Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2017-2023
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137207

Hans汉斯

复合Linex对称损失下逆伽马分布参数的Bayes估计

粟　磊，周菊玲*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年6月12日；录用日期：2023年7月17日；发布日期：2023年7月24日

摘　要

本文主要研究了在复合Linex对称损失函数下先验分布为伽马分布的逆伽马分布尺度参数的Bayes估计、E-Bayes估计和多层Bayes估计，并通过数值模拟说明了三种估计的稳健性和精确度，其中Bayes估计的稳健性和精确度都是最高的。

关键词

复合Linex对称损失函数，逆伽马分布，Bayes估计，E-Bayes估计，多层Bayes估计

Bayesian Estimation of Inverse Gamma Distribution under Composite Linex Symmetric Loss Function

Lei Su, Juling Zhou*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 12th, 2023; accepted: Jul. 17th, 2023; published: Jul. 24th, 2023

Abstract

In this paper, Bayesian estimation, E-Bayes estimation and Hierarchical Bayes estimation of inverse gamma distribution scale parameters with prior distribution as gamma distribution under the composite Linex symmetric loss function are studied, the robustness and accuracy of the three estimates are illustrated by numerical simulation, among which the robustness and accuracy of Bayes estimation are the highest.

*通讯作者。

文章引用: 粟磊, 周菊玲. 复合 Linex 对称损失下逆伽马分布参数的 Bayes 估计[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2017-2023.
DOI: 10.12677/pm.2023.137207

Keywords

Composite Linex Symmetric Loss Function, Inverse Gamma Distribution, Bayesian Estimation, E-Bayes Estimation, Hierarchical Bayes Estimation

1. 引言

逆伽马分布在统计学、物理学、药理学等领域都有广泛的运用，例如在雷达工程中逆伽马分布作为统计特性严重拖尾的杂波建模的复合高斯过程的纹理分量[1]；在药理学中灭绝条件下随机抗生素耐药性模型中的患者携带对药物敏感的细菌弱收敛于逆伽马分布[2]；在误差分析和随机控制中也会经常运用该分布。所以对逆伽马分布进行深入的研究，具有重要的学术意义。

统计决策中统计量的优劣由损失函数的选择和参数估计问题的精确程度决定。目前，研究对称损失下一般分布参数的 Bayes 估计的文献有很多，如王亚楠等[3]讨论了复合 LINEX 对称损失下逆高斯分布参数倒数 Bayes 估计；岑泰林等[4]讨论了复合 LINEX 对称损失下广义 Pareto 分布形状参数 θ 的 Bayes 估计；吕佳等[5]讨论了复合 LINEX 损失下艾拉姆咖分布参数的贝叶斯估计；李俊华[6]讨论了复合 LINEX 对称损失函数下 Burr 分布参数的估计；但逆伽马分布有关的 Bayes 估计的文章很少，如丁新月等[7]讨论了 Mlinex 损失函数下逆伽马分布尺度参数的 Bayes 估计。

本文在复合 Linex 对称损失函数下对双参数逆伽马分布在形状参数已知的情况下，研究了其尺度参数的估计。

设 X 为随机变量。假如它的密度函数为

$$f(x\mid\alpha,\theta)=\left[\Gamma(\alpha)\right]^{-1}\theta^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}},x>0,\alpha>0,\theta>0, \tag{1}$$

称 X 服从参数为 α,θ 的逆伽马分布，记作 $X\sim I\Gamma(\alpha,\theta)$，其中 α 为形状参数，θ 为尺度参数。

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 独立同分布的样本，则此样本的似然方程为

$$L(x\mid\alpha,\theta)=\left[\Gamma(\alpha)\right]^{-n}\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-T\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}, \tag{2}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$。

复合 Linex 对称损失函数由张睿[8]提出，其形式为

$$L(\theta,\delta)=L_c(\theta,\delta)+L_{-c}(\theta,\delta)=\mathrm{e}^{-c(\theta-\delta)}+\mathrm{e}^{c(\theta-\delta)}-2,c>0. \tag{3}$$

2. θ 的 Bayes 估计

引理 1 对任何的先验分布 $\pi(\theta)$，在复合 Linex 对称损失函数下，θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B=\frac{1}{2c}\ln\frac{E\left(\mathrm{e}^{c\theta}\mid x\right)}{E\left(\mathrm{e}^{-c\theta}\mid x\right)}. \tag{4}$$

定理 1 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $I\Gamma(\alpha,\theta)$ 的一组观察值，则在损失函数(3)下，取 $\Gamma(a,b)$ 为 θ 的先验分布，θ 的 Beyes 估计为

$$\delta_B(x) = \frac{n\alpha + a}{2c}\ln\frac{b+T+c}{b+T-c},$$

其中 $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$。

证明 由 $\Gamma(a,b)$ 为逆伽马分布 θ 的先验分布，可得 θ 的先验密度函数为

$$\pi(\theta) = \Gamma(a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}, a>0, b>0, \theta>0 \tag{5}$$

