg}(A)$。如果 $\mathrm{Reg}(S) = S$，则称 S 是正则半群(换句话说：如果半群 S 中的每个元素都是正则的，那么称 S 是正则半群)。若存在 $b \in S$，使得 $a = aba$ 且 $b = bab$，则称 b 是 a 的逆元，a 在半群 S 中的所有逆元之集记为 $V(a)$。易见，幂等元是正则元但正则元不一定是幂等元。若任意的 $c \in A$，$r \in S$，有 $cr \in A$，即 $AS \subseteq A$，则称 A 为半群 S 的一个右理想。若任意的 $c \in A$，$r \in S$ 有 $rc \in A$，即 $SA \subseteq A$，则称 A 为半群 S 的一个左理想。若 A 既是 S 的右理想又是 S 的左理想，即 $ASA \subseteq A$，则称 A 为半群 S 的一个双边理想，简称理想。设 S 是半群，M 是 S 的真(正则)子半群，对 S 的任意(正则)子半群 T，有 $M \subseteq T$ 推出 $T = M$ 或 $T = S$，则称 M 是 S 的极大(正则)子半群(换句话说：如果 S 是(正则)半群，M 是 S 的真(正则)子半群，对任意的 $a \in S \setminus M$ 都有 $S = \langle M \cup \{a\}\rangle$，那么称 M 是 S 的极大(正则)子半群)。最感兴趣的是：如何刻划半群 S 的极大子半群；当半群 S 是正则半群时，又如何刻划半群 S 的极大正则子半群。对于有限半群具有某种性质的极大(正则)子半群的研究目前已有许多研究成果[1]-[9]。

设自然数 $n \ge 2$，$X_n = \{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$ 并赋予自然数的大小序，S_n 和 P_n 分别是 $X_n = \{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$ 上的对称群和部分变换半群。对 $0 \le r \le n$，令 $P(n,r) = \{\alpha \in P_n : |\mathrm{im}(\alpha)| \le r\}$，易见 $P(n,r)$ 是部分变换半群 P_n 的子半群且对任意的 $\{\alpha \in P(n,r)\}$，$\beta, \gamma \in P_n$ 都有 $|\mathrm{im}(\beta\alpha\gamma)| \le r$，即 $\beta\alpha\lambda \in P(n,r)$，因而 $P(n,r)$ 是部分变换半群 P_n 的双边理想。记 $SP_n = P_n \setminus S_n$，称 SP_n 为 X_n 上的奇异部分变换半群。显然 $SP_n = P(n,n-1)$。对 $0 \le r \le n-1$，令 $P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$，易证 $P_{n,r}$ 是部分变换半群 P_n 的子半群。文献[1]获得了部分变换半群的理想 $PK(n,r)$ 的极大正则子半群；文献[2]得到了全变换半群的理想 $T(n,r)$ 的极大子半群的完全分类；文献[3]得到了奇异部分变换半群 SP_n 的生成元集及其秩和幂等元秩都为 $S(n+1,r+1)$；文献[4]考虑了半群 $T_{n,r} = T(n,r) \cup S_n$ 获得了 $T_{n,r}$ 的生成集，并得到了半群 $T_{n,r}$ 的秩；文献[5]获得了半群 POD_n 的理想的极大正则子半群；文献[6]得到了半群 POP_n 的理想的极大正则子半群的完全分类；文献[7]获得了半群 $MC(n,r)$ 的极大子半群的完全分类；文献[8]获得了变换半群 $H^*_{(n,m)}(r)$ 的极大子半群与极大正则子半群；文献[9]得到

了半群 $T_{n,t}$ 的极大(正则)子半群的完全分类。

设 A 是 X_n 的子集合，ε_A 表示集合 A 上的恒等变换，易见恒等变换是幂等元，但幂等元不一定是恒等变换。对任意的 $\alpha\in P_n$，记 $\ker(\alpha)=\{(x,y)\in\operatorname{dom}(\alpha)\times\operatorname{dom}(\alpha): x\alpha=y\alpha\}$，则 $\ker(\alpha)$ 是 $\operatorname{dom}(\alpha)$ 上的等价关系，称 $\ker(\alpha)$ 为 α 的核。通常用 $\operatorname{im}(\alpha)$ 表示集合 $\{x\alpha: x\in\operatorname{dom}(\alpha)\}$，称 $\operatorname{im}(\alpha)$ 为 α 的像。

