Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2057-2068
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137212

带 Hardy 位势的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性

秦绪芬

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月16日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月26日

摘 要

本文研究了带 Hardy 位势和混合非线性项的薛定谔方程基态驻波解的强不稳定性。通过建立基态解的变分刻画，在基态解的邻域内构造了爆破解的存在性。从而证明了基态驻波解的强不稳定性。

关键词

非线性薛定谔方程，Hardy 位势，强不稳定性，驻波解

Strong Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Hardy Potential

Xufen Qin

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 16^{th}, 2023; accepted: Jul. 19^{th}, 2023; published: Jul. 26^{th}, 2023

文章引用: 秦绪芬. 带 Hardy 位势的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2057-2068. DOI: 10.12677/pm.2023.137212

Abstract

The aim of this paper is to study the strong instability of ground state standing waves for the Schrödinger equation with hardy potential and combined nonlinearilities. By establishing the variational characterization of the ground states, the existence of the finite time blow-up is constructed in the neighborhood of the ground state solution, and the strong instability of the ground state standing wave is proved.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Hardy Potential, Strong Instability, Standing Waves

1. 引言及主要结果

非线性薛定谔方程是量子力学中最基本的方程之一, 它作为一类典型的色散波方程, 从数学角度表明了线性色散项与非线性项作用之间的关系, 即当线性色散效应起主要作用时, 能量在空间扩散, 解整体存在, 并随着时间的发展渐近衰减; 当线性色散效应与非线性作用平衡时, 就会形成局部化的有限能量解, 通常称作驻波解; 当非线性项起主要作用时, 波会坍塌, 解会在有限时间内爆破. Berestycki 和 Cazenave [1] 首次研究了非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性. 后来, Le Coz [2] 对 Berestycki 和 Cazenave 的经典结果给出了另一种简单的证明, 即通过建立基态解的变分刻画, 在基态解的邻域内构造爆破解的存在性, 从而证明了基态驻波解的强不稳定性. 近年来, 一些学者对各类非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性问题进行了系统研究 [3–6]. Bensouilah, Dinh 和 Zhu [7] 研究了带 Hardy 位势的非线性薛定谔方程驻波解的轨道稳定性, 及 L^2-临界情形下驻波解的不稳定性. 随后, Dinh [8] 在 L^2-超临界情形下研究了驻波解的不稳定性. 受上述研究结果的启发, 本文主要研究如下带 Hardy 位势和混合非线性项的非线性薛定谔方程基态驻波解的强不稳定性

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + \frac{c}{|x|^2}\psi + |\psi|^p\psi + \gamma|\psi|^q\psi = 0, \ \ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ \psi(0) = \psi_0 \in H^1, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $n \geq 3$, $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是复值函数, $\gamma = \pm 1$, $0 < q < p < \frac{4}{n-2}$ 和 $c \neq 0$ 满足 $c < c_* := \frac{(n-2)^2}{4}$.

把 $-c|x|^{-2}$ 称为 Hardy 位势. c_* 是 Hardy 不等式中的最佳常数, 满足

$$c_*\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2}dx\le\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi(x)|^2dx,\ \ \forall\psi\in H^1(\mathbb{R}^n).$$

方程 (1.1) 的驻波解是形如 $\psi(t,x)=e^{i\omega t}u_\omega$ 的解, 其中 $\omega\in\mathbb{R}$ 是频率, $u_\omega\in H^1$ 是椭圆方程

$$-\Delta u_\omega+\omega u_\omega-c\frac{u_\omega}{|x|^2}-\gamma|u_\omega|^q u_\omega-|u_\omega|^p u_\omega=0, \tag{1.2}$$

的非平凡解. 方程 (1.2) 还可写成 $S'_\omega(u_\omega)=0$, 作用泛函 $S_\omega(u)$ 定义为

$$S_\omega(u):=E(u)+\frac{\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2, \tag{1.3}$$

能量泛函 $E(u)$ 定义为

$$E(u):=\frac{1}{2}\|u\|_{H_c^1}^2-\frac{1}{p+2}\|u\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\frac{\gamma}{q+2}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}, \tag{1.4}$$

其中

$$\|u\|_{H_c^1}^2:=\|\nabla u\|_{L^2}^2-c\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx, \tag{1.5}$$