根据样本的联合密度函数(2)和式(5)，得到 θ 的后验密度函数为

$$\begin{aligned} h(\theta \mid x) &= \frac{L(x \mid \alpha,\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty} L(x \mid \alpha,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{\left[\Gamma(\alpha)\right]^{-n}\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-T\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}}{\int_0^{+\infty}\left[\Gamma(\alpha)\right]^{-n}\theta^{n\alpha}\mathrm{e}^{-T\theta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha+1}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}}{\int_0^{+\infty}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}$，从而 θ 的后验分布为 $h(\theta \mid x) \sim \Gamma(n\alpha+a, b+T)$。那么

$$\begin{aligned} E\left(\mathrm{e}^{c\theta} \mid x\right) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{c\theta}\frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\int_0^{+\infty}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T-c)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\frac{\Gamma(n\alpha+a)}{(b+T-c)^{n\alpha+a}} \\ &= \left(\frac{b+T}{b+T-c}\right)^{n\alpha+a}. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} E\left(\mathrm{e}^{-c\theta} \mid x\right) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}\frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\int_0^{+\infty}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T+c)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{(b+T)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\frac{\Gamma(n\alpha+a)}{(b+T+c)^{n\alpha+a}} \\ &= \left(\frac{b+T}{b+T+c}\right)^{n\alpha+a}. \end{aligned} \tag{8}$$

将(7)和(8)带入式(4)可得

$$\delta_B(x)=\frac{1}{2c}\ln\frac{E\left(\mathrm{e}^{c\theta}\mid x\right)}{E\left(\mathrm{e}^{-c\theta}\mid x\right)}=\frac{1}{2c}\ln\frac{\left(\dfrac{b+T}{b+T-c}\right)^{n\alpha+a}}{\left(\dfrac{b+T}{b+T+c}\right)^{n\alpha+a}}=\frac{n\alpha+a}{2c}\ln\frac{b+T+c}{b+T-c}.$$

3. θ 的 E-Bayes 估计

对 $\delta_B(x)$ 中的超参数 a、b 进行估计。设超参数 a、b 的先验分布为 $\pi(a)=U(0,1)$ 和 $\pi(b)=U(0,d)$，若 a,b 的联合分布为均匀分布，即 $\pi(a,b)=\frac{1}{d}$，此时 θ 的多层先验密度函数为

$$\begin{aligned}\pi(\theta)&=\iint_D\pi(\theta\mid a,b)\pi(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\int_0^d\int_0^1\frac{1}{d}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{1}{d}\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b.\end{aligned}\tag{9}$$

定理 2 在复合 Linex 对称损失函数下，对于逆伽马分布(1)，若参数 θ 的先验分布为 $\Gamma(a,b)$，超参数 a 和 b 的先验分布为 D 上的均匀分布，则参数 θ 的 E-Bayes 估计为

$$\delta_{EB}(x)=\frac{n\alpha+a}{2cd}\int_0^d\ln\frac{b+T+c}{b+T-c}\mathrm{d}b,\tag{10}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$。

证明 根据 E-Bayes 的定义得

$$\begin{aligned}\delta_{EB}(x)&=\iint_D\delta_B(x)\pi(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{1}{d}\int_0^d\int_0^1\frac{n\alpha+a}{2c}\ln\frac{b+T+c}{b+T-c}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{1}{d}\int_0^d\ln\frac{b+T+c}{b+T-c}\int_0^1\frac{n\alpha+a}{2c}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{2n\alpha+1}{4cd}\int_0^d\ln\frac{b+T+c}{b+T-c}\mathrm{d}b.\end{aligned}$$

4. θ 的多层 Bayes 估计

定理 3 在复合 Linex 对称损失函数下，对于逆伽马分布(1)，若参数的先验分布为 $\Gamma(a,b)$，则参数 θ 的多层 Bayes 估计为

$$\delta_{HB}(x)=\frac{1}{2c}\ln\frac{\displaystyle\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T-c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\displaystyle\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T+c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b},\tag{11}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}$。

证明 根据 Bayes 定理，θ 的多层后验密度为

$$h(\theta|x)=\frac{L(x|\alpha,\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty}L(x|\alpha,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\int_0^{+\infty}\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}.$$

从而有

$$E\left(\mathrm{e}^{c\theta}|x\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{c\theta}h(\theta|x)\mathrm{d}\theta=\frac{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{c\theta}\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}\theta}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}=\frac{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T-c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}.$$

$$E\left(\mathrm{e}^{-c\theta}|x\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}h(\theta|x)\mathrm{d}\theta=\frac{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}\int_0^d\int_0^1\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{n\alpha+a-1}\mathrm{e}^{-(b+T)\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}\theta}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}=\frac{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T+c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}.$$

