Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2044-2056
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137211

$K_1 \cup P_m \cup P_n$的匹配等价图数

高　尚

中国人民银行西宁中心支行，青海 西宁

收稿日期：2023年6月16日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月26日

摘　要

匹配多项式是一种组合计数多项式，与图的特征多项式、色多项式等有许多联系。对于无圈图，它等于特征多项式；对于一般图，它是该图路树的特征多项式的一个因式。每个图都有一个匹配多项式，但一个匹配多项式所确定的图不一定是唯一的，即不同构的图可能共享一个匹配多项式。如果一个图的匹配多项式唯一确定这个图，则称这个图是匹配唯一的。如果两个不同构的图拥有相同的匹配多项式，则称这两个图是匹配等价的。自提出匹配等价的概念以来，虽然已经有了许多研究，但对于给定的图G，想要完全刻画出它的匹配等价图类仍是十分困难的。在前人的研究基础之上，本文通过组合计数的方法计算了$K_1 \cup P_m \cup P_n$的匹配等价图的个数。

关键词

匹配多项式，匹配等价，匹配唯一

The Number of Matching Equivalent Graphs of $K_1 \cup P_m \cup P_n$

Shang Gao

Xining Central Sub-Branch, The People's Bank of China, Xining Qinghai

Received: Jun. 16th, 2023; accepted: Jul. 19th, 2023; published: Jul. 26th, 2023

文章引用: 高尚. $K_1 \cup P_m \cup P_n$的匹配等价图数[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2044-2056.
DOI: 10.12677/pm.2023.137211

Abstract

The matching polynomial is a kind of combinatorial counting polynomial, which has many relations with the characteristic polynomial and the chromatic polynomial of the graph. For a acyclic graph, it is equal to the characteristic polynomial; for a general graph, it is a factor of the characteristic polynomial of the path tree of the graph. Every graph has a matching polynomial, but the graph determined by a matching polynomial is not necessarily unique, that is, different graphs may share the same matching polynomial. If the matching polynomial of a graph uniquely determines the graph, then the graph is said to be matching unique. If two non isomorphic graphs have the same matching polynomial, then the two graphs are said to be matching equivalent. Since the concept of matching equivalence has been proposed, it is very difficult to characterize the class of matching equivalent graphs for a given graph G. On the basis of previous studies, the number of the matching equivalent graphs of $K_1 \cup P_m \cup P_n$ is calculated by using combination counting in this paper.

Keywords

Matching Polynomial, Matching Equivalence, Matching Unique

1. 引言

本文仅考虑有限无向的简单图. 设G是一个n阶图, G的一个匹配是指G的一个生成子图, 并且它的每一个分支是孤立边或者孤立点. k-匹配是指其中有k条边的匹配. 文献 [1]定义了图G的匹配多项式为

$$\mu(G,x)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k p(G,k)x^{n-2k},$$

这里, $p(G,k)$是G的所有$k-$匹配的数目, 并且约定$p(G,0)=1$. 在本文中, 为了方便, 将$\mu(G,x)$简记为$\mu(G)$. 若图G和H有$\mu(G)=\mu(H)$, 则称图G和H 是匹配等价的, 记为$G\sim H$. 设G是一个图,

以$[G]$表示图G的匹配等价图的集合, 以$\delta(G)$表示集合$[G]$中元素的个数, 即$|[G]|$. 若$\delta(G)=1$, 称图G是匹配唯一的.

以K_1表示一个孤立点, 以$P_n(n\geq 2)$和$C_n(n\geq 3)$分别表示有n 个点的路和圈, 以$Q(m,n)$表示一个圈C_{m+1}的一个点与P_{n+1}的一个端点粘接后得到的图(见图 1), 以$T_{i,j,k}$ 表示只有一个3度点, 三个1度点, 且这个3度点到三个1度点的距离分别为i, j, k的树(见图 2), 以$\overline{G}$表示图G的补图. 以$G\cup H$ 表示图G 和图H 的不交并图, 它的顶点集是$V(G)\cup V(H)$, 边集是$E(G)\cup E(H)$. 以mG 表示m 个图G的不交并图. 文中没有定义的概念和术语参见 [2].

匹配多项式是图的一种组合计数多项式, 它带有图的许多信息, 在物理和化学上有着极其重要的应用 [3–5]. 文献 [6,7]虽然给出了匹配最大根小于等于2的图以及这些图的补图匹配等价的一种规律, 然而对于给定的图G, 完全刻画集合$[G]$是很困难的. 文 [8]计算了$\delta(P_m)$和$\delta(K_1\cup C_m)$, 并确定了集合$[P_m]$, $[K_1\cup C_m]$, $[\overline{P_m}]$和$[\overline{K_1\cup C_m}]$, 文 [9]计算了$\delta(K_1\cup P_m)$, 并确定了集合$[K_1\cup P_m]$和$[\overline{K_1\cup P_m}]$, 文 [10]计算了$\delta(P_m\cup P_n)$, 并确定了集合$[P_m\cup P_n]$. 在本文, 我们计算了$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)$.

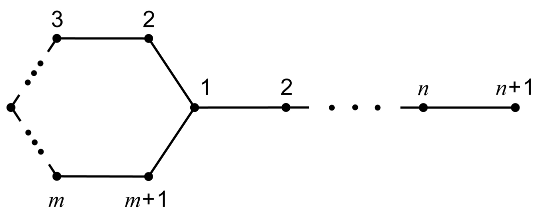

Figure 1. Graph $Q(m,n)$

图 1. 图 $Q(m,n)$

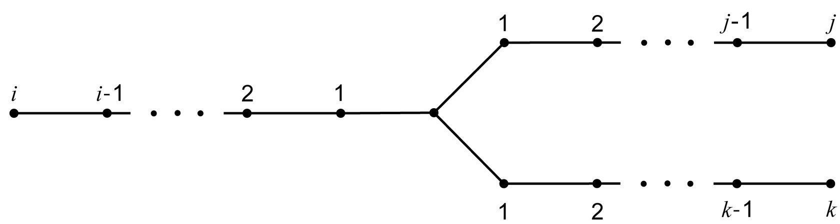

Figure 2. Graph $T_{i,j,k}$

图 2. 图 $T_{i,j,k}$

2. 若干引理

引理2.1 [1]　设G有k个连通分支: G_1, G_2,$\cdots$,G_k, 则

$$\mu(G)=\prod_{i=1}^{k}\mu(G_i).$$

众所众知, $\mu(G)$的根都是实数且关于坐标原点对称 [1], 用$M_1(G)$表示$\mu(G)$的最大根.

