Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1883-1887
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136192

预解算子方法求解一类*H*单调变分包含组问题

黎穷远

西南石油大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

本文研究了实希尔伯特空间上一类*H*单调变分包含组问题，并利用预解算子构造了求解该变分包含组的迭代算法，在适当的假设条件下，证明了算法的收敛性。

关键词

预解算子，*H*单调，变分包含

Solving a Class of *H* Monotonic Variational Inclusion System Problems Using the Resolvent Operator Method

Qiongyuan Li

School of Sciences of Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan

Received: May 22nd, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

In this paper, we study a class of *H* monotone variational inclusions in real Hilbert space, and construct an iterative algorithm for solving the system of variational inclusions by using resolvent operators. Under appropriate assumptions, the convergence of the algorithm is proved.

Keywords

Resolvent Operator, *H* Monotonicity, Variations Include

文章引用: 黎穷远. 预解算子方法求解一类 H 单调变分包含组问题[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1883-1887.
DOI: 10.12677/pm.2023.136192

1. 引言

众所周知，变分不等式是研究经济、管理和工程中出现的各种网络均衡问题的有用工具[1]-[6]。因此，它引起了数学、物理学、经济学等领域大量研究人员的广泛关注。变分包含问题是变分不等式问题的一个有用且重要的推广。求解变分包含问题时，通常需要集值映射为极大单调的，相应的求解算法可以参考[7]。Fang 和 Huang [8]提出了一种不同于极大单调的集值映射的另一种单调性-H 单调。并且研究了 H 单调和极大单调之间的关系，并给出了其预解算子单值并且李普希兹的条件，并给出来了变分包含问题 $0 \in A(x)+M(x)$ 的求解算法，其中 $A(x)$ 为 H 单调的集值映像，$H(x)$ 为单值映像，该变分包含问题可以作为本文研究的一个特例。此前研究变分包含组问题都是基于集值映像为极大单调的条件下，利用预解算子方法得到变分包含组问题的迭代算法。本文研究了一类变分包含组在 H 单调条件下的求解算法并给出来了变分包含组解存在唯一的条件。

2. 预备知识

在这篇文章中，如果没有特别说明，都记 X 为一实希尔伯特空间，$\langle \cdot,\cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示内积和范数。K 为 X 上的一非空闭凸集。$X \times X$ 上的范数取和范数，即 $\|\cdot\|_{K\times K} = \|\cdot\|_K + \|\cdot\|_K$。

定义 1.1 X 为一实希尔伯特空间，单值映射 $T: X \times X \to X$ 和 $H: X \to X$。

i) H 为强 α 单调的当且仅当

$\langle Hx-Hy, x-y \rangle \ge \alpha \|x-y\|^2$，$\forall x, y \in X$，其中 $\alpha > 0$。

ii) H 为 L 李普希兹连续的当且仅当

$\|Hx-Hy\| \le L\|x-y\|$，$\forall x, y \in X$，其中 $L > 0$。

iii) T 为关于第一变元 L 李普希兹连续的当且仅当

$\|T(x,-)-T(y,-)\| \le L\|x-y\|$，$\forall x, y \in X$，其中 $L > 0$。

iv) H 为严格单调的当且仅当

H 为单调的且 $\langle Hx-Hy, x-y \rangle = 0$，当且仅当 $x = y$。

v) T 为关于第一变元依赖于 H 满足性质(h)当且仅当

$$\langle T(x_1,-)-T(y_1,-), x_2-y_2 \rangle \ge \beta \|x_1-x_2\| \|x_2-y_2\|,\quad \forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$$