是 Hardy 泛函. 还可定义以下泛函

$$K_\omega(u):=\partial_\lambda S_\omega(\lambda u)|_{\lambda=1}=\|u\|_{H_c^1}^2+\omega\|u\|_{L^2}^2-\|u\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\gamma\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}, \tag{1.6}$$

和

$$Q(u):=\partial_\lambda S_\omega(u^\lambda)|_{\lambda=1}=\|u\|_{H_c^1}^2-\frac{p^*}{p+2}\|u\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\frac{\gamma q^*}{q+2}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}, \tag{1.7}$$

其中

$$u^\lambda(x):=\lambda^{\frac{n}{2}}u(\lambda x),\ p^*:=\frac{np}{2},\ q^*:=\frac{nq}{2}. \tag{1.8}$$

方程 (1.2) 的非平凡解的集合为

$$\mathcal{A}_\omega:=\{u_\omega\in H^1\backslash\{0\}:\ S'_\omega(u_\omega)=0\},$$

及方程 (1.2) 的非平凡径向解的集合为

$$\mathcal{A}_{rad,\omega}:=H_{rad}^1\cap\mathcal{A}_\omega,$$

其中 H_{rad}^1 是径向的 H^1 函数空间.

定义 1.1 若函数 $u_\omega\in\mathcal{A}_\omega$ 在集合 A_ω 上使得 S_ω 最小化, 则称 u_ω 为方程 (1.2) 的基态. 用 $\mathcal{G}_\omega$ 表示基态的集合

$$\mathcal{G}_\omega=\{u_\omega\in\mathcal{A}_\omega,\ S_\omega(u_\omega)\le S_\omega(v),\ \forall\, v\in\mathcal{A}_\omega\}.$$

类似的, 若函数 $u_\omega \in \mathcal{A}_{rad,\omega}$ 在集合 $A_{rad,\omega}$ 上使得 S_ω 最小化, 则称 u_ω 为方程 (1.2) 的径向基态. 径向基态的集合用 $\mathcal{G}_{rad,\omega}$ 表示.

定义 1.2 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\psi_0 \in H^1$ 使得 $\|\psi_0 - u\|_{H^1} < \varepsilon$, 且方程 (1.1) 以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破, 则驻波解 $e^{i\omega t}u(x)$ 是强不稳定的.

定理 1.3 设 $n \geq 3$, $\omega > 0$ 和 $\gamma = 1$, $\frac{4}{n} \leq q < p < \frac{4}{n-2}$ 或 $\gamma = -1$, $0 < q < p$ 和 $\frac{4}{n} < p < \frac{4}{n-2}$,

(i) 若 $0 < c < c_*$, 则对任意的 $u_\omega \in \mathcal{G}_\omega$, $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u_\omega(x)$ 是强不稳定的,

(ii) 若 $c < 0$, 则对任意的 $u_\omega \in \mathcal{G}_{rad,\omega}$, $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u_\omega(x)$ 是强不稳定的.

2. 定理的证明

为了证明定理 1.3, 需要下面结果.

命题 2.1 设 $n \geq 3$, $\gamma = \pm 1$, $\omega > 0$, $0 < q < p < \frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0 < c < c_*$, 则子集 $\mathcal{G}_\omega$ 是非空的, 且

$$\mathcal{G}_\omega = \{v \in H^1 \backslash \{0\} :\ S_\omega(v) = d(\omega),\ K_\omega(v) = 0\},$$

其中

$$d(\omega) := \inf\{S_\omega(v) :\ v \in H^1 \backslash \{0\},\ K_\omega(v) = 0\}. \tag{2.1}$$

(ii) 若 $c < 0$, 则子集 $\mathcal{G}_{rad,\omega}$ 是非空的, 且

$$\mathcal{G}_{rad,\omega} = \{v \in H^1_{rad} \backslash \{0\} :\ S_\omega(v) = d(rad,\omega),\ K_\omega(v) = 0\},$$

其中

$$d(rad,\omega) := \inf\{S_\omega(v) :\ v \in H^1_{rad} \backslash \{0\},\ K_\omega(v) = 0\}.$$

注 根据标准的变分理论, 在条件 $c > 0$ 时, 利用 Hardy-Littlewood 不等式的特征

$$c\int |x|^{-2}|v(x)|^2 dx \leq c\int |x|^{-2}|v^*(x)|^2 dx, \tag{2.2}$$

其中 v^* 是 v 的对称重排, 可推断出 $d(\omega)$ 的任意极小化序列是径向对称的. 在条件 $c < 0$ 时, Hardy-Littlewood 不等式不成立, 故只考虑径向对称的极小化序列.