通常，设 S 是半群，对任意的 $a\in S$ 分别用 L_a，R_a，$H_a=L_a\cap R_a$，D_a，J_a 表示 a 所在的 L-类，R-类，H-类，D-类，J-类。为叙述方便，引用 Green-等价关系[10] [11]。在半群 $P_{n,r}$ 中 L，R，J 有如下刻划：对任意的 $\alpha,\beta\in P_{n,r}$ 有：

$$\alpha L\beta\Leftrightarrow \operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\beta),$$

$$\alpha R\beta\Leftrightarrow \ker(\alpha)=\ker(\beta),$$

$$\alpha J\beta\Leftrightarrow |\operatorname{im}(\alpha)|=|\operatorname{im}(\beta)|。$$

易见，$L\subseteq J$，$R\subseteq J$。对 $0\le r\le n$，令 $J_r=\{\alpha\in P_{n,r}: |\operatorname{im}(\alpha)|=r\}$，则 J-类 $J_0,J_1,\cdots,J_n$ 恰好是 $P_{n,r}$ 的 $n+1$ 个 J-类，特别地，$J_0=\{\varnothing\}$，$J_n=S_n$，$P(n,r)=\{\alpha\in P_{n,r}: |\operatorname{im}(\alpha)|\le r\}=\bigcup_{s=0}^{r}J_s$，$P(n,n)=P_n$，对任意的 $\alpha\in J_r$ 有 $J_\alpha=J_r$。不难验证，对任意的 r 满足 $0\le r\le n-1$ 有 $P_{n,r}=P(n,r)\cup S_n=J_0\cup\cdots\cup J_r\cup S_n=\left(\bigcup_{s=0}^{r}J_s\right)\cup S_n$，在 $P_{n,r}$ 中有如下包含关系的双边理想链 $P(n,0)\subset P(n,1)\subset P(n,2)\subset\cdots\subset P(n,r-2)\subset P(n,r-1)\subset P(n,r)\subset P(n,r)\cup S_n=P_{n,r}$。任意取 $n,r\in N$ 且 $r\le n$，设 $\alpha\in J_r$，则 α 有如下标准形式：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{r-1} & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{r-1} & a_r\end{pmatrix}。$$

其中，$a_1<a_2<\cdots<a_r$。显然存在 $\sigma\in S_r$ (S_r 表示 $\{1,2,\cdots,r\}$ 上的对称群)，使得 $|A_{1\sigma}|\ge|A_{2\sigma}|\ge\cdots\ge|A_{r\sigma}|\ge 1$。记 $\operatorname{part}(\alpha)=(|A_{1\sigma}|,|A_{2\sigma}|,\cdots,|A_{r\sigma}|)$，称 $\operatorname{part}(\alpha)$ 为 α 的划分。注意，记 ε 是 X_n 上的恒等变换。

在 J_r 上引入关系~：$\alpha\sim\beta$ 即存在 $\lambda,\mu\in S_n$，使得 $\alpha=\lambda\beta\mu$。易验证~是 J_r 上的等价关系。

2. 主要结果及证明

在文[1]的基础上继续考虑半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群，得到了以下的主要结果：

定理 1 设 $0\le r\le n-1$，则半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群有并且只有如下所示的两种类型的结构：

i) $P_{n,r}\setminus[\alpha]$，$\alpha\in J_r$；

ii) $P(n,r)\cup G$，其中 G 是 S_n 的极大子群。

定理 2 设 $0\le r\le n-1$，则半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群的结构是相同的。为完成定理的证明，需要有如下引理与推论。

引理 1 [3] 设 $0\le r\le n-2$，则 $J_r\subseteq J_{r+1}J_{r+1}$。

引理 2 [3] 设 $0\le r\le n-1$，则 $P(n,r)=\langle E(J_r)\rangle$。

注意到 $J_0=\{\varnothing\}$，由引理 1 及引理 2 可得如下推论：

推论 1 设 $0\le r\le n-1$，则 $P_{n,r}=P(n,r)\cup S_n=\left(\bigcup_{s=0}^{r}J_s\right)\cup S_n=\langle E(J_r)\rangle\cup S_n$。