引理2.2 [7]　设G是连通图, 则

(1) $M_1(G)<2$当且仅当$G\in\Omega_1=\{P_n,T_{1,1,k},T_{1,2,2},T_{1,2,3},T_{1,2,4},C_m,Q(2,1)\}$;

(2) $M_1(G)=2$当且仅当$G\in\Omega_2=\{I_n,K_{1,4},T_{2,2,2},T_{1,3,3},T_{1,2,5},Q(3,1),Q(2,2)\}$.

引理2.3 [8]　(1) $P_{2m+1}\sim P_m\cup C_{m+1}$;

(2) $T_{1,1,n}\sim K_1\cup C_{n+2}$;

(3) $T_{1,2,2}\sim P_2\cup Q(2,1)$;

(4) $K_1\cup C_6\sim P_3\cup Q(2,1)$;

(5) $K_1\cup C_9\sim C_3\cup T_{1,2,3}$;

(6) $K_1\cup C_{15}\sim C_3\cup C_5\cup T_{1,2,4}$;

(7) $C_{15}\cup T_{1,2,3}\sim C_5\cup C_9\cup T_{1,2,4}$.

引理2.4 [8]　(1) 若$m+1=2^{i+1}$对某个正整数n成立, 则$\delta(P_m)=i$. 此时

$[P_m]=\{P_{m_1},P_{m_2}\cup C_{m_2+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1},\cdots,P_{m_i}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_i+1}\}$, 这里的$m_1=m$, $m_{k+1}=\frac{m_k-1}{2}(k=1,2,\cdots,i-1)$.

(2) 若$m+1=2^{i-1}(2r+1)$对某对正整数n和r成立, 则$\delta(P_m)=i$. 此时

$[P_m]=\{P_{m_1},P_{m_2}\cup C_{m_2+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1},\cdots,P_{m_i}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_i+1}\}$, 这里的$m_1=m$, $m_{k+1}=\frac{m_k-1}{2}(k=1,2,\cdots,i-1)$.

引理2.5 [9]　(1) 若$m+1=2^{i+1}$对某个正整数i成立, 则$\delta(K_1\cup P_m)=\binom{i+1}{2}$.

(2) 若$m+1=2^{i-1}(2r+1)$对某对正整数$i,r(\neq 1,4,7)$成立, 则$\delta(K_1\cup P_m)=\binom{i+1}{2}$.

(3) 若$m+1=3\times 2^{i-1}$对某个正整数i成立, 则

$$\delta(K_1\cup P_m)=\begin{cases}\binom{i+1}{2}, & 1\le i\le 2;\\ \binom{i+1}{2}+3, & i\ge 3.\end{cases}$$

(4) 若$m+1=9\times 2^{i-1}$对某个正整数i成立, 则

$$\delta(K_1\cup P_m)=\begin{cases}1, & i=1;\\ \binom{i+1}{2}+1, & i\ge 2.\end{cases}$$

(5) 若$m+1=15\times 2^{i-1}$对某个正整数i成立, 则

$$\delta(K_1\cup P_m)=\begin{cases}1, & i=1;\\ \binom{i+1}{2}+1, & i\ge 2.\end{cases}$$

引理2.6 [10]　设$m\geq n$,则有

$$\delta(P_m\cup P_n)=\begin{cases}\delta(P_m)\delta(P_n)-\binom{\delta(P_n)}{2} & m+1=2^k(n+1),(k=0,1,2\cdots)\\ \delta(P_m)\delta(P_n) & m+1\neq 2^k(n+1),(k=0,1,2\cdots)\end{cases}$$

引理2.7 [10] (1) 当$n = 3$ 或为偶数时, 有$\delta(P_n \cup P_m) = \delta(P_m)$;

(2) 当$m = 3$ 或为偶数时, 有$\delta(P_n \cup P_m) = \delta(P_n)$;

(3) 当$m, n = 3$ 或都为偶数时, 有$\delta(P_n \cup P_m) = 1$.

3. 主要结果

引理3.1 设$m \geq 2$, 则$\delta(K_1 \cup P_m \cup P_m) = \delta(P_m)\delta(K_1 \cup P_m) - \binom{\delta(P_m)+1}{3}$.

证明 设$H \sim K_1 \cup P_m \cup P_m$. 对$m+1$按最大奇因数是1, 3, 9, 15或其他奇因数分成以下5类.

(1) $m+1 = 2^{i+1}$, 对$i(\geq 1)$用数学归纳法. 当$i = 1$时, $m = 3$, 由引理2.2和2.3, $K_1 \cup P_3 \cup P_3$ 是匹配唯一的, 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_3 \cup P_3) = 1$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$= \delta(P_3)\delta(K_1 \cup P_3) - \binom{\delta(P_3)+1}{3} = 1 \times 1 - \binom{1+1}{3} = 1$, 结论成立. 假设结论对$m_2 + 1 = 2^i$成立, 先计算$\delta(K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m)$.

设$H' \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m$, H_1' 是H'的一个连通分支, 使$M_1(H_1') = M_1(P_m)$, $H' = H_1' \cup H_2'$. 由引理2.2和2.3, $H_1' = P_m, C_{m_2+1}$或$T_{1,1,m_2-1}$. (1) 若$H_1 = P_m$, 由$K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m \sim H = P_m \cup H_2$, 得$H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2}$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}$个. (2) 若$H_1 = C_{m_2+1}$, 由$H = C_{m_2+1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_{m_2}$, 得$H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup P_{m_2}$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$有$(i-1)\binom{i}{2} - \binom{i}{3}$个. (3) 若$H_1 = T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = T_{1,1,m_2-1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_{m_2} \sim T_{1,1,m_2-1} \cup P_{m_2} \cup P_{m_2}$, 得$H_2 \sim P_{m_2} \cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}$个. 故$\delta(K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m) = \binom{i}{2} + (i-1)\binom{i}{2} - \binom{i}{3} + \binom{i}{2} = (i+1)\binom{i}{2} - \binom{i}{3}$.