首先, 记 ω-Hardy 函数为

$$G_\omega(v) := \|v\|^2_{H^1_c} + \omega\|v\|^2_{L^2}. \tag{2.3}$$

由文献 [7,9] 知, 当 $c < c_*$ 时

$$G_\omega(v) \sim \|v\|^2_{H^1}. \tag{2.4}$$

作用泛函 $S_\omega(v)$ 还可表示为

$$\begin{aligned} S_\omega(v) &= \frac{1}{2}K_\omega(v) + \frac{q}{2(q+2)}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2} + \frac{p}{2(p+2)}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &= \frac{1}{q+2}K_\omega(v) + \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

引理 2.2 设 $n \geq 3$, $\gamma = \pm 1$, $\omega > 0$, $0 < q < p < \frac{4}{n-2}$ 和 $c < c_*$, 则 $d(\omega) > 0$.

证明 设 $v \in H^1 \backslash \{0\}$, 定义极小化问题 $d(\omega) := \inf\{S_\omega(v) :\ v \in H^1\backslash\{0\},\ K_\omega(v) \leq 0\}$. 由 $K_\omega(v) \leq 0$ 知,

$$G_\omega(v) \leq \gamma\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2} + \|v\|_{L^{p+2}}^{p+2} \leq C(G_\omega(v)^{\frac{q}{2}+1} + G_\omega(v)^{\frac{p}{2}+1}),$$

故

$$1 \leq C(G_\omega(v)^{\frac{q}{2}} + G_\omega(v)^{\frac{p}{2}}).$$

若 $G_\omega(v) \leq 1$, 则 $1 \leq 2CG_\omega(v)^{\frac{q}{2}}$. 故对所有的 $K_\omega(v) \leq 0$,

$$G_\omega(v) \geq \min\{1, (2C)^{-\frac{2}{q}}\}.$$

若 $K_\omega(v) = 0$, 则

$$S_\omega(v) \geq \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v) \geq \frac{q}{2(q+2)}\min\{1, (2C)^{-\frac{2}{q}}\}. \tag{2.6}$$

故在 $v \in H^1\backslash\{0\}$ 上取下确界, 可得 $d(\omega) > 0$.

引理 2.3 设 $n \geq 3$, $\gamma = \pm 1$, $\omega > 0$ 和 $0 < q < p < \frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0 < c < c_*$, 则子集

$$\mathcal{M}_\omega := \{v \in H^1\backslash\{0\},\ S_\omega(v) = d(\omega),\ K_\omega(v) = 0\}$$

是非空的.

(ii) 若 $c < 0$, 则子集

$$\mathcal{M}_{rad,\omega} := \{v \in H^1_{rad}\backslash\{0\},\ S_\omega(v) = d(rad, \omega),\ K_\omega(v) = 0\}$$

是非空的.

证明 (i) 设在条件 $0 < c < c_*$ 时, $v \in H^1\backslash\{0\}$ 且 $K_\omega(v) \leq 0$, 对任意的 $\lambda > 0$,

$$K_\omega(\lambda v) = \lambda^2 G_\omega(v) - \lambda^{p+2}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2} - \lambda^{q+2}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}.$$

对 $K_\omega(v) \leq 0$, 存在 $\lambda_0 \in (0, 1]$ 使得 $K_\omega(\lambda_0 v) = 0$, 则

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 G_\omega(v) &= \lambda_0^{p+2}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2} + \lambda_0^{q+2}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2} \\ &\leq \lambda_0^{p+2}\big(\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2} + \|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}\big), \end{aligned}$$

其中 $\lambda_0 \geq \left(\frac{G_\omega(v)}{\|v\|^{p+2}_{L^{p+2}}+\|v\|^{q+2}_{L^{q+2}}}\right)^{\frac{1}{p}}$, 及 $\lambda_0 \in (0,1]$.