引理 3 设 $\alpha,\beta\in J_r$，则 $\alpha\sim\beta$ 当且仅当 $\operatorname{part}(\alpha)=\operatorname{part}(\beta)$。

证明：设 α,β 的标准表示形式如下：

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_{r-1} & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{i-1} & B_i & B_{i+1} & \cdots & B_{r-1} & B_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{r-1} & b_r \end{pmatrix},$$

其中 $a_1<a_2<\cdots<a_r$，$b_1<b_2<\cdots<b_r$。显然存在 $\sigma,\delta\in S_n$，使得 $\mathrm{part}(\alpha)=(|A_{1\sigma}|,|A_{1\sigma}|,\cdots,|A_{r\sigma}|)$，$\mathrm{part}(\beta)=(|B_{1\delta}|,|B_{2\delta}|,\cdots,|B_{r\delta}|)$，其中 $|A_{1\sigma}|\ge|A_{2\sigma}|\ge\cdots\ge|A_{r\sigma}|\ge1$ 且 $|B_{1\delta}|\ge|B_{2\delta}|\ge\cdots\ge|B_{r\delta}|\ge1$。

若 $\mathrm{part}(\alpha)=\mathrm{part}(\beta)$，则 $(|A_{1\sigma}|,|A_{2\sigma}|,\cdots,|A_{r\sigma}|)=(|B_{1\delta}|,|B_{2\delta}|,\cdots,|B_{r\delta}|)$ 从而 $|A_{i\sigma}|=|B_{i\delta}|(1\le i\le r)$。设 γ 是将 A_i 映射到 $B_i(1\le i\le r)$ 的置换。设：

$$\eta=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{r-1} & b_r & X_n\setminus\mathrm{im}(\beta) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{r-1} & a_r & X_n\setminus\mathrm{im}(\alpha) \end{pmatrix},$$

则 $\alpha=\gamma\beta\eta$，因此 $\alpha\sim\beta$。

反之，若 $\alpha\sim\beta$，则存在 $\gamma,\eta\in S_n$，使得 $\alpha=\gamma\beta\eta$。显然 $\gamma\beta\in J_r$ 且 $X_n/\ker(\gamma\beta)=\{B_1\gamma^{-1},B_2\gamma^{-1},\cdots,B_r\gamma^{-1}\}$。由 γ 是置换可得，$|B_i\gamma^{-1}|=|B_i|(1\le i\le r)$，从而 $\mathrm{part}(\beta)=\mathrm{part}(\gamma\beta)$。任意取 $(x,y)\in\ker(\alpha)$，则 $x\alpha=y\alpha$，于是 $x\gamma\beta=x\alpha\eta^{-1}=y\alpha\eta^{-1}=y\gamma\beta$。从而 $\ker(\alpha)\subseteq\ker(\gamma\beta)$。同理可得，$\ker(\alpha)\supseteq\ker(\gamma\beta)$。因此，$\ker(\alpha)=\ker(\gamma\beta)$，进而 $\mathrm{part}(\alpha)=\mathrm{part}(\gamma\beta)=\mathrm{part}(\beta)$。

对任意的变换 $\beta\in J_r$，记：$[\beta]=\{\beta\in J_r:\beta\sim\alpha\}$，$\Gamma_{n,r}=\{[\alpha]:\alpha\in J_r\}$，其中 $[\alpha]=\bigcup\limits_{\delta\in S_n}\delta R_\alpha$。则 $\Gamma_{n,r}$ 是 ~在 J_r 上面所确定的一个分类，并且 $[\alpha]$ 是 α 变换所存在的一个等价的类，有 $J_r=\bigcup\limits_{\alpha\in J_r}[\alpha]$。

引理 4 [11] 设 $\alpha,\beta\in P_n$，则 $|\mathrm{im}(\alpha\beta)|\le\{|\mathrm{im}(\alpha)|,|\mathrm{im}(\beta)|\}$。

引理 5 设 I 是部分变换半群 P_n 的非空子集，则 I 是部分变换半群 P_n 的理想当且仅当 $r\in\{0,1,2,\cdots,n\}$ 使得 $I=P(n,r)$。