我们再计算$\delta(K_1 \cup P_m \cup P_m)$. 由引理2.2和2.3, H必有一个连通分支是：P_m, C_{m_2+1} 或$T_{1,1,m_2-1}$. 根据最大根的重数，这样的连通分支有两个.

(i) 若H包含P_m, 由$K_1 \cup P_m \cup P_m \sim H = P_m \cup H_2$, 得$H_2 \sim K_1 \cup P_m$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i+1}{2}$ 个.

(ii) 若H包含C_{m_2+1}, 由$H = C_{m_2+1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_m$, 得$H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m$, 故这样的$H_2$有$\delta(K_1 \cup P_{m_2} \cup P_m)$个.

(iii) 若H包含$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = T_{1,1,m_2-1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_m \sim T_{1,1,m_2-1} \cup P_{m_2} \cup P_m$, 得$H_2 \sim P_{m_2} \cup P_m$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$(i-1)i - \binom{i-1}{2}$个.

(iv) 若H同时包含P_m和C_{m_2+1}, 由$H = P_m \cup C_{m_2+1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \cup P_m \sim K_1 \cup P_m \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1}$, 得$H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2}$, 由引理2.5, 这样的$H_2$ 有$\binom{i}{2}$个.

(v) 若H同时包含P_m和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = P_m \cup T_{1,1,m_2-1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \cup P_m \sim K_1 \cup P_m \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \sim P_m \cup P_{m_2} \cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2 \sim P_{m_2}$. 由引理2.4, 这样的$H_2$有$i-1$个.

(vi) 若H同时包含C_{m_2+1} 和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = C_{m_2+1} \cup T_{1,1,m_2-1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \sim P_{m_2} \cup C_{m_2+1} \cup P_{m_2} \cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2 \sim P_{m_2} \cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$ 有$\binom{i}{2}$个.

由容斥原理得, $\delta(K_1 \cup P_m \cup P_m) = \binom{i+1}{2} + (i+1)\binom{i}{2} - \binom{i}{3} + (i-1)i - \binom{i-1}{2} - \binom{i}{2} - (i-1) - \binom{i}{2} = i\binom{i+1}{2} - \binom{i+1}{3} = \delta(P_m)\delta(K_1 \cup P_m) - \binom{\delta(P_m)+1}{3}$, 结论成立.

(2) 若$m+1=2^{i-1}(2r+1)$, $r\neq 1,4,7$, 证明与(1)类似, 略.

(3) 若$m+1=3\times 2^{i-1}$. 当$i=1$时, 由引理2.2和2.3, $K_1\cup P_2\cup P_2$是匹配唯一的, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_2\cup P_2)=1$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$=\delta(P_2)\delta(K_1\cup P_2)-\binom{\delta(P_2)+1}{3}=1\times 1-\binom{1+1}{3}=1$, 结论成立. 当$i=2$时, 由引理2.2和2.3, 此时$H$为$K_1\cup P_5\cup P_5$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup P_5$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup P_5$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup P_2\cup C_3$ 或$P_2\cup T_{1,1,1}\cup P_2\cup C_3$, 共5个, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_5\cup P_5)=5$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$=\delta(P_5)\delta(K_1\cup P_5)-\binom{\delta(P_5)+1}{3}=2\times 3-1=5$, 结论成立. 当$i=3$时, 由引理2.2和2.3, 此时$H$为$K_1\cup P_{11}\cup P_{11}$, $K_1\cup P_5\cup C_6\cup P_{11}$, $P_5\cup T_{1,1,4}\cup P_{11}$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup C_6\cup P_{11}$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup P_{11}$, $P_2\cup C_3\cup T_{1,1,4}\cup P_{11}$, $P_2\cup C_3\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_{11}$, $C_3\cup P_3\cup T_{1,2,2}\cup P_{11}$, $P_5\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_{11}$, $K_1\cup P_5\cup C_6\cup P_5\cup C_6$, $P_5\cup T_{1,1,4}\cup P_5\cup C_6$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup C_6\cup P_5\cup C_6$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup P_5\cup C_6$, $P_2\cup C_3\cup T_{1,1,4}\cup P_5\cup C_6$, $P_2\cup C_3\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_5\cup C_6$, $C_3\cup P_3\cup T_{1,2,2}\cup P_5\cup C_6$, $P_5\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_5\cup C_6$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup C_6\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, $P_2\cup C_3\cup T_{1,1,4}\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, $P_2\cup C_3\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, $C_3\cup P_3\cup T_{1,2,2}\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, $P_5\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_2\cup C_3\cup C_6$, 共23个, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{11}\cup P_{11})=23$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$=i(\binom{i+1}{2}+3)-\binom{i+1}{3}=3\times 9-4=23$, 结论成立.

下面对$i(\geq 3)$用数学归纳法. 假定结论对$m_2+1=3\times 2^{i-2}$, $i\geq 3$成立. 我们先计算$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)$.

设$H'\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m$, H_1'是H'的一个连通分支, 使$M_1(H_1')=M_1(P_m)$, $H'=H_1'\cup H_2'$. 由引理2.2和2.3, $H_1'=P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$. (1) 若$H_1=P_m$, 由$K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}+3$个. (2) 若$H_1=C_{m_2+1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_{m_2}$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$有$(i-1)(\binom{i}{2}+3)-\binom{i}{3}$个. (3) 若$H_1=T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_{m_2}$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}$个. 故$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)=\binom{i}{2}+3+(i-1)(\binom{i}{2}+3)-\binom{i}{3}+\binom{i}{2}=(i+1)\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+3i$.

我们再计算$\delta(K_1\cup P_m\cup P_m)$. 由引理2.2和2.3, H必有一个连通分支是P_m, C_{m_2+1} 或$T_{1,1,m_2-1}$. 根据最大根的重数，这样的连通分支有两个.

(i) 若H包含P_m, 由$K_1\cup P_m\cup P_m\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_m$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i+1}{2}+3$个.

(ii) 若H包含C_{m_2+1}, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_m$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m$, 故这样的$H_2$有$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)$个.

(iii) 若H包含$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_m\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_m$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_m$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$(i-1)i-\binom{i-1}{2}$个.