再设 $(v_n)_{n\geq 1}$ 是 $d(\omega)$ 的极小化序列, v_n^* 是 v_n 的对称重排, 由 $\|v_n^*\|_{L^{p+2}} = \|v_n\|_{L^{p+2}}$, $\|\nabla v_n^*\|_{L^2} \leq \|\nabla v_n\|_{L^2}$ 和式 (2.2) 得, 对所有的 $n \geq 1$, $G_\omega(v_n^*) \leq G_\omega(v_n)$ 和 $K_\omega(v_n^*) \leq K_\omega(v_n) = 0$, 故存在 $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset (0,1]$, 使得 $K_\omega(\lambda_n v_n^*) = 0$. 又由式 (2.5) 可知,

$$\begin{aligned}
S_\omega(\lambda_n v_n^*) &= \frac{1}{q+2}K_\omega(\lambda_n v_n^*) + \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(\lambda_n v_n^*) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|\lambda_n v_n^*\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&= \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(\lambda_n v_n^*) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|\lambda_n v_n^*\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&= \frac{q}{2(q+2)}\lambda_n^2 G_\omega(v_n^*) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\lambda_n^{p+2}\|v_n^*\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&\leq \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v_n^*) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v_n^*\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&\leq \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v_n) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v_n\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&= S_\omega(v_n),
\end{aligned}$$

故 $(\lambda_n v_n^*)_{n\geq 1}$ 也是 $d(\omega)$ 的一个极小化序列, 则 $d(\omega)$ 的任意一个极小化序列都是径向对称的.因为 $(v_n)_{n\geq 1}$ 是 $d(\omega)$ 的一个极小化序列, 故当 $n \to \infty$ 时, $v_n \in H^1\backslash\{0\}$, $K_\omega(v_n) = 0$ 和 $S_\omega(v_n) \to d(\omega)$ 几乎处处成立. 根据 $K_\omega(v_n) = 0$ 知, 对任意的 $n \geq 1$, $G_\omega(v_n) = \|v_n\|^{p+2}_{L^{p+2}} + \|v_n\|^{q+2}_{L^{q+2}}$. 由式 (2.5) 和 $S_\omega(v_n) \to d(\omega)$ 知, 当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v_n) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v_n\|^{p+2}_{L^{p+2}} \to d(\omega), \tag{2.7}$$

故对所有的 $n \geq 1$ 时, 存在 $C > 0$ 使得 $G_\omega(v_n) \leq \frac{2(q+2)}{q}d(\omega) + C$, 则 $(v_n)_{n\geq 1}$ 在 H^1 中有界. 最后, 设 $(v_n)_{n\geq 1}$ 是 $d(\omega)$ 的一个径向对称的极小化序列, 因为 $(v_n)_{n\geq 1}$ 在 H^1 中有界, 故对任意的 $2 < q < \frac{2n}{n-2}$, 由紧性嵌入 $H^1_{rad} \hookrightarrow L^q$ 知, 存在 $v \in H^1$ 和子序列 $(v_n)_{n\geq 1}$, 在 H^1 中, $v_n \rightharpoonup v$; 在 L^q 中, $v_n \to v$. 特别地, $v \neq 0$. 又由式 (2.6) 知, $\liminf_{n\to\infty}\|v_n\|^{p+2}_{L^{p+2}} > 0$. 引用 Dinh 在文献 [8] 中相同的理论, 即通过弱收敛的弱下半连续性, 可知

$$K_\omega(v) \leq \liminf_{n\to\infty} K_\omega(v_n) = 0,$$

则存在 $\lambda_0 \in (0,1]$ 使得 $K_\omega(\lambda_0 v) = 0$. 又由 $d(\omega)$ 的定义知,

$$\begin{aligned}
d(\omega) \leq S_\omega(\lambda_0 v) &= \frac{1}{q+2}K_\omega(\lambda_0 v) + \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(\lambda_0 v) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|\lambda_0 v\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&= \frac{q}{2(q+2)}\lambda_0^2 G_\omega(v) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\lambda_0^{p+2}\|v\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&\leq \frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v\|^{p+2}_{L^{p+2}} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{q}{2(q+2)}G_\omega(v_n) + \frac{p-q}{(q+2)(p+2)}\|v_n\|^{p+2}_{L^{p+2}}\Big) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} S_\omega(v_n) = d(\omega).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

故 $S_\omega(\lambda_0 v)=d(\omega)$ 或 $\lambda_0 v$ 是 $d(\omega)$ 的极小值.

(ii) 在条件 $c<0$ 时, 式 (2.2) 不成立, 故只考虑径向基态, 证明过程与 (i) 方法类似. 证明完成.

引理 2.4 $\mathcal{M}_\omega \subseteq \mathcal{G}_\omega$.

