Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 1946-1952
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137200

$(h-s)$-凸函数的若干性质

卢嘉颖，屈莱曼，黄　蔓
浙江外国语学院数学系，浙江 杭州

收稿日期：2023年6月5日；录用日期：2023年7月7日；发布日期：2023年7月14日

摘　要

凸函数是一类具有良好性质和广泛应用的重要函数，$(h-s)$-凸函数是h-凸函数与s-凸函数的推广。本文讨论了$(h-s)$-凸函数的一些基本性质，并利用函数的单调性、上积函数和函数列的收敛性等，证明得到了$(h-s)$-凸函数的若干性质定理。

关键词

$(h-s)$-凸函数，h-凸函数，凸函数，上积函数

Some Properties of $(h-s)$-Convex Functions

Jiaying Lu, Laiman Qu, Man Huang
Department of Mathematics of Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang

Received: Jun. 5th, 2023; accepted: Jul. 7th, 2023; published: Jul. 14th, 2023

Abstract

Convex function is a kind of important function with good properties and wide application. The $(h-s)$-convex function is the generization of h-convex functions and s-convex functions. In this paper, some basic properties of $(h-s)$-convex functions are discussed, and some property theorems of $(h-s)$-convex functions are given by using monotonicity of function, supermultiplicative functions and convergence of function sequence, etc.

文章引用：卢嘉颖，屈莱曼，黄蔓．$(h-s)$-凸函数的若干性质[J]．理论数学, 2023, 13(7): 1946-1952.
DOI: 10.12677/pm.2023.137200

Keywords

$(h-s)$-Convex Functions, *h*-Convex Functions, Convex Functions, Supermultiplicative Functions

1. 引言

凸函数是一类极为重要的函数，具有许多良好的性质，在不等式的证明、函数极值、控制论等方面都有着广泛的应用。2007 年 Varosanec [1]在凸函数、*s*-凸函数、*P*-函数和 Godunova-Levin 函数等的基础上提出了 *h*-凸函数的概念。本文中，我们约定 I 和 J 均是 $\mathbb{R}$ 上的区间，且 $[0,1]\subset J$，$s\in(0,1]$。相关函数定义如下：

定义 1 设函数 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),\ \forall x,y\in I,\ \alpha\in[0,1], \tag{1}$$

则称 f 为 I 上的凸函数。若上述不等式(1)反向，则称 f 为 I 上的凹函数。

定义 2 [1]设函数 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，函数 $h:J\subseteq\mathbb{R}\to[0,\infty)$，若 f 满足

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y),\ \forall x,y\in I,\ \alpha\in[0,1], \tag{2}$$

则称f为I上的h-凸函数，或者说f属于类 $SX(h,I)$。如果不等式(2)反向，那么称f为I上的h-凹函数，即 $f\in SV(h,I)$。

特别地，当 $h(\alpha)$ 分别取 $\alpha,1,\frac{1}{\alpha},\alpha^s$ 时，*h*-凸函数分别为凸函数，*P*-函数，Godunova-Levin 函数和 *s*-凸函数(在第二种意义下)。

在 2011 年，Ozdemir 等[2]进一步推广了 *h*-凸函数的概念，提出了 $(h-s)$-凸函数，如下所示：

定义 3 [2]设函数 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$h:J\subseteq\mathbb{R}\to[0,\infty)$，其中 $h\ne0$，若 f 满足

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le h^s(\alpha)f(x)+h^s(1-\alpha)f(y),\ \forall x,y\in[0,\infty)=I,\ s\in(0,1],\ \alpha\in[0,1], \tag{3}$$

则称 f 为区间 I 上的一个 $(h-s)$-凸函数，或者说 f 属于类 $SX(h-s,I)$。如果不等式(3)反向，那么称 f 是 $(h-s)$-凹函数，即 $f\in SV(h-s,I)$。类似地，当 $s=1$ 时，$(h-s)$-凸函数即为 *h*-凸函数。当 $h(\alpha)=\alpha$ 时，$(h-s)$-凸函数即为第二类 *s*-凸函数。