(iv) 若H同时包含P_m和C_{m_2+1}, 由$H=P_m\cup C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_m\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}+3$个.

(v) 若H同时包含同时含P_m和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=P_m\cup T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_m\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\sim P_m\cup P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2\sim P_{m_2}$. 由引理2.4, 这样的$H_2$有$i-1$个.

(vi) 若H同时包含C_{m_2+1}和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim$

$K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\sim P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$ 有$\binom{i}{2}$个.

由容斥原理得, $\delta(K_1\cup P_m\cup P_m)=\binom{i+1}{2}+3+(i+1)\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+3i+(i-1)i-\binom{i-1}{2}-(\binom{i}{2}+3)-(i-1)-\binom{i}{2}=i(\binom{i+1}{2}+3)-\binom{i+1}{3}=\delta(P_m)\delta(K_1\cup P_m)-\binom{\delta(P_m)+1}{3}$, 结论成立.

(4) 若$m+1=9\times 2^{i-1}$. 当$i=1$时, 由引理2.2和2.3, $K_1\cup P_8\cup P_8$是匹配唯一的, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_8\cup P_8)=1$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$=\delta(P_8)\delta(K_1\cup P_8)-\binom{\delta(P_8)+1}{3}=1\times 1-\binom{1+1}{3}=1$, 结论成立. 当$i=2$时, 由引理2.2和2.3, 此时$H$为$K_1\cup P_{17}\cup P_{17}$, $K_1\cup P_8\cup C_9\cup P_{17}$, $P_8\cup T_{1,1,7}\cup P_{17}$, $P_8\cup C_3\cup T_{1,2,3}\cup P_{17}$, $K_1\cup P_8\cup C_9\cup P_8\cup C_9$, $P_8\cup T_{1,1,7}\cup P_8\cup C_9$或$P_8\cup C_3\cup T_{1,2,3}\cup P_8\cup C_9$, 共7个, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{17}\cup P_{17})=7$, 由引理2.4和2.5, 等式右边$=\delta(P_{17})\delta(K_1\cup P_{17})-\binom{\delta(P_{17})+1}{3}=2\times 4-1=7$, 结论成立.

下面对$i(\geq 2)$用数学归纳法. 假定结论对$m_2+1=9\times 2^{i-2}$, $i\geq 2$成立. 我们先计算$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)$.

设$H'\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m$, H_1'是H'的一个连通分支, 使$M_1(H_1')=M_1(P_m)$, $H'=H_1'\cup H_2'$. 由引理2.2和2.3, $H_1'=P_m, C_{m_2+1}$或$T_{1,1,m_2-1}$. (1) 若$H_1=P_m$, 由$K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}+1$个. (2) 若$H_1=C_{m_2+1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_{m_2}$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$有$(i-1)(\binom{i}{2}+1)-\binom{i}{3}$个. (3) 若$H_1=T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_{m_2}$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}$个. 故$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)=\binom{i}{2}+1+(i-1)(\binom{i}{2}+1)-\binom{i}{3}+\binom{i}{2}=(i+1)\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+i$.

我们再计算$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)$. 由引理2.2和2.3, H必有一个连通分支是P_m, C_{m_2+1} 或$T_{1,1,m_2-1}$. 根据最大根的重数，这样的连通分支有两个.

(i) 若H包含P_m, 由$K_1\cup P_m\cup P_m\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_m$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i+1}{2}+1$个.

(ii) 若H包含C_{m_2+1}, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_m$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_m$, 故这样的$H_2$有$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_m)$个.

(iii) 若H包含$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_m\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_m$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_m$. 由引理2.6, 这样的$H_2$有$(i-1)i-\binom{i-1}{2}$个.

(iv) 若H同时包含P_m和C_{m_2+1}, 由$H=P_m\cup C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_m\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}$. 由引理2.5, 这样的$H_2$有$\binom{i}{2}+1$个.

(v) 若H同时包含P_m和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=P_m\cup T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_m\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\sim P_m\cup P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2\sim P_{m_2}$. 由引理2.4, 这样的$H_2$有$i-1$个.

(vi) 若H同时包含C_{m_2+1} 和$T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_m\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\sim P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1}$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_{m_2}$. 由引理2.6, 这样的$H_2$ 有$\binom{i}{2}$个.

由容斥原理得, $\delta(K_1\cup P_m\cup P_m)=\binom{i+1}{2}+1+(i+1)\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+i+(i-1)i-\binom{i-1}{2}-(\binom{i}{2}+$

$1) - (i-1) - \binom{i}{2} = i(\binom{i+1}{2} + 1) - \binom{i+1}{3} = \delta(P_m)\delta(K_1 \cup P_m) - \binom{\delta(P_m)+1}{3}$, 结论成立.

(5) 若$m+1 = 15 \times 2^{i-1}$, 证明与(4)类似, 略. □

为了方便, 我们将大于等于2的整数分系定级, 对整数$m+1(\geq 3)$按所含的最大奇因数进行分类. 若$m+1$的最大奇因数是1, 即$m+1 = 2^{i+1}$时, 称m属于3-系, 且是第i级的; 若$m+1$的最大奇因数是$2k+1(k \geq 1)$, 即$m+1 = 2^{i-1}(2k+1)$ 时, 称m属于$2k-$系, 且是第i级的. 两个数m, n是同系的当且仅当$m+1, n+1$中一个数是另一个数的因数.

按m和n是否同系分为以下2种情形, 下面的定理3.1 和3.2 给出了$\delta(K_1 \cup P_m \cup P_n)$ 的计算公式.

定理3.1 若$m+1 \neq 2^k(n+1), (k = 0, 1, 2 \cdots)$, 则

$$\delta(K_1 \cup P_m \cup P_n) = \delta(P_n)\delta(K_1 \cup P_m) + \delta(P_m)\delta(K_1 \cup P_n) - \delta(P_m)\delta(P_n).$$

证明 设$H \sim K_1 \cup P_m \cup P_n$, 对$m+n$ 用数学归纳法.