证明：若存在 $r\in\{0,1,2,\cdots,n\}$ 使得 $I=P(n,r)$。对任意的 $\alpha\in I$，对任意的 $\beta,\gamma\in P_n$，由引理 4 可知 $|\mathrm{im}(\beta\alpha\gamma)|\le\{|\mathrm{im}(\beta)|,|\mathrm{im}(\alpha)|,|\mathrm{im}(\gamma)|\}\le|\mathrm{im}(\alpha)|\le r$，即 $\beta\alpha\gamma\in I=P(n,r)$，由此可见 $I=P(n,r)$ 是 P_n 的理想。

反之，设 I 是部分变换半群 P_n 的理想，记 $r=\max\{|\mathrm{im}(\alpha)|:\alpha\in I\}$，则 $I\cap\left(\bigcup\limits_{s=r+1}^{n}J_s\right)=\varnothing$，即 $I\subseteq\left(\bigcup\limits_{s=0}^{r}J_s\right)=P(n,r)$。

若 $r=n$，那么 $I\cap S_n\ne\varnothing$，则存在 $\alpha\in I\cap S_n$ 使得 $\alpha^{n!}=\varepsilon_{X_n}\in I\cap S_n$。对任意 $\alpha\in P_n$，$\alpha=\varepsilon_{X_n}\alpha\in I$ 且 $\alpha=\alpha\varepsilon_{X_n}\in I$，则 $P_n\subseteq I$。由 I 是部分变换半群 P_n 的非空子集可知 $I\subseteq P_n$。易见 $I=P_n$。

若 $0\le r\le n-1$，则 $I\cap J_r\ne\varnothing$，即存在 $\alpha\in I\cap J_r$。对任意的 $\beta\in J_\alpha=J_r$，由格林 J 关系的定义可知，存在 $\sigma,\tau\in P_n$，使得 $\beta=\sigma\alpha\tau$。由 I 是部分变换半群 P_n 的理想可知 $\beta\in I$，即 $J_\alpha=J_r\subseteq I$，由引理 2 可知 $P(n,r)=\bigcup\limits_{s=0}^{r}J_s=\langle E(J_r)\rangle\subseteq I$。综上可知 $I=P(n,r)$。

引理 6 设 S 是正则半群，则 I 是半群 S 的理想，则 I 是半群 S 的正则子半群。

证明：由 I 是半群 S 的理想可得 I 是半群 S 的子半群。对任意的 $a\in I\subseteq S$，由 S 的正则性可知存在 $b\in S$ 使得 $a=aba$。再由 I 是半群 S 的理想可知 $bab\in SIS\subseteq I$。易见 $a(aba)a=(aba)ba=aba=a$，即 a 是理想 I 中的正则元，由 a 的任意性可知 I 是半群 S 的正则子半群。

命题 1 设 $0\le r\le n-1$，则 $P_{n,r}=P(n,r)\cup S_n$ 是部分变换半群 P_n 的正则子半群。

证明：对任意的 $\alpha,\beta\in P_{n,r}$，若 $\alpha,\beta\in S_n$，则 $\alpha\beta\in S_n$；若 $\alpha,\beta\in P(n,r)$ 或 $\alpha\in S_n$，$\beta\in P(n,r)$ 或

$\alpha \in P_{n,r}, \beta \in S_n$，由引理 4 可知$\alpha\beta \in P(n,r)$，即$P_{n,r}$是部分变换半群$P_n$的子半群。再由引理 5 及引理 6 可知$P_{n,r}$是部分变换半群$P_n$的正则子半群。并且由于对于$S_n$而言，它不仅是部分变换半群$P_n$的子半群而且它还是部分变换半群$P_n$的子群，则$P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$是部分变换半群$P_n$的正则子半群。

类似引理 5 的证明可得如下命题：

命题 2 设 I 是半群$P_{n,r}$的非空子集，则 I 是半群$P_{n,r}$的理想当且仅当存在$s \in \{0,1,2,\cdots,r-1,r\}$使得$I = P(n,s)$或$I = P_{n,r}$。

