Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1897-1901
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136194

Hans汉斯

复合函数求导法则定义域放大问题的原因探究与解决办法

凌洪涛

安徽国际商务职业学院信息工程学院，安徽 合肥

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

复合函数求导法则是微积分学中非常重要和应用非常广泛的求导法则，是高等数学教材和高中数学教材中必学必教内容，复合函数求导法则的证明过程是没有问题的，但是在某一类一元函数求导应用中存在原函数和导函数定义域不一致的副作用，本文通过教材中实际存在的例题和构造的例题说明了，复合函数求导放大定义域这一问题，并且探讨了可能出现这一问题的原因，同时给出了严谨的复合函数使用的格式。

关键词

复合函数求导法则，函数求导

Exploration and Solution to the Problem of Enlarging the Definition Domain of the Derivation Rule of Composite Functions

Hongtao Ling

Information Engineering College of Anhui Institute of International Business, Hefei Anhui

Received: May 22nd, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Composite function derivation rule is a very important and widely used derivation rule in calculus, and is a must-learn in advanced mathematics textbooks and high school mathematics textbooks. The proof process of composite function derivation law is no problem, but in a certain class of un-

文章引用: 凌洪涛. 复合函数求导法则定义域放大问题的原因探究与解决办法[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1897-1901.
DOI: 10.12677/pm.2023.136194

ivariate function derivation application, there are side effects of inconsistency between the original function and the derivative function definition domain. This paper through the actual examples and construction examples in the textbook to illustrate, composite function derivation amplified definition domain problem. The reasons for this problem are discussed, and the format used by rigorous composite functions is given.

Keywords

Derivation Rule for Composite Functions, Derivation of Functions

1. 引言

复合函数求导法则是众多求导法则中最常用的法则之一，多应用于在一元函数求导，常见初等复合函数中和部分多元复合函数求导中。复合函数求导法则本身的证明是非常严谨的，但是在实际的应用中，复合函数会产生导函数的定义域比原函数定义域扩大的问题，这与导数的定义是违背的，根据导数定义的要求，需要原函数和导函数的定义域一致。

2. 复合函数求导法则

复合函数求导法则是求导中最常用的法则之一，其定义是，如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)\quad ([1]\text{: p. 92})$$

按照定义的要求，可以推论原函数和求导出的函数可导点应该一致，也就是说，原函数和导函数的定义域应该是一致的，但是在复合函数求导的实际应用中会出现不一致的情况，下面分别举例说明复合函数求导正常使用和出现问题的情况。

3. 复合函数求导法则的正常使用

如例题 1：设 $y=\sin^n x$ 求导 y' ([1]: p. 93)

利用复合函数求导规则可以得到 $y=n\sin^{n-1}x$ 可以看出求导后导函数和原函数的定义域一致都是整个实数集 R。该题引用于同济大学第七版高等数学 P93 例 15 的一部分。这属于复合函数求导正常的一部分，下面主要举例复合函数求导运用中出现问题的部分。

4. 复合函数求导法则应用在一元函数求导中出现问题的一类函数

例题 2： $y=\ln\sin x$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ([2]: p. 92; [3])

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}$$

该例题解答引用自同济第五版高等数学上册 P92 例题 11 和菲赫金哥尔茨的微积分教程高等教育出版社中文翻译版本 p167 公式 6 中。

原函数的定义域为 $k\pi < x < (k+1)\pi$ 而求出的导函数只要 $x \neq k\pi$ 导函数的定义域被放大了。

例题 3：$y = \ln\cos e^x$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ([2]: p. 93)

求解过程省略最后结果 $y = \left(-\sin e^x\right) / \cos e^x \, e^x = -e^x \tan e^x$。

可以发现在原函数中需要 $\cos e^x > 0$，可以知道 $-\frac{k+1}{2}\pi < e^x < \frac{k+1}{2}\pi$，而求出的导函数只需要 $e^x \neq \frac{k+1}{2}\pi$，这导致了导函数和原函数定义域不一致。