(i) 当m, n 分别属于不同系的第1 级整数时, 如m 是3− 系第1 级整数, 即$m = 3, n$ 是$2r-$ 系第一级整数, 即$n = 2r$ 时, 由引理2.2 和2.3, $K_1 \cup P_3 \cup P_{2r}$ 是匹配唯一的, 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_3 \cup P_{2r}) = 1$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$= \delta(P_{2r})\delta(K_1 \cup P_3) + \delta(P_3)\delta(K_1 \cup P_{2r}) - \delta(P_3)\delta(P_{2r}) = 1$, 结论成立.

(ii) 当m 是2− 系第2 级整数, 即$m = 5$ 时.

(1) n 是不同系1− 级整数时. (1.1) n 是3− 系第1 级整数, 即$n = 3$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1 \cup P_5 \cup P_3$ 的等价图H 为$K_1 \cup P_5 \cup P_3$, $K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup P_3$, $P_2 \cup T_{1,1,1} \cup P_3$, 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_5 \cup P_3) = 3$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$= \delta(P_3)\delta(K_1 \cup P_5) + \delta(P_5)\delta(K_1 \cup P_3) - \delta(P_5)\delta(P_3) = 1 \times 3 + 2 \times 1 - 2 \times 1 = 3$; (1.2) 同理可验证当$n$ 是8− 系第1 级整数; 14− 系第1 级整数; $2r-$ 系第1 级整数时, 等式左右都是3，结论成立.

(2) n 是不同系2− 级整数时. (2.1) n 是3− 系第2 级整数, 即$n = 7$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1 \cup P_5 \cup P_7$ 的等价图H 为$K_1 \cup P_5 \cup P_7$, $K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup P_7$, $P_2 \cup T_{1,1,1} \cup P_7$, $K_1 \cup P_5 \cup P_3 \cup C_4$, $K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup P_3 \cup C_4$, $P_2 \cup T_{1,1,1} \cup P_3 \cup C_4$, $P_5 \cup P_3 \cup T_{1,1,2}$, $P_2 \cup C_3 \cup P_3 \cup T_{1,1,2}$, 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_5 \cup P_7) = 8$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$= \delta(P_7)\delta(K_1 \cup P_5) + \delta(P_5)\delta(K_1 \cup P_7) - \delta(P_5)\delta(P_7) = 2 \times 3 + 2 \times 3 - 2 \times 2 = 8$; (2.2) 与(2.1) 同理可验证当$n$ 是$2r-$ 系第2 级整数时, 等式左右都是8; (2.3) n 是8− 系第2 级整数, 即$n = 17$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1 \cup P_5 \cup P_{17}$ 的等价图H 为$K_1 \cup P_5 \cup P_{17}$, $K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup P_{17}$, $P_2 \cup T_{1,1,1} \cup P_{17}$, $K_1 \cup P_5 \cup P_8 \cup C_9$, $K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup P_8 \cup C_9$, $P_2 \cup T_{1,1,1} \cup P_8 \cup C_9$, $P_5 \cup P_8 \cup T_{1,1,7}$, $P_5 \cup P_8 \cup C_3 \cup T_{1,2,3}$, $P_2 \cup C_3 \cup P_8 \cup T_{1,1,7}$, $P_2 \cup C_3 \cup P_8 \cup C_3 \cup T_{1,2,3}$, 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_5 \cup P_7) = 10$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$= \delta(P_7)\delta(K_1 \cup P_5) + \delta(P_5)\delta(K_1 \cup P_{17}) - \delta(P_5)\delta(P_{17}) = 2 \times 3 + 2 \times 4 - 2 \times 2 = 10$; (2.4) 与(2.3) 同理可验证当$n$ 是14− 系第2 级整数时, 等式左右都是10, 结论成立.

(iii) 当m 是2− 系第3 级整数, 即$m = 11$ 时.

(1) n 是不同系1− 级整数时. (1.1) n 是3− 系第1 级整数, 即$n = 3$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1 \cup P_{11} \cup P_3$ 的等价图共有3 个. 故等式左边$= \delta(K_1 \cup P_{11} \cup P_3) = 9$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$= \delta(P_3)\delta(K_1 \cup P_{11}) + \delta(P_{11})\delta(K_1 \cup P_3) - \delta(P_{11})\delta(P_3) = 1 \times 9 + 3 \times 1 - 3 \times 1 = 9$; (1.2) 同理可

验证当n 是8− 系第1 级整数; 14− 系第1 级整数; $2r-$ 系第1 级整数时, 等式左右都是9, 结论成立.

(2) n 是不同系2− 级整数时. (2.1) n 是3− 系第2 级整数, 即$n=7$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1\cup P_{11}\cup P_7$ 的等价图共有21 个. 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{11}\cup P_7)=21$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$=\delta(P_7)\delta(K_1\cup P_{11})+\delta(P_{11})\delta(K_1\cup P_7)-\delta(P_{11})\delta(P_7)=2\times 9+3\times 3-3\times 2=21$; (2.2) 与(2.1) 同理可验证当$n$ 是$2r-$ 系第2 级整数时, 等式左右都是21; (2.3) n 是8− 系第2 级整数, 即$n=17$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1\cup P_{11}\cup P_{17}$ 的等价图共有24 个. 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{11}\cup P_{17})=24$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$=\delta(P_{17})\delta(K_1\cup P_{11})+\delta(P_{11})\delta(K_1\cup P_{17})-\delta(P_{11})\delta(P_7)=2\times 9+3\times 4-3\times 2=24$; (2.4) 与(2.3) 同理可验证当$n$ 是$2r-$ 系第2 级整数时, 等式左右都是24, 结论成立.

(iv) 当m 是8− 系第2 级整数, 即$m=17$ 时.

(1) n 是不同系1− 级整数时. (1.1) n 是3− 系第1 级整数, 即$n=3$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1\cup P_{17}\cup P_3$ 的等价图H 为$K_1\cup P_{17}\cup P_3$, $K_1\cup P_8\cup C_9\cup P_3$, $P_8\cup T_{1,1,7}\cup P_3$, $P_8\cup C_3\cup T_{1,2,3}\cup P_3$, 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{17}\cup P_3)=4$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$=\delta(P_3)\delta(K_1\cup P_{17})+\delta(P_{17})\delta(K_1\cup P_3)-\delta(P_{17})\delta(P_3)=1\times 4+2\times 1-2\times 1=4$; (1.2) 同理可验证当$n$ 是2− 系第1 级整数; 14− 系第1 级整数; $2r-$ 系第1 级整数时, 等式左右都是3，结论成立.