引理 7 设$0 \le r \le n-1$，S是$P_{n,r}$的子半群，若$S_n \subseteq S$且对任意的$\alpha \in J_r$，$S \cap [\alpha] \ne \varnothing$，则$S = P_{n,r}$。

证明：注意到$J_r = \bigcup_{\alpha \in J_r} [\alpha]$。则存在$\delta \in S \cap [\alpha]$以及$\sigma \in [\alpha]$，则$\delta \sim \sigma$，这有$\lambda, \mu \in S_n$，于是$\sigma = \lambda\delta\mu$，满足有$\sigma \in \langle S_n, \delta \rangle \subseteq S$。通过$\sigma$变换本身的任意性就可以有，$J_r = \bigcup_{\alpha \in J_r} [\alpha] \subseteq S$。于是由引理 2 可得$P(n,r) = \langle E(J_r) \rangle = \langle J_r \rangle \subseteq S$，从而由$S_n \subseteq S$可得$S = P(n,r) \cup S_n = P_{n,r}$。

引理 8 设$0 \le r \le n-1$，则$N = P_{n,r} \setminus [\alpha] (\alpha \in J_r)$是$P_{n,r}$的极大子半群。

证明：第一步：证明N是半群$P_{n,r}$的子半群。

注意到$J_r = \bigcup_{\alpha \in J_r} [\alpha]$且$P_{n,r} \setminus [\alpha] = S_n \cup P(n,r-1) \cup (J_r \setminus [\alpha])$，显然存在$\gamma \in P_{n,r} \setminus [\alpha]$。任意取$\delta, \sigma \in P_{n,r} \setminus [\alpha]$，若$\delta, \sigma \in [\alpha]$，则$\delta, \sigma \in J_r$且$\delta\sigma \sim \alpha$。于是存在$\lambda, \mu \in S_n$，使得$\delta\sigma = \lambda\alpha\mu \in J_r$。由$\delta, \sigma, \delta\sigma \in J_r$可得$\ker(\delta\sigma) = \ker(\delta)$，从而$\mathrm{part}(\delta\sigma) = \mathrm{part}(\delta)$，显然$\lambda\alpha\mu \sim \alpha$。由引理 3 可得，$\mathrm{part}(\lambda\alpha\mu) = \mathrm{part}(\alpha)$。于是$\mathrm{part}(\delta) = \mathrm{part}(\delta\sigma) = \mathrm{part}(\lambda\alpha\mu) = \mathrm{part}(\alpha)$，从而由引理 3 可得$\delta \sim \alpha$，与$\delta \in P_{n,r} \setminus [\alpha]$矛盾。因此，$P_{n,r} \setminus [\alpha]$是$P_{n,r}$的子半群。

第二步：证明N是半群$P_{n,r}$的极大子半群。

假设 T 是$P_{n,r}$的子半群且$[P_{n,r} \setminus [\alpha]] \subset T$，则$S_n \subseteq T$且$T \cap [\alpha] \ne \varnothing$，由引理 7 可得$S = P_{n,r}$。因此，$P_{n,r} \setminus [\alpha]$是$P_{n,r}$的极大子半群。

引理 9 设$0 \le r \le n-1$且G是群S_n的极大子群，则$M = P(n,r) \cup G$是$P_{n,r}$的极大子半群。

证明：第一步：证明M是半群$P_{n,r}$的子半群。

假设对于任意的$\alpha, \beta \in M$，如果有$\alpha, \beta \in G$，可得$\alpha\beta \in G$；如果有$\alpha, \beta \in P(n,r)$，可得$\alpha\beta \in P(n,r)$；如果有$\alpha \in G$，$\beta \in P(n,r)$，可得$\alpha\beta \in J_\beta \subseteq P(n,r)$；如果有$\alpha \in P(n,r)$，$\beta \in G$，可得$\alpha\beta \in J_\alpha \subseteq P(n,r)$，即$M$是$P_{n,r}$的子半群。