故在复合 Linex 对称损失函数下 θ 的多层 Bayes 估计为

$$\delta_{HB}(x)=\frac{1}{2c}\ln\frac{E\left(\mathrm{e}^{c\theta}|x\right)}{E\left(\mathrm{e}^{-c\theta}|x\right)}=\frac{1}{2c}\ln\frac{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T-c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\int_0^d\int_0^1\frac{\Gamma(n\alpha+a)b^a}{\Gamma(a)(b+T+c)^{n\alpha+a}}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}.$$

5. 数值模拟

利用 R 语言进行数值模拟，生成一组 $n=30$，形状参数 $\alpha=2$、尺度参数 θ 真值为 1 的逆伽马分布随

机样本，并根据定理 1 中参数θ的 Bayes 估计δ_B，在参数$b=5$时，对参数a和c取不同的值时θ的估计值，模拟结果如表 1。

Table 1. Estimated values of δ_B
表 1. δ_B的估计值

	$a=0.6$	$a=0.7$	$a=0.8$	$a=0.9$	$a=1$	极差
$c=5$	0.9981252	0.9997723	1.001419	1.003066	1.004713	0.0065878
$c=6$	0.9991212	1.00077	1.002419	1.004067	1.005716	0.0065948
$c=7$	1.000303	1.001954	1.003604	1.005255	1.006906	0.006603
$c=8$	1.001673	1.003326	1.004979	1.006631	1.008284	0.006611
$c=9$	1.003233	1.004889	1.006544	1.0082	1.009855	0.006622
$c=10$	1.004988	1.006646	1.008305	1.009963	1.011622	0.006634
极差	0.0068628	0.0068737	0.006886	0.006897	0.006909	

利用相同的随机样本，根据定理 2 中参数θ的 E-Bayes 估计δ_{EB}和定理 3 中参数θ的多层 Bayes 估计的表达式δ_{HB}在参数$d=10$时求估计值，结果分别为表 2 与表 3。

Table 2. Estimated values of δ_{EB}
表 2. δ_{EB}的估计值

c	5	6	7	8	9	10	极差
δ_{EB}	1.018552	1.019622	1.020892	1.022364	1.024041	1.025928	0.007376

Table 3. Estimated values of δ_{HB}
表 3. δ_{HB}的估计值

c	5	6	7	8	9	10	极差
δ_{HB}	1.005407	1.006482	1.007757	1.009251	1.010922	1.012818	0.007411

稳健性：

由表 1，表 2，表 3 可以看出当$5\le c\le 10$且适当选择参数a,b以及d的值时，δ_B，δ_{EB}，δ_{HB}的极差都非常小。从统计决策中稳健性角度考虑，参数θ的三种 Bayes 估计都很稳健，其中 Bayes 估计最稳健，符合统计决策中稳健性。

精确度：

由表 1，表 2，表 3 可以看出当$5\le c\le 10$时，容易求出δ_B，δ_{EB}，δ_{HB}的偏差($\Delta\delta=|\delta-\delta_0|$，其中$\delta$为参数$\theta$的估计量，$\delta_0$为参数$\theta$的真值)，区间分别为[0.000303, 0.011622]，[0.018552, 0.025928]，[0.005407, 0.12818]。可见偏差非常小，所以其精确度也很高，其中 Bayes 估计的精确度最高，符合统计决策的要求。

基金项目

国家自然科学基金(11801488)；新疆师范大学教学研究与改革(SDJG2020-30)；新疆师范大学科研发

展专项(XJNUZX202001)。

参考文献

[1] 赵宜楠, 李风从, 尹彬. 严重拖尾复合高斯杂波中目标的自适应极化检测[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(2): 376-380.

[2] 陆桂菊. 随机抗生素耐药性模型的长期性行为[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 南宁师范大学, 2020.

[3] 王亚楠, 韦程东, 张晓东, 等. 复合 LINEX 对称损失下逆高斯分布参数倒数 Bayes 估计[J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2019, 36(2): 32-37.

[4] 岑泰林, 韦程东, 张晓东, 等. 复合 LINEX 对称损失下广义 Pareto 分布形状参数 θ 的 Bayes 估计[J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2018, 35(3): 27-31.

[5] 吕佳, 任芳玲, 乔克林. 复合 Linex 损失下艾拉姆咖分布参数的贝叶斯估计[J]. 江西科学, 2016, 34(3): 285-287+310.

[6] 李俊华. 复合 LINEX 对称损失函数下 Burr 分布参数的估计[J]. 统计与决策, 2011(17): 40-41.

[7] 丁新月, 徐美萍. Mlinex 损失函数下逆伽马分布尺度参数的 Bayes 估计[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2014, 32(3): 61-64.

[8] 张睿. 复合 LINEX 对称损失下的参数估计[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2007.