(2) n 是不同系2− 级整数时. (2.1) n 是3− 系第2 级整数, 即$n=7$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1\cup P_{17}\cup P_7$ 的等价图共有10 个. 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{17}\cup P_7)=10$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$=\delta(P_7)\delta(K_1\cup P_{17})+\delta(P_{17})\delta(K_1\cup P_7)-\delta(P_{17})\delta(P_7)=2\times 4+2\times 3-2\times 2=10$; (2.2) 与(2.1) 同理可验证当$n$ 是$2r-$ 系第2 级整数; 2− 系第2 级整数时, 等式左右都是10; (2.3) n 是14− 系第2级整数, 即$n=29$ 时, 由引理2.2 和2.3, 容易验证此时$K_1\cup P_{17}\cup P_{29}$ 的等价图共有12 个. 故等式左边$=\delta(K_1\cup P_{17}\cup P_{29})=12$, 由引理2.4 和2.5, 等式右边$=\delta(P_{29})\delta(K_1\cup P_{17})+\delta(P_{17})\delta(K_1\cup P_{29})-\delta(P_{29})\delta(P_{17})=2\times 4+2\times 4-2\times 2=12$, 结论成立.

(v) 当m 是14− 系第2 级整数, n 是不同系1− 级整数或2− 级整数时, 与(iv) 同理可证, 结论成立.

假定结论对于和小于$m+n$的数对成立, 下面证明结论对$m,n(\geq 3$级$)$也成立. 设$H\sim K_1\cup P_m\cup P_n(m>n)$, H_1是H的一个连通分支, 使$M_1(H_1)=M_1(P_m)$, $H=H_1\cup H_2$. 由引理2.2和2.3, $H_1=P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1=P_m$, 由$K_1\cup P_m\cup P_n\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_n$, 故这样的$H_2$有$\delta(K_1\cup P_n)$个.

(ii) 若$H_1=C_{m_2+1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 故这样的$H_2$有$\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_n)$个.

(iii) 若$H_1=T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_n$, 由引理2.6, 这样的$H_2$有$(i-1)\delta(P_n)$个.

故这样的H_2共有$\delta(K_1\cup P_n)+\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_n)+\delta(P_{m_2})\delta(K_1\cup P_n)$ 个. 由引理2.5, 分为以下5种情形:

(1) 若$m+1=2^{i+1}$, $(i=1,2,3\cdots)$. 由归纳假设知, $\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_n)=\delta(P_n)\binom{i}{2}+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)$. 故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=\delta(K_1\cup P_n)+\delta(P_n)\binom{i}{2}+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)+(i-1)\delta(P_n)=\delta(P_n)\binom{i+1}{2}+i\delta(K_1\cup P_n)-i\delta(P_n)=\delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m)+\delta(P_m)\delta(K_1\cup P_n)-\delta(P_m)\delta(P_n)$,

结论成立.

(2) 若$m+1=2^{i-1}(2r+1)$, $r\neq 1,4,7$, $(i=1,2,3\cdots)$, 证明与(1)类似, 略.

(3) 若$m+1=3\times 2^{i-1}$, $(i=1,2,3\cdots)$. 由归纳假设知, $\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_n)=\delta(P_n)(\binom{i}{2}+3)+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)$. 故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=\delta(K_1\cup P_n)+\delta(P_n)(\binom{i}{2}+3)+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)+(i-1)\delta(P_n)=\delta(P_n)(\binom{i+1}{2}+3)+i\delta(K_1\cup P_n)-i\delta(P_n)=\delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m)+\delta(P_m)\delta(K_1\cup P_n)-\delta(P_m)\delta(P_n)$, 结论成立.

(4) 若$m+1=9\times 2^{i-1}$, $(i=1,2,3\cdots)$. 由归纳假设知, $\delta(K_1\cup P_{m_2}\cup P_n)=\delta(P_n)(\binom{i}{2}+1)+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)$. 故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=\delta(K_1\cup P_n)+\delta(P_n)(\binom{i}{2}+1)+(i-1)\delta(K_1\cup P_n)-(i-1)\delta(P_n)+(i-1)\delta(P_n)=\delta(P_n)(\binom{i+1}{2}+1)+i\delta(K_1\cup P_n)-i\delta(P_n)=\delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m)+\delta(P_m)\delta(K_1\cup P_n)-\delta(P_m)\delta(P_n)$, 结论成立.

(5) 若$m+1=15\times 2^{i-1}$, $(i=1,2,3\cdots)$, 证明与(4)类似, 略. □

按m 与n 属于2−系, 8−系, 14−系, 3−系或其他系分为5 类, 下面的定理3.2 给出了m 与n 同系情形下的$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)$. 其中, 3.2(1) 是$m$ 与n 均属于2−系3 级以上(包含3 级) 的情形, 3.2(2) 是m 与n 均属于8−系2 级以上(包含2 级) 的情形, 3.2(3) 是m 与n 均属于14−系2 级以上(包含2 级) 的情形; 由于结论一致, 除此之外的其他所有情形全都归纳到3.2(4).

定理3.2 若$m+1=2^k(n+1),(k=0,1,2\cdots)$,

(1) 若$m+1=3\times 2^{i-1}$, $n+1=3\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$ 且$i\geq j\geq 3$, 则

$$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=j\binom{i+1}{2}+3i-\binom{j+1}{3};$$

(2) 若$m+1=9\times 2^{i-1}$, $n+1=9\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$ 且$i\geq j\geq 2$ 成立, 则

$$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=j\binom{i+1}{2}+i-\binom{j+1}{3};$$

(3) 若$m+1=15\times 2^{i-1}$, $n+1=15\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$ 且$i\geq j\geq 2$ 成立, 则

$$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=j\binom{i+1}{2}+i-\binom{j+1}{3};$$

(4) 若$m+1$ 和$n+1$ 为其他情形, 则

$$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=\delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m)-\binom{\delta(P_n)+1}{3}.$$

证明 设$H\sim K_1\cup P_m\cup P_n(m\geq n\geq 2)$, 由$M_1(H)<2$ 及引理2.2(1) 知, H 必有一连通分支$H_1\in\Omega_1$, $H=H_1\cup H_2$. 按m 属于2−系, 8−系, 14−系, 3−系或其他系分为以下5 类:

(1) 若$m+1=3\times 2^{i-1}$, $n+1=3\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$, $k=i-j\geq 0$,

$i<3$, $j<3$, 当$i=1,j=1$ 时, 由引理3.1, 结论成立; 当$i=2,j=1$ 时, 由引理2.2 和2.3, H 为$K_1\cup P_5\cup P_2$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup P_2$ 或$P_2\cup T_{1,1,1}\cup P_2$, 共3 个, $\delta(P_2)\delta(K_1\cup P_5)-\binom{\delta(P_2)+1}{3}=1\times 3-0=3$, 结论成立; 当$i=2,j=2$ 时, 由引理3.1, 结论成立.