例题 4：$y = \lg\left(1-x^2\right)^{1/2}$ 求 y' [4]

最终求解过程省略，结果是 $x\lg e / \left(x^2-1\right)$。会发现原函数的定义域是，$x < -1$ 或 $x > 1$，而导函数的定义域是 $x \neq -1$ 或 $x \neq +1$，原函数和导函数的定义域不一致，而且多数情况是通过复合函数求导把原函数的定义域给放大。

例题 5：$y = \arctan\frac{1}{x}$ 求导数 y' [5]

根据复合函数求导法则，将 $\frac{1}{x}$ 看成 u，原函数变成 arctan$u$，代入求导公式可得

$$\arctan u = 1u' / \left(1+u^2\right)$$

回代 $u = \frac{1}{x}$，最终得到原函数 $y = \arctan\frac{1}{x}$ 的导函数为 $y' = -\frac{1}{1+x^2}$。

其中原函数的定义域应该是 $\{x \mid x \neq 0, x = R\}$，而导函数的定义域是 R 整个实数集，显然导函数比原函数的定义域扩大了。

例题 6：同理，可以构造函数 $y = \operatorname{arccot}\frac{1}{x}$，求导函数 y'

根据复合函数求导法则，将 $\frac{1}{x}$ 看成 u，原函数变成 arccot$u$，代入求导公式可得

$$\operatorname{arccot} u = -1u' / \left(1+u^2\right)$$

回代 $u = \frac{1}{x}$，最终得到原函数 $y = \operatorname{arccot}\frac{1}{x}$ 的导函数为 $y' = \frac{1}{1+x^2}$。

在这个构造的例子中，原函数的定义域应该是 $\{x \mid x \neq 0, x = R\}$，而导函数的定义域是 R 整个实数集，显然导函数比原函数的定义域扩大了。

根据导数的定义([1]: p. 75)可知，导函数和原函数的定义域应该是一致的，而根据例题 2，例题 3，例题 4，例题 5 和构造的例题 6 的求解结果发现原函数和导函数的定义域不一致，一般都是导函数的定义域相比原函数扩大了。这样的结果不符合导数定义，导数定义要求导函数的定义域要和原函数完全一致。这是复合函数求导法则的应用过程中存在的一个问题，需要被重视和解决。

5. 原因探究

复合函数求导法则在求导过程中，出现了导函数放大原函数定义域的这一现象，目前看是因为在通常的微积分求导公式中关于 ln$x$ 的求导公式要求 $x > 0$ ([6]: p. 56)，而在复合函数求导的过程中忽视了这一要求，而在严谨的数学分析的教材中对应的是 ln$|x|$ [7]的求导公式考虑了 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况。

如例题 2 中就是忽略了这个问题，导致原函数的定义域从 $k\pi < x < (k+1)\pi$ 被放大到导函数定义域 $x \neq k\pi$。

再如例题 3 中也是同样的问题，放大了函数 e^x 的值域，从而放大了原函数的定义域。

再如例题 4 中也是此类问题，原函数的定义域是，$x < -1$ 或 $x > 1$，而导函数的定义域是 $x \neq -1$ 或 $x \neq +1$，从而在导函数中放大了原函数的定义域。

此类问题可以归结为 $\ln x$ 求导公式的问题。

此外在存在 $\frac{1}{x}$ 的复合函数中，有时候会忽略 $x \neq 0$ 的情况，从而放大导函数的定义域。

例题 5 和例题 6 就反应了该类问题，其原因可能是最后的导函数表达式在化简过程中将 $\frac{1}{x}$ 约去，导致 $\frac{1}{x}$ 在导函数中不在被体现，从而放大定义域的问题。比如在即将出现例题 7 中，就不存在这样的问题。

例题 7： $y = \sin e^{\frac{1}{x}}$ 求 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\cos e^{\frac{1}{x}}\right) \Big/ \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}} \cos e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