定义 1.2 集值映射 $M: X \to 2^X$

i) M 为单调的当且仅当

$$\langle u-v, x-y \rangle \ge 0,\quad \forall x, y \in X,\quad u \in Mx, v \in My$$

ii) M 为 H 单调的当且仅当 M 为单调的且对于任意的 $\lambda > 0$ 有

$$(H+\lambda M)X = X$$

定义 1.3 M 为 H 单调的，预解算子 $R_{M,\lambda}^{H}: X \to X$ 被定义为

$$R_{M,\lambda}^{H}(x) = (H+\lambda M)^{-1}(x),\quad \forall x \in X$$

定理 1.1 若 H 为强 α 单调的，M 为 H 单调的，则预解算子 $R_{M,\lambda}^{H}: X \to X$ 为单值的且 $1/\alpha$ 李普希兹连续的。

定理 1.2 若 H 为严格单调的，M 为 H 单调的， $A: X \to X$ 为一单值映射，则 x^* 为变分包含 $0 \in M(x) + A(x)$ 的解当且仅当

$$x^* = R_{M,\lambda}^{H}\left(H\left(x^*\right) - \lambda A\left(x^*\right)\right), \quad \forall \lambda > 0 。$$

3. 主要内容

X 为一实希尔伯特空间， $A, B: X \times X \to X$ 为单值映射， $M: X \to 2^X$ 为一 H 单调的集值映射。考虑如下变分包含组问题

$$\begin{cases} 0 \in A(x,y) + M(x) \\ 0 \in B(x,y) + M(y) \end{cases}$$

在定义 1.3 中所定义的预解算子 $R_{M,\lambda}^{H}$ 为单值的李普希兹连续的，我们利用这个性质构造出当集值映像 $M(x)$ 为 H 单调时的迭代算法。

算法 2.1 任取 $x_0, y_0 \in X$ ，序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 由如下迭代格式产生

$$\begin{cases} x_{n+1} = R_{M,\lambda}^{H}\left(H(x_n) - \lambda A(x_n, y_n)\right) \\ y_{n+1} = R_{M,\lambda}^{H}\left(H(y_n) - \lambda A(x_n, y_n)\right) \end{cases}$$

下面两个定理分别说明了算法 2.1 中生成的迭代序列在不同条件下都收敛于该变分包含组问题的解，且此时解存在且唯一。

定理 2.1 若 H 为强 α 单调且 L 李普希兹连续的，A 为关于第一变元 L_1 李普希兹连续且关于第二变元 L_2 李普希兹连续的。B 为关于第一变元 L_3 李普希兹连续且关于第二变元 L_4 李普希兹连续的。且满足

$$\max\left\{\frac{L + \lambda L_1 + \lambda L_3}{\alpha}, \frac{L + \lambda L_2 + \lambda L_4}{\alpha}\right\} < 1$$