$i\geq 3$, $j<3$, 对$k(\geq 1)$ 用数学归纳法. 当$k=1$ 时, $i=3$, $j=2$, 由引理2.2 和2.3, H 为$K_1\cup P_{11}\cup P_5$, $K_1\cup P_5\cup C_6\cup P_5$, $P_5\cup T_{1,1,4}\cup P_5$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup C_6\cup P_5$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup P_5$, $P_2\cup C_3\cup C_{1,1,4}\cup P_5$, $P_2\cup C_3\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_5$, $C_3\cup P_3\cup T_{1,2,2}\cup P_5$, $P_5\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_5$, $K_1\cup P_{11}\cup P_2\cup C_3$, $P_{11}\cup P_2\cup T_{1,1,1}$, $K_1\cup P_2\cup C_3\cup C_6\cup P_2\cup C_3$, $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup P_2\cup C_3$, $P_2\cup C_3\cup T_{1,1,4}\cup P_2\cup C_3$, $P_2\cup C_3\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_2\cup C_3$, $C_3\cup P_3\cup T_{1,2,2}\cup P_2\cup C_3$ 或$P_5\cup P_3\cup Q(2,1)\cup P_2\cup C_3$, 共17 个, $\delta(P_5)\delta(K_1\cup P_{11})-\binom{\delta(P_5)+1}{3}=2\times 9-1=17$, 结论成立. 假定结论对$m_2+1=2^{k-1}(n+1)$ 成立. 由引理2.2 和2.3, $H_1=P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1=P_m$, 由$K_1\cup P_m\cup P_n\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_n$, 由引理2.5, 当$j=1$ 时, 这样的H_2 有1 个; 当$j=2$ 时, 这样的H_2 有3 个.

(ii) 若$H_1=C_{m_2+1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$ 有$j(\binom{i}{2}+3)-\binom{j+1}{3}$ 个.

(iii) 若$H_1=T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_n$. 由$i\geq 3$, $j<3$ 得, $i>j$, $m>n$, 故$i-1\geq j$, $m_2\geq n$, 由引理2.6, 这样的H_2 有$(i-1)j-\binom{j}{2}$ 个.

故当$j=1$ 时, $\delta(K_1\cup P_m\cup P_2)=1+1\times(\binom{i}{2}+3)-\binom{1+1}{3}+(i-1)\times 1-\binom{1}{2}=1\times(\binom{i+1}{2}+3)-\binom{1+1}{3}=\delta(P_2)\delta(K_1\cup P_m)-\binom{\delta(P_2)+1}{3}$; 当$j=2$ 时, $\delta(K_1\cup P_m\cup P_5)=3+2\times(\binom{i}{2}+3)-\binom{2+1}{3}+(i-1)\times 2-\binom{2}{2}=2\times(\binom{i+1}{2}+3)-\binom{2+1}{3}=\delta(P_5)\delta(K_1\cup P_m)-\binom{\delta(P_5)+1}{3}$, 结论成立.

$i\geq 3$, $j\geq 3$, 对$k(\geq 0)$ 用数学归纳法. 当$k=0$ 时, $i=j$, 由引理3.1, 结论成立. 当$k\neq 0$ 时, $i>j$, 假定结论对$m_2+1=2^{k-1}(n+1)$ 成立. 由引理2.2 和2.3, $H_1=P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1=P_m$, 由$K_1\cup P_m\cup P_n\sim H=P_m\cup H_2$, 得$H_2\sim K_1\cup P_n$, 由引理2.5, 这样的$H_2$ 有$\binom{j+1}{2}+3$ 个.

(ii) 若$H_1=C_{m_2+1}$, 由$H=C_{m_2+1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2\sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$ 有$j\binom{i}{2}+3(i-1)-\binom{j+1}{3}$ 个.

(iii) 若$H_1=T_{1,1,m_2-1}$, 由$H=T_{1,1,m_2-1}\cup H_2\sim K_1\cup P_m\cup P_n\sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n\sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2\sim P_{m_2}\cup P_n$. 由$i>j$, $m>n$, 故$m_2\geq n$, 由引理2.6, 这样的H_2 有$(i-1)j-\binom{j}{2}$ 个.

故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n)=\binom{j+1}{2}+3+j\binom{i}{2}+3(i-1)-\binom{j+1}{3}+(i-1)j-\binom{j}{2}=j\binom{i+1}{2}+3i-\binom{j+1}{3}$, 结论成立.

(2) 若$m+1=9\times 2^{i-1}$, $n+1=9\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$, $k=i-j\geq 0$,

$i<2$, $j<2$, 当$i=1,j=1$ 时, 由引理3.1, 结论成立.

$i\geq 2$, $j<2$, 对$k(\geq 1)$ 用数学归纳法. 当$k=1$ 时, $i=2$, $j=1$, 由引理2.2 和2.3 知, H 为$K_1\cup P_{17}\cup P_8$, $K_1\cup P_8\cup C_9\cup P_8$, $P_8\cup T_{1,1,7}\cup P_8$ 或$P_8\cup C_3\cup T_{1,2,3}\cup P_8$, 共4 个, $\delta(P_8)\delta(K_1\cup$

$P_{17}) - \binom{\delta(P_8)+1}{3} = 1\times 4 - 0 = 4$, 结论成立. 假定结论对$m_2+1 = 2^{k-1}(n+1)$ 成立. 由引理2.2 和2.3 知, $H_1 = P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1 = P_m$, 由$K_1\cup P_m\cup P_n \sim H = P_m\cup H_2$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_n$, 由引理2.5, 当$j=1$ 时, 这样的1 个.