定义 4 [1]设函数 $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若 h 满足条件

$$h(xy)\ge h(x)h(y),\ \forall x,y\in J, \tag{4}$$

则称 h 为区间 J 上的一个上积函数。如果上述不等式(4)反向，那么称 h 为下积函数。若不等式(4)取等号，则称 h 为相乘函数。

在 2007 年，Varosanec [1]得到了一系列 *h*-凸函数的性质定理及相关推论。*h*-凸函数与 *s*-凸函数的 Hadamard 不等式也相继提出(详见[3] [4])。Xin Jin 和 Beibei Jin 等人[5]在 2022 年给出了 *h*-凸函数的一些等价刻画，并对 *h*-凸函数的一些基本性质及应用等进行了深入的讨论。更多关于 *h*-凸函数的性质及应用研究可见参考文献([6] [7] [8] [9])。$(h-s)$-凸函数是 *h*-凸函数的一种推广，本文受上述文献的启发，结合

函数的单调性、上积性和收敛性等，研究了$(h-s)$-凸函数的一些性质定理。

2. 主要结果及定理的证明

定理 1 设h_1,h_2是定义在区间J上的非负函数，且有$h_2(t)\le h_1(t)$，其中$t\in[0,1]$。

若$f\in SX(h_2-s,I)$，则$f\in SX(h_1-s,I)$。若$f\in SV(h_1-s,I)$，则$f\in SV(h_2-s,I)$。

证明 若$f\in SX(h_2-s,I)$，则对于$\forall x,y\in I,\alpha\in[0,1]$，有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le h_2^s(\alpha)f(x)+h_2^s(1-\alpha)f(y)\le h_1^s(\alpha)f(x)+h_1^s(1-\alpha)f(y),$$

则

$$f\in SX(h_1-s,I).$$

同理可证当$f\in SV(h_1-s,I)$时，有

$$f\in SV(h_2-s,I).$$

定理 2 如果$f,g\in SX(h-s,I)$且$\lambda>0$，那么$f+g,\lambda f\in SX(h-s,I)$。

如果$f,g\in SV(h-s,I)$且$\lambda>0$，那么$f+g,\lambda f\in SV(h-s,I)$。

证明 若$f,g\in SX(h-s,I)$，则对于$\forall x,y,u,v\in I$和$\alpha,t\in[0,1]$，有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le h^s(\alpha)f(x)+h^s(1-\alpha)f(y),$$

$$g(tu+(1-t)v)\le h^s(t)g(u)+h^s(1-t)g(v),$$

则

$$\lambda f=\lambda f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le h^s(\alpha)\lambda f(x)+h^s(1-\alpha)\lambda f(y),$$

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)+g(tu+(1-t)v)\le h^s(\alpha)f(x)+h^s(1-\alpha)f(y)+h^s(t)g(u)+h^s(1-t)g(v),$$

即

$$f+g,\lambda f\in SX(h-s,I).$$

同理可证当$f,g\in SV(h-s,I)$时，有

$$f+g,\lambda f\in SV(h-s,I).$$

定理 3 设f和g为一个相似排列的函数，即$\forall x,y\in I$，有

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\ge 0. \tag{5}$$

h_1,h_2是定义在区间J上的非负函数，记$h(t)=\max\{h_1(t),h_2(t)\}$，$c$是一个固定的正数。

若$f\in SX(h_1-s,I)$，$g\in SX(h_2-s,I)$，且$h^s(\alpha)+h^s(1-\alpha)\le c^s$，其中$\alpha\in[0,1]$，$s\in(0,1]$，则

$$fg\in SX(ch-s,I).$$

若$f\in SV(h_1-s,I)$，$g\in SV(h_2-s,I)$，且$h^s(\alpha)+h^s(1-\alpha)\ge c^s$，其中$\alpha\in[0,1]$，$s\in(0,1]$，则