第二步：证明M是半群$P_{n,r}$的极大子半群。

若存在半群$P_{n,r}$的子半群T使得$M = P(n,r) \cup G \subseteq T \subseteq P_{n,r}$。

如果$T = M = P(n,r) \cup G$，对任意的$\gamma \in P_{n,r} \setminus T$，则$\gamma \in S_n \setminus G$。由 G 是群S_n的极大子群可知$\langle G \cup \{\gamma\} = S_n \rangle$，易见，对任意的$\gamma \in P_{n,r} \setminus T$有$\langle T \cup \{\gamma\} \rangle = P_{n,r}$，即$M = P(n,r) \cup G$是半群$P_{n,r}$的极大子半群。

若$M = P(n,r) \cup G \subset T \subseteq P_{n,r}$，则$T \cap (S_n \setminus G) \ne \varnothing$，一定存在$\tau \in T \cap (S_n \setminus G)$。再由$G$是群$S_n$的极大子群可知$\langle G \cup \{\tau\} \rangle = S_n$，即$S_n \subseteq T$。注意到$P(n,r) \subseteq T$，可得$P_{n,r} \subseteq T$。结合$T \subseteq P_{n,r}$可知$T = P_{n,r}$矛盾。综上可得，$M = P(n,r) \cup G$是$P_{n,r}$的极大子半群。

定理 1 的证明：由引理 8 可知对于$N = P_{n,r} \setminus [\alpha] (\alpha \in J_r)$而言，它是$P_{n,r}$的极大子半群；而且还可通过引理 9 可以知道的是$M = P(n,r) \cup G$是半群$P_{n,r}$的极大子半群。反过来，可假设$S$是$P_{n,r}$的极大子半群，于是$S_n \cap S \ne \varnothing$(否则，$S_n \cap S = \varnothing$必有$S \subseteq P(n,r) \subset P_{n,r} \cup \varepsilon_{X_n} \subset P_{n,r}$。考虑极大子半群的定义可得，半群$S$不是半群$P_{n,r}$的极大子半群，这就会与$S$是半群$P_{n,r}$的极大子半群产生矛盾，于是$S_n \cap S \ne \varnothing$)。

i) 若$S_n \subseteq S$，则有引理 7 及S的极大性可得，变换$\alpha \in J_r$，有$S \cap [\alpha] = \varnothing$，则

$S \subseteq S_n \cup (P(n,r) \setminus [\alpha]) = P_{n,r} \setminus [\alpha] = N$，所以再通过 S 的极大性得到了 $S = N = P_{n,r} \setminus [\alpha]$。

ii) 若 $S_n \cap S \subset S_n$，令 $G = S_n \cap S$，则 G 是半群 S_n 的子半群。假设存在 S_n 的子半群 G^*，使得 $G \subset G^*$。可以假设 $S^* = P(n,r) \cup G^*$，有 S^* 是变换半群 $P_{n,r}$ 的子半群并且还有 $S \subset S^*$，因此可以通过 S 的极大性可以知道 $S^* = P_{n,r}$，所以 $G^* = S_n$。 因此，G 是群 S_n 的极大子半群。注意到 $S \subseteq P(n,r) \cup G = M \subset P_{n,r}$，再由引理 9 及 S 的极大性可得 $S = M = P(n,r) \cup G$。

引理 10 设 $0 \le r \le n-1$ 且 G 是群 S_n 的极大子群，则 $M = P(n,r) \cup G$ 是 $P_{n,r}$ 的正则子半群。

证明：注意到 $P_{n,n-1} = P_n = SP_n \cup S_n = S_n \cup P(n,n-2) \cup J_{n-1}$。由引理 5 和引理 6 可知 $P(n,r)$ 是 $P_{n,r}$ 的正则子半群。因为 G 是群 S_n 的子群，所以有 G 是 $P_{n,r}$ 的正则子半群。由此可见 $M = P(n,r) \cup G$ 是 $P_{n,r}$ 的正则子半群。

引理 11 设 $0 \le r \le n-1$，则 $N = P_{n,r} \setminus [\alpha] (\alpha \in J_r)$ 是 $P_{n,r}$ 的正则子半群。

证明：易知有 $P_{n,r} \setminus [\alpha] = S_n \cup P(n,r-1) \cup (J_r \setminus [\alpha])$，所以 S_n 是正则半群。通过引理 6 可得到，$P(n,r-1)$ 是正则半群。如果 $J_r \setminus [\alpha] \ne \varnothing$，对于 $\gamma \in J_r \setminus [\alpha]$，则 $|\mathrm{im}(\alpha)| = r$。令