(ii) 若$H_1 = C_{m_2+1}$, 由$H = C_{m_2+1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$ 有$j(\binom{i}{2}+1) - \binom{j+1}{3}$ 个.

(iii) 若$H_1 = T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = T_{1,1,m_2-1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n \sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2 \sim P_{m_2}\cup P_n$. 由$i\geq 3$, $j<3$ 得, $i>j$, $m>n$, 故$i-1\geq j$, $m_2\geq n$, 由引理2.6, 这样的H_2 有$(i-1)j - \binom{j}{2}$ 个.

故当$j=1$ 时, $\delta(K_1\cup P_m\cup P_8) = 1+1\times(\binom{i}{2}+1) - \binom{1+1}{3} + (i-1)\times 1 - \binom{1}{2} = 1\times(\binom{i+1}{2}+1) - \binom{1+1}{3} = \delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m) - \binom{\delta(P_n)+1}{3}$, 结论成立.

$i\geq 2$, $j\geq 2$, 对$k(\geq 0)$ 用数学归纳法. 当$k=0$ 时, $i=j$, 由引理3.1, 结论成立. 当$k\neq 0$ 时, $i>j$, 假定结论对$m_2+1 = 2^{k-1}(n+1)$ 成立. 由引理2.2 和2.3, $H_1 = P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1 = P_m$, 由$K_1\cup P_m\cup P_n \sim H = P_m\cup H_2$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_n$, 由引理2.5, 这样的$H_2$ 有$\binom{j+1}{2}+1$ 个.

(ii) 若$H_1 = C_{m_2+1}$, 由$H = C_{m_2+1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$ 有$j\binom{i}{2} + (i-1) - \binom{j+1}{3}$ 个.

(iii) 若$H_1 = T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = T_{1,1,m_2-1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n \sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2 \sim P_{m_2}\cup P_n$. 由$i>j$, $m>n$, 故$m_2\geq n$, 由引理2.6, 这样的H_2 有$(i-1)j - \binom{j}{2}$ 个.

故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n) = \binom{j+1}{2} + 1 + j\binom{i}{2} + (i-1) - \binom{j+1}{3} + (i-1)j - \binom{j}{2} = j\binom{i+1}{2} + i - \binom{j+1}{3}$, 结论成立.

(3) 若$m+1 = 15\times 2^{i-1}$, $n+1 = 15\times 2^{j-1}$, $i,j\in Z^+$, 证明与(2) 类似, 略.

(4) 若$m+1 = 2^{i+1}$, $n+1 = 2^{j+1}$, $i,j\in Z^+$, $k = i-j\geq 0$, 对k 用数学归纳法. 当$k=0$ 时, $i=j$, 由引理3.1, 结论成立. 当$k\neq 0$ 时, $i>j$, 假定结论对$m_2+1 = 2^{k-1}(n+1)$ 成立. 由引理2.2 和2.3, $H_1 = P_m, C_{m_2+1}$ 或$T_{1,1,m_2-1}$.

(i) 若$H_1 = P_m$, 由$H = P_m\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_n$, 由引理2.5, 这样的$H_2$ 有$\binom{j+1}{2}$ 个.

(ii) 若$H_1 = C_{m_2+1}$, 由$H = C_{m_2+1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n$, 得$H_2 \sim K_1\cup P_{m_2}\cup P_n$, 由归纳假设知, 这样的$H_2$ 有$j\binom{i}{2} - \binom{j+1}{3}$ 个.

(iii) 若$H_1 = T_{1,1,m_2-1}$, 由$H = T_{1,1,m_2-1}\cup H_2 \sim K_1\cup P_m\cup P_n \sim K_1\cup P_{m_2}\cup C_{m_2+1}\cup P_n \sim T_{1,1,m_2-1}\cup P_{m_2}\cup P_n$, 得$H_2 \sim P_{m_2}\cup P_n$. 由$i>j$, $m>n$, 故$i-1\geq j$, $m_2\geq n$, 由引理2.6, 这样的H_2 有$(i-1)j - \binom{j}{2}$ 个.

故$\delta(K_1\cup P_m\cup P_n) = \binom{j+1}{2} + j\binom{i}{2} - \binom{j+1}{3} + (i-1)j - \binom{j}{2} = j\binom{i+1}{2} - \binom{j+1}{3} = \delta(P_n)\delta(K_1\cup P_m) -$

$\binom{\delta(P_n)+1}{3}$, 结论成立.

(5) 若$m+1=2^{i-1}(2r+1)$, $n+1=2^{j-1}(2r+1)$, $i,j \in Z^+$, $r \neq 1,4,7$, 证明与(4) 类似, 略. □

声 明

本文属个人观点，不代表所在单位意见。

参考文献

[1] Godsil, C.D. and Gutman, I. (1981) On the Theory of the Matching Polynomials. *Journal of Graph Theory*, **5**, 137-144. https://doi.org/10.1002/jgt.3190050203

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244. Springer-Verlag, New York.

[3] Kunz, H. (1970) Location of the Zeros of the Partition Function for Some Classical Lattice Systems. *Physics Letters A*, **32**, 311-312. https://doi.org/10.1016/0375-9601(70)90520-7

[4] Hosoya, H. (1971) Topological Index, a Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **4**, 2332-2339. https://doi.org/10.1246/bcsj.44.2332

[5] Farrell, E.J. (1979) An Introduction to Matching Polynomial. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **27**, 75-86. https://doi.org/10.1016/0095-8956(79)90070-4

[6] 马海成. 匹配最大根小于2的图的匹配等价图类[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(3): 337-342.

[7] 马海成. 匹配最大根小于等于2的图的匹配等价[J]. 数学学报, 2006, 49(6): 1355-1360.

[8] 马海成. 两类图的匹配等价类[J]. 数学研究, 2000, 33(2): 218-222.

[9] 马海成. 点并路的匹配等价图类[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 2003(1): 6-8.

[10] 卢世芳. 路并路的匹配等价图类[J]. 青海大学学报(自然科学版), 2004, 22(2): 86-89.