$$fg\in SV(ch-s,I).$$

证明 由不等式(5)可得

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\ge f(x)g(y)+f(y)g(x).$$

则$\forall x,y\in I$，$\alpha\in[0,1]$，有

$$
\begin{aligned}
& fg\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right) \\
& \le \left(h_1^s(\alpha)f(x)+h_1^s(1-\alpha)f(y)\right)\cdot\left(h_2^s(\alpha)g(x)+h_2^s(1-\alpha)g(y)\right) \\
& \le h^{2s}(\alpha)(fg)(x)+h^s(\alpha)h^s(1-\alpha)\left[f(x)g(y)+f(y)g(x)\right]+h^{2s}(1-\alpha)(fg)(y) \\
& \le h^{2s}(\alpha)(fg)(x)+h^s(\alpha)h^s(1-\alpha)\left[(fg)(x)+(fg)(y)\right]+h^{2s}(1-\alpha)(fg)(y) \\
& =\left(h^s(\alpha)+h^s(1-\alpha)\right)\cdot\left(h^s(\alpha)(fg)(x)+h^s(1-\alpha)(fg)(y)\right) \\
& \le c^s h^s(\alpha)(fg)(x)+c^s h^s(1-\alpha)(fg)(y),
\end{aligned}
$$

即

$$fg\in SX(ch-s,I).$$

同理可证当 $f\in SV(h_1-s,I)$， $g\in SV(h_2-s,I)$ 且 $h^s(\alpha)+h^s(1-\alpha)\ge c^s$ 时，结论同样成立。

定理 4 设 I 为一个包含 0 的区间，其中 $x,y\in I$， $\alpha,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta\le 1$。

(I) 设 $f\in SX(h-s,I)$ 且 $f(0)=0$，若 h 是上积函数，则有

$$f(\alpha x+\beta y)\le h^s(\alpha)f(x)+h^s(\beta)f(y). \tag{6}$$

反之，若非负函数 f 满足不等式(6)成立，且 h 是满足 $h^s(\alpha)<\frac{1}{2}$， $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的非负函数，则有 $f(0)=0$。

(II) 设 $f\in SV(h-s,I)$ 且 $f(0)=0$，若 h 是下积函数，则有

$$f(\alpha x+\beta y)\ge h^s(\alpha)f(x)+h^s(\beta)f(y). \tag{7}$$

反之，若非负函数 f 满足不等式(7)成立，且 h 是满足 $h^s(\alpha)>\frac{1}{2}$， $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的非负函数，则有 $f(0)=0$。

证明 先证(I)中的前半部分。

设 $\alpha+\beta=\gamma$，按如下方法定义 a,b： $a=\frac{\alpha}{\gamma},b=\frac{\beta}{\gamma}$，则 $a+b=1$，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x+\beta y) &= f(a\gamma x+b\gamma y) \\
&\le h^s(a)f(\gamma x)+h^s(b)f(\gamma y) \\
&= h^s(a)f\left(\gamma x+(1-\gamma)\cdot 0\right)+h^s(b)f\left(\gamma y+(1-\gamma)\cdot 0\right) \\
&\le h^s(a)\left(h^s(\gamma)f(x)+h^s(1-\gamma)f(0)\right)+h^s(b)\left(h^s(\gamma)f(y)+h^s(1-\gamma)f(0)\right) \\
&= h^s(a)h^s(\gamma)f(x)+h^s(b)h^s(\gamma)f(y) \\
&\le h^s(a\gamma)f(x)+h^s(b\gamma)f(y) \\
&= h^s(\alpha)f(x)+h^s(\beta)f(y)
\end{aligned}
$$

再证(I)中的后半部分。

假设 $f(0)\ne 0$，即 $f(0)>0$，

将 $x=y=0$ 代入式(6)得到

$$f(0)\le h^s(\alpha)f(0)+h^s(\beta)f(0),$$

此时令 $\alpha=\beta$，可得

$$f(0)\le 2h^s(\alpha)f(0),$$

两边同除以 $f(0)$ 得到

$$1 \le 2h^s(\alpha),$$

即

$$h^s(\alpha) \ge \frac{1}{2},$$

这与已知条件矛盾，则原假设不成立，故

$$f(0)=0.$$

(II)的证明方法可参照(I)的证明过程。

定理 5 设 $f: I_1 \to [0,\infty)$，$g: I_2 \to [0,\infty)$，且满足 $g(I_2) \subseteq I_1$，$0 \in I_1$，$f(0)=0$，函数 $h_i: J_i \to [0,\infty)$，$h_2(J_2) \subseteq J_1$ $(i=1,2)$，且满足 $h_2^s(\alpha)+h_2^s(1-\alpha) \le 1$，其中 $\alpha \in [0,1]$，$s \in (0,1]$。