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r \end{pmatrix},$$

其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$。令

$$\delta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{i-1} & B_i & B_{i+1} & \cdots & B_r \\ \max A_1 & \max A_2 & \cdots & \max A_{i-1} & \max A_i & \max A_{i+1} & \cdots & \max A_r \end{pmatrix},$$

当中有 $a_i \in B_i$ 以及 $|A_i| = |B_i| (1 \le i \le r)$，则必有 $\gamma = \gamma\delta\gamma$ 以及 $\mathrm{part}(\gamma) = \mathrm{part}(\delta)$，通过引理 2 可以知道有 $\delta \sim \gamma$，则 $\delta \in P_{n,r} \setminus [\gamma]$。由 $\delta = \gamma\delta\gamma$ 可以知道，变换 γ 是正则的变换半群。于是由 γ 的任意性可以有，半群 $P_{n,r} \setminus [\alpha]$ 是正则半群。由引理 2，引理 5 及引理 6 易知半群 $P_{n,r}$ 是正则半群。接下来讨论半群 $P_{n,r}$ 的极大正则半群。

定理 2 设 $0 \le r \le n-1$，则半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群的结构是相同的。

证明：由引理 10 及引理 11 可得 M 和 N 都是 $P_{n,r}$ 的正则子半群，所有说这就能类似于定理 1 的证明可以知道，半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群都是正则半群。则一定有半群 $P_{n,r}$ 的极大正则子半群必定是包含在某一个极大子半群当中。因此，半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的即结构相同。

3. 总结及展望

本文针对极大子半群、极大正则子半群的定义以及半群 $P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$ 的内部结构特点与性质，完整的解决了 $0 \le r \le n-1$ 时半群 $P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$ 的极大(正则)子半群。进一步，获得了半群 $P_{n,r}$ 的极大子半群和极大正则子半群是一致的。本文的研究方法对于其他此结构类型的半群具有一定的借鉴意义。

本文研究的是半群 $P_{n,r} = P(n,r) \cup S_n$ 的极大(正则)子半群，对于当 $0 \le r \le n-2$ 时半群 $SP_{n,r} = V(n,r) \cup S_n$ 的这种结构还待完善，这也是文章中存在的不足之处，因此，在今后的研究中将会对这种情形进行讨论，将半群 $SP_{n,r} = V(n,r) \cup S_n$ 的极大子半群的研究推广与完善。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金项目(黔师新苗[2021] B08 号)；国家自然科学基金(11861022)。

参考文献

[1] You, T.J. (2002) Maximal Regular Subsemigroups of Certain Semigroups of Transformations. *Semigroup Forum*, **64**, 391-396. https://doi.org/10.1007/s002330010117

[2] Yang, H.B. and Yang, X.L. (2004) Maximal Subsemigroups of Finite Transformation Semigroups $K(n,r)$. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **20**, 475-482. https://doi.org/10.1007/s10114-004-0367-6

[3] Garba, G.U. (1990) Idempotents in Partial Transformation Semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **116**, 359-366. https://doi.org/10.1017/S0308210500031553

[4] Ayik, G., Ayik, H. and Howie, J.M. (2005) On Factorizations and Generators in Transformation Semigroups. *Semigroups Forum*, **70**, 225-237. https://doi.org/10.1007/s00233-004-0145-x

[5] 高荣海, 游泰杰. 半群 POD_n 的理想的极大正则子半群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(5): 8-11.

[6] 赵颐, 游泰杰, 陈云坤. 半群 POD_n 的理想的极大正则子半群[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2015, 47(2): 31-34.

[7] 金久林, 游泰杰. 半群 $MC(n,r)$ 的极大子半群[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(3): 523-530.

[8] 袁月, 赵平. 半群 $H^*_{(n,m)}(r)$ 的极大子半群与极大正则子半群[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(12): 19-24.

[9] 胡华碧, 赵平. 半群 $T_{n,r}$ 的极大(正则)子半群的完全分类[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(6): 5-8.

[10] Howie, J.M. (1995) Fundamental of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.

[11] Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V. (2009) Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-281-4