若该变分包含组问题解存在，则算法 2.1 得到的序列收敛到该变分包含组的解。

证明： $\left(x^*, y^*\right)$ 为该变分包含组问题的解则有

$$\begin{aligned} \left\|x_{n+1} - x^*\right\| &= \left\|R_{M,\lambda}^{H}\left(H(x_n) - \lambda A(x_n, y_n)\right) - R_{M,\lambda}^{H}\left(H\left(x^*\right) - \lambda A\left(x^*, y^*\right)\right)\right\| \\ &\le \frac{1}{\alpha}\left\|H(x_n) - H\left(x^*\right) - \lambda\left(A(x_n, y_n) - A\left(x^*, y^*\right)\right)\right\| \\ &\le \frac{1}{\alpha}\left\|H(x_n) - H\left(x^*\right)\right\| + \frac{\lambda}{\alpha}\left\|A(x_n, y_n) - A\left(x^*, y^*\right)\right\| \\ &\le \frac{1}{\alpha}\left\|H(x_n) - H\left(x^*\right)\right\| + \frac{\lambda}{\alpha}\left\|A(x_n, y_n) - A\left(x_n, y^*\right)\right\| + \frac{\lambda}{\alpha}\left\|A\left(x_n, y^*\right) - A\left(x^*, y^*\right)\right\| \\ &\le \frac{L + \lambda L_1}{\alpha}\left\|x_n - x^*\right\| + \frac{\lambda L_2}{\alpha}\left\|y_n - y^*\right\| \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \left\|y_{n+1} - y^*\right\| &= \left\|R_{M,\lambda}^{H}\left(H(y_n) - \lambda B(x_n, y_n)\right) - R_{M,\lambda}^{H}\left(H\left(y^*\right) - \lambda B\left(x^*, y^*\right)\right)\right\| \\ &\le \frac{\lambda L_3}{\alpha}\left\|x_n - x^*\right\| + \frac{L + \lambda L_4}{\alpha}\left\|y_n - y^*\right\| \end{aligned}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)-\left(x^*,y^*\right)\right\| &= \left\|x_{n+1}-x^*\right\|+\left\|y_{n+1}-y^*\right\| \\
&\le \frac{L+\lambda L_1+\lambda L_3}{\alpha}\left\|x_n-x^*\right\|+\frac{L+\lambda L_2+\lambda L_4}{\alpha}\left\|y_n-y^*\right\| \\
&\le \max\left\{\frac{L+\lambda L_1+\lambda L_3}{\alpha},\frac{L+\lambda L_2+\lambda L_4}{\alpha}\right\}\left(\left\|x_n-x^*\right\|+\left\|y_n-y^*\right\|\right) \\
&= \max\left\{\frac{L+\lambda L_1+\lambda L_3}{\alpha},\frac{L+\lambda L_2+\lambda L_4}{\alpha}\right\}\left\|\left(x_n,y_n\right)-\left(x^*,y^*\right)\right\|
\end{aligned}
$$

故而得证。

定理 2.2 若 H 为强 α 单调且 L 李普希兹连续的，A 为关于第一变元 L_1 李普希兹连续且关于第二变元 L_2 李普希兹连续的。B 为关于第一变元 L_3 李普希兹连续且关于第二变元 L_4 李普希兹连续的。A 为关于第一变元依赖于 H 满足性质(h)且常数为 β_1。A 为关于第二变元依赖于 H 满足性质(h)且常数为 β_2。B 为关于第一变元依赖于 H 满足性质(h)且常数为 β_3。B 为关于第二变元依赖于 H 满足性质(h)且常数为 β_4。且满足 $M<1$，其中

$$
M=\max\left\{\frac{2\left(L^2+\lambda^2\left(L_1^2+L_3^2\right)-2\lambda\beta_1\right)}{\alpha^2},\frac{2\left(L^2+\lambda^2\left(L_2^2+L_4^2\right)-2\lambda\beta_3\right)}{\alpha^2},\frac{2\lambda^2\left(L_3L_4+L_1L_2\right)-2\lambda\left(\beta_2+\beta_4\right)}{\alpha^2}\right\}
$$

若该变分包含组问题解存在，则算法 2.1 得到的序列收敛到该变分包含组的解。

证明： $\left(x^*,y^*\right)$ 为该变分包含组问题的解则有

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^2 &= \left\|R_{M,\lambda}^H\left(H\left(x_n\right)-\lambda A\left(x_n,y_n\right)\right)-R_{M,\lambda}^H\left(H\left(x^*\right)-\lambda A\left(x^*,y^*\right)\right)\right\|^2 \\
&\le \frac{1}{\alpha^2}\left\|H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right)-\lambda\left(A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\left[\left\|H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right)\right\|^2+\lambda^2\left\|A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\|^2\right] \\
&\quad -\frac{2\lambda}{\alpha^2}\left\langle H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right),A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\left\langle H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right),A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\rangle \\
&= \left\langle H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right),A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y_n\right)\right\rangle+\left\langle H\left(x_n\right)-H\left(x^*\right),A\left(x^*,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\rangle \\
&\ge \beta_1\left\|x_n-x^*\right\|^2+\beta_2\left\|x_n-x^*\right\|\left\|y_n-y^*\right\|
\end{aligned}
$$