(I) 若 h_1 是一个上积函数，$f \in SX(h_1 - s, I_1)$ 且 f 是递增(递减)函数，$g \in SX(h_2 - s, I_2)$ $\left(g \in SV(h_2 - s, I_2)\right)$，则复合函数

$$f \circ g \in SX(h_1 \circ h_2 - s, I_2).$$

(II) 若 h_1 是一个下积函数，$f \in SV(h_1 - s, I_1)$ 且 f 是递增(递减)函数，$g \in SV(h_2 - s, I_2)$ $\left(g \in SX(h_2 - s, I_2)\right)$，则复合函数

$$f \circ g \in SV(h_1 \circ h_2 - s, I_2).$$

证明 (I) $\forall x, y \in I_2$，若 $g \in SX(h_2 - s, I_2)$ 且 f 是递增函数，则

$$(f \circ g)(\alpha x + (1-\alpha) y) \le f\left(h_2^s(\alpha) g(x) + h_2^s(1-\alpha) g(y)\right),$$

接着利用定理 4 可得

$$\begin{aligned}
& f\left(h_2^s(\alpha) g(x) + h_2^s(1-\alpha) g(y)\right) \\
& \le h_1^s\left(h_2^s(\alpha)\right) f\left(g(x)\right) + h_1^s\left(h_2^s(1-\alpha)\right) f\left(g(y)\right) \\
& = (h_1 \circ h_2)^s(\alpha) \cdot (f \circ g)(x) + (h_1 \circ h_2)^s(1-\alpha) \cdot (f \circ g)(y),
\end{aligned}$$

即

$$f \circ g \in SX(h_1 \circ h_2 - s, I_2).$$

同理可得，若 $g \in SV(h_2 - s, I_2)$ 且 f 是递减函数，则 $f \circ g \in SX(h_1 \circ h_2 - s, I_2)$。

(II)的证明方法可参照(I)的证明过程。

定理 6 设 $f: I \to \mathbb{R}$，且 $f \in SX(h - s, I)$，$h: J \to \mathbb{R}$ 是一个非负的上积函数，则对于 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ $(x_1 < x_2 < x_3$ 且 $x_3 - x_1, x_3 - x_2, x_2 - x_1 \in J)$，有

$$h^s(x_3 - x_2) f(x_1) - h^s(x_3 - x_1) f(x_2) + h^s(x_2 - x_1) f(x_3) \ge 0. \tag{8}$$

若 h 是非负的下积函数且 $f \in SV(h - s, I)$，则不等式(8)反向。

证明 根据题意可得,

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in (0,1) \subset J,\ \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0,1) \subset J,\ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = 1.$$

且由 h 为上积函数知

$$h(x_3 - x_2) = h\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot (x_3 - x_1)\right) \ge h\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \cdot h(x_3 - x_1),$$

$$h\left(x_2-x_1\right)=h\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\cdot\left(x_3-x_1\right)\right)\ge h\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)\cdot h\left(x_3-x_1\right),$$

不妨设 $h\left(x_3-x_1\right)>0$，则

$$h\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)\le\frac{h\left(x_3-x_2\right)}{h\left(x_3-x_1\right)},\quad h\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)\le\frac{h\left(x_2-x_1\right)}{h\left(x_3-x_1\right)}.$$

令 $\alpha=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$， $x=x_1$， $y=x_3$ 可得

$$x_2=\alpha x+(1-\alpha)y,$$

由于 $f\in SX(h-s,I)$，则

$$\begin{aligned}f\left(x_2\right)&\le f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\\&\le h^s(\alpha)f(x)+h^s(1-\alpha)f(y)\\&\le h^s\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f\left(x_1\right)+h^s\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)f\left(x_3\right)\\&\le\frac{h^s\left(x_3-x_2\right)}{h^s\left(x_3-x_1\right)}f\left(x_1\right)+\frac{h^s\left(x_2-x_1\right)}{h^s\left(x_3-x_1\right)}f\left(x_3\right)\end{aligned}\tag{9}$$