从最后结果可以看出由于最终的导函数中仍然有 $\frac{1}{x}$，所以导函数与原函数的定义域一致。

此外在多元函数的偏导数求导中，应用复合函数求导法则也会出现定义域放大的问题，如例题 8 ([6]:p. 194)就很好地反应了该问题。

例题 8：若 $w = x + 2y + z^2$， $x = r/s$， $y = r^2 + \ln s$， $z = 2r$ 用 r，s 表示 $\partial w/\partial r$ 和 $\partial w/\partial s$ 。

解：自变量是 r 和 s，有三个中间变量：

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r} = (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2) = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial s} = (1)\left(-\frac{1}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{1}{s} - \frac{r}{s^2}$$

在 $y = r^2 + \ln s$ 中需要 $s > 0$，而从解答的结果中可以看到无论是 $\frac{1}{s}$ 还是 $\frac{r}{s^2}$ 都仅仅需要 s 不等于 0 就可以了，这就等于 s 这个自变量的范围在求导后被放大了，因此在多元函数求偏导数的问题中复合函数求导法则也是存在放大定义域的瑕疵，而原因很多也是对于对数的复合函数中。

对于复合函数求导有可能在导函数中放大原函数定义域的现象的更深层次原因需要更加专业的数学人士从原理上推导证明。

6. 结论和解决办法

通过例题 2，例题 3，例题 4，例题 5 和构造的例题 6 可知复合函数求导法则在实际应用过程中有放大导函数定义域的副作用，因此在使用复合函数求导过程中需要先将原函数定义域求出来，然后使用复合函数求导，等求出导数后再把导函数的定义域求出来，看导函数和原函数的定义域是否一致，如果不一致要以原函数的定义域为准，保证原函数和导函数的定义域一致。例如，重新写例题 4 和例题 5 应该如下所示：

例题 4： $y = \lg\left(1 - x^2\right)^{1/2}$ 求 y' [4]

先求原函数定义域： $\{x \mid x < -1 \text{或} x > 1\}$ 。

然后求得导函数： $y' = x \lg e \big/ \left(x^2 - 1\right)$ 。

注明导函数定义域也是$\{x \mid x<-1或x>1\}$。

例题 5：$y=\arctan\frac{1}{x}$ 求导数 y'

先求函数定义域为：$\{x \mid x\neq 0, x=R\}$

根据复合函数求导法则，将$\frac{1}{x}$看成 u，原函数变成 arctan$u$，代入求导公式可得

$$\arctan u = 1u'/\left(1+u^2\right)$$

回代 $u=\frac{1}{x}$，最终得到原函数 $y=\arctan\frac{1}{x}$ 的导函数为 $y'=-\frac{1}{1+x^2}$ 并注明导函数定义域为$\{x \mid x\neq 0, x=R\}$。

这样在使用复合函数求导法则前先求一下原函数定义域就可以保证不会出现导函数放大原函数定义域的情况。

基金项目

教育厅自然科学研究项目：微电网分布式优化控制策略研究(项目编号：2020XJZR02)；校级课程思政示范课程大数据可视化分析(项目编号：2022kcsf13)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学, 上册[M]. 第 7 版. 上海: 高等教育出版社, 2014: 75, 92, 93.

[2] 同济大学数学系. 高等数学, 上册[M]. 第 5 版. 上海: 高等教育出版社, 2002: 92, 93.

[3] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程, 第一卷[M]. 第 8 版. 叶彦谦, 译. 上海: 高等教育出版社, 2006: 167.

[4] 人民教育出版社中学数学室. 高中数学, 选修 II [M]. 北京: 人民教育出版社, 2004: 124.

[5] 安徽省普通高校专升本招生考试命题研究组. 安徽省普通高校专升本考试专用教材高等数学[M]. 北京: 光明日报出版社, 2017: 66.

[6] 孙硕, 乔木. 高数叔微积分入门[M]. 北京: 石油工业出版社, 2018: 56, 194.

[7] B.A.卓里奇. 数学分析(第一卷) [M]. 第 7 版. 李植, 译. 上海: 高等教育出版社, 2019: 170.