此外还有

$$
\begin{aligned}
\left\|A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\| &\le \left\|A\left(x_n,y_n\right)-A\left(x_n,y^*\right)\right\|+\left\|A\left(x_n,y^*\right)-A\left(x^*,y^*\right)\right\| \\
&\le L_1\left\|x_n-x^*\right\|+L_2\left\|y_n-y^*\right\|
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^2 &\le \frac{L^2}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{\lambda^2L_1^2}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{\lambda^2L_2^2}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|^2+\frac{2\lambda^2L_1L_2}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|\left\|x_n-x^*\right\| \\
&\quad -\frac{2\lambda\beta_1}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2-\frac{2\lambda\beta_2}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|\left\|y_n-y^*\right\| \\
&= \frac{L^2+\lambda^2L_1^2-2\lambda\beta_1}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{\lambda^2L_2^2}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|^2+\frac{2\lambda^2L_1L_2-2\lambda\beta_2}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|\left\|x_n-x^*\right\|
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\left\|y_{n+1}-y^*\right\|^2 \le \frac{\lambda^2L_3^2}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{L^2+\lambda^2L_4^2-2\lambda\beta_3}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|^2+\frac{2\lambda^2L_3L_4-2\lambda\beta_4}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|\left\|x_n-x^*\right\|
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)-\left(x^*,y^*\right)\right\|^2 \le 2\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^2+2\left\|y_{n+1}-y^*\right\|^2 \\
&\le \frac{2\left(L^2+\lambda^2L_1^2+\lambda^2L_3^2-2\lambda\beta_1\right)}{\alpha^2}\left\|x_n-x^*\right\|^2+\frac{2\left(L^2+\lambda^2L_2^2+\lambda^2L_4^2-2\lambda\beta_3\right)}{\alpha^2}\left\|y_n-y^*\right\|^2 \\
&\quad +\frac{2\lambda^2\left(L_3L_4+L_1L_2\right)-2\lambda\left(\beta_2+\beta_4\right)}{\alpha^2}2\left\|y_n-y^*\right\|\left\|x_n-x^*\right\| \\
&\le M\left\|x_n-x^*\right\|^2+M\left\|y_n-y^*\right\|^2+2M\left\|y_n-y^*\right\|\left\|x_n-x^*\right\| \\
&= M\left(\left\|x_n-x^*\right\|+\left\|y_n-y^*\right\|\right)^2 = M\left\|\left(x_n,y_n\right)-\left(x^*,y^*\right)\right\|^2
\end{aligned}
$$

故而得证。

参考文献

[1] Hu, X. and Wang, J. (2006) Solving Pseudomonotone Variational Inequalities and Pseudoconvex Optimization Problems Using the Projection Neural Network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **17**, 1487-1499. https://doi.org/10.1109/TNN.2006.879774

[2] Barbagallo, A., *et al*. (2013) Further Results for General Financial Equilibrium Problems via Variational Inequalities. *Journal of Mathematical Finance*, **3**, 33-52. https://doi.org/10.4236/jmf.2013.31003

[3] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. (2017) An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. https://www.doc88.com/p-9955152436740.html

[4] Oden, J.T. and Kikuchi, N. (1980) Theory of Variational Inequalities with Applications to Problems of Flow through Porous Media. *International Journal of Engineering Science*, **18**, 1173-1284. https://doi.org/10.1016/0020-7225(80)90111-1

[5] Kucera, M. (1977) A New Method for the Obtaining of Eigenvalues of Variational Inequalities of the Special Type (Preliminary Communication). *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **18**, 205-210.

[6] Ceng, L.C., *et al*. (2007) An Extragradient-Like Approximation Method for Variational Inequalities and Fixed Point Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 205-215. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.021

[7] 何炳生, 廖立志, 杨振华. 极大单调算子的一个新的近似邻近点算法[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(11): 1026-1032.

[8] Fang, Y.P. and Huang, N.J. (2003) *H*-Monotone Operator and Resolvent Operator Technique for Variational Inclusions. *Applied Mathematics and Computation*, **145**, 795-803. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00275-3