不等式(9)两边同乘 $h^s\left(x_3-x_1\right)$ 即可得不等式(8)。

定理 7 令函数 $f:I\to\mathbb{R}$，$h:J\to[0,\infty)$，$f\in SX(h-s,I)$ 且 $(m,M)\subseteq I$。记 $W_n=\sum_{i=1}^{n}w_i$，其中 $w_1,\cdots,w_n$ $(n\ge2)$ 为区间 $(0,1)$ 上的正实数，则对于 $\forall x_1,\cdots,x_n\in(m,M)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)f\left(x_i\right)\le f(m)\sum_{i=1}^{n}h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)h^s\left(\frac{M-w_i}{M-m}\right)+f(M)\sum_{i=1}^{n}h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)h^s\left(\frac{x_i-m}{M-m}\right).\tag{10}$$

若 $f\in SV(h-s,I)$，则不等式(10)反向。

证明 将 $x_1=m$， $x_2=x_i$， $x_3=M$ 代入式(9)中可得到

$$f\left(x_i\right)\le h^s\left(\frac{M-w_i}{M-m}\right)f(m)+h^s\left(\frac{x_i-m}{M-m}\right)f(M),$$

其中 $i=1,\cdots,n$，将上述不等式两边同乘 $h\left(\frac{w_i}{W_n}\right)$ 之后再相加，即得到式(10)。

注：当 $s=1$ 时，上述定理 1~7 即为 Varosanec [1]在 2007 年关于 h-凸函数所得的部分性质定理。

定理 8 如果函数列 $\left\{f_n\in SX\left(h_n-s,I\right)\right\}$ 在 I 上收敛于函数 f，$\left\{h_n\right\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于函数 h，那么 $f\in SX(h-s,I)$。

证明 由于 $\left\{h_n\right\}$ 为 $[0,1]$ 上的非负函数列，故其收敛函数 h 也是非负函数。由已知条件可知，对于 $\forall x,y\in I,t\in[0,1]$，有

$$f_n\left(tx+(1-t)y\right)\le h_n^s(t)f_n(x)+h_n^s(1-t)f_n(y).$$

因此

$$\lim f_n\left(tx+(1-t)y\right)\le\lim\left\{h_n^s(t)f_n(x)+h_n^s(1-t)f_n(y)\right\}.$$

即

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\le h^{s}\left(t\right)f\left(x\right)+h^{s}\left(1-t\right)f\left(y\right).$$

从而

$$f\in SX\left(h-s,I\right).$$

推论 如果函数列 $\left\{f_n\in SX\left(h_n,I\right)\right\}$ 在 I 上收敛于函数 f，$\left\{h_n\left(x\right)\right\}$ 在 $\left[0,1\right]$ 上收敛于函数 h，那么 $f\in SX\left(h,I\right)$。

致　谢

感谢阮建苗教授指导！

基金项目

国家级大学生创新创业训练计划项目(No. 202214275002)。

参考文献

[1] Varosanec, S. (2007) On h-Convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 303-311. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.086

[2] Ozdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E. (2012) Some New Inequalities for $\left(h-s\right)$-Convex Functions via Further Properties. *Math CA*. http://arxiv.Org/pdf/1203.3698v1

[3] Alomari, M. and Dams, M. (2008) The Hadamard's Inequality for s-Convex Function of 2-Variables on the Coordinates. *International Journal of Mathematical Analysis*, **2**, 629-638.

[4] Latif, M.A. and Alomafi, M. (2009) On Hadamard-Type Inequalities for h-Convex Function on the Coordinates. *International Journal of Mathematical Analysis*, **3**, 1645-1656.

[5] Jin, X., Jin, B.B., Ruan, J.M. and Ma, X.S. (2022) Some Characterization of h-Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **16**, 751-764. https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-53

[6] Burai, P. and Hazy, A. (2011) On Approximately h-Convex Functions. *Journal of Convex Analysis*, **18**, 447-454.

[7] Hazy, A. (2011) Bernstein-Doetsch Type Results for h-Convex Functions. *Mathematical Inequalities & Applications*, **14**, 499-508. https://doi.org/10.7153/mia-14-42

[8] Sarikaya, M.Z., Saglam, A. and Yildrim, H. (2008) On Some Hadamard Type Inequalities for h-Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **2**, 335-341. https://doi.org/10.7153/jmi-02-30

[9] Wang, X.Q., Ruan, J.M. and Ma, X.S. (2019) On the Hermite-Hadamard Inequalities for h-Convex Functions on Balls and Ellipsoids. *Filomat*, **18**, 5871-5886. https://doi.org/10.2298/FIL1918871W