证明 设 $u\in\mathcal{M}_\omega$, 由 $K_\omega(u)=0$ 得, $G_\omega(u)=\|u\|_{L^{p+2}}^{p+2}+\gamma\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}$. 又因为 u 是 $d(\omega)$ 的一个极小值, 故存在拉格朗日乘子 $\eta\in\mathbb{R}$ 使得 $S'_\omega(u)=\eta K'_\omega(u)$, 则

$$0=K_\omega(u)=\langle S'_\omega(u),u\rangle=\eta\langle K'_\omega(u),u\rangle.$$

由于

$$K'_\omega(u)=-2\Delta u+2\omega u-2c|x|^{-2}u-(p+2)|u|^p u-\gamma(q+2)|u|^q u,$$

有

$$\langle K'_\omega(u),u\rangle=2G_\omega(u)-(p+2)\|u\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\gamma(q+2)\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}<0.$$

故 $\eta=0$, $S'_\omega(u)=0$. 特别地, 有 $u\in\mathcal{A}_\omega$. 再设 $v\in\mathcal{A}_\omega$, 则

$$K_\omega(v)=\langle S'_\omega(v),v\rangle=0.$$

由 $\mathcal{M}_\omega$ 的定义知, $S_\omega(u)\le S_\omega(v)$, 故 $u\in\mathcal{G}_\omega$, 证明完成.

引理 2.5 $\mathcal{G}_\omega\subset\mathcal{M}_\omega$.

证明 设 $u\in\mathcal{G}_\omega$, 由于 $\mathcal{M}_\omega$ 非空, 故取 $v\in\mathcal{M}_\omega$. 根据引理 2.4 得, $v\in\mathcal{G}_\omega$. 特别地, $S_\omega(u)=S_\omega(v)$. 又因为 $v\in\mathcal{M}_\omega$, 所以

$$S_\omega(u)=S_\omega(v)=d(\omega),$$

则 $K_\omega(u)=0$. 设 $u\in\mathcal{A}_{rad,\omega}$, 有 $S'_\omega(u)=0$, 故 $K_\omega(u)=\langle S'_\omega(u),u\rangle=0$. 则 $u\in\mathcal{M}_{rad,\omega}$. 证明完成.

由引理 2.3, 2.4 和 2.5, 故可证明命题 2.1.

引理 2.6 设 $n\ge 3$, $\omega>0$, $\gamma=1$ 和 $\frac{4}{n}\le q<p<\frac{4}{n-2}$ 或 $\gamma=-1$, $0<q<p$ 和 $\frac{4}{n}\le p<\frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0<c<c_*$, 则对任意的 $u_\omega\in\mathcal{G}_\omega$,

$$S_\omega(u_\omega)=\inf\{S_\omega(v):v\in H^1\backslash\{0\},\ Q(v)=0\}. \tag{2.9}$$

(ii) 若 $c<0$, 则对任意的 $u_\omega\in\mathcal{G}_{rad,\omega}$,

$$S_\omega(u_\omega)=\inf\{S_\omega(v):v\in H^1_{rad}\backslash\{0\},\ Q(v)=0\}.$$

证明 (i) 在条件 $0<c<c_*$, $\gamma=1$, $\frac{4}{n}\le q<p<\frac{4}{n-2}$ 及 $Q(v)=0$ 时,

$$S_\omega(v)=S_\omega(v)-\frac{1}{q^*}Q(v)=\frac{q^*-2}{2q^*}\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{p^*-q^*}{q^*(p+2)}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}\ge 0.$$

当 $\gamma=-1$, $0<q<p$, $\frac{4}{n}\le p<\frac{4}{n-2}$ 和 $Q(v)=0$ 时,

$$S_\omega(v)=S_\omega(v)-\frac{1}{p^*}Q(v)=\frac{p^*-2}{2p^*}\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{p^*-q^*}{p^*(q+2)}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}\ge 0.$$

设 $d_n:=\inf\{S_\omega(v):v\in H^1\backslash\{0\},\ Q(v)=0\}$, 由下面的 Pohozaev's 恒等式

$$\|u_\omega\|_{H_c^1}^2+\omega\|u_\omega\|_{L^2}^2-\|u_\omega\|_{L^{p+2}}^{p+2}-\gamma\|u_\omega\|_{L^{q+2}}^{q+2}=0,$$

和

$$\left(1-\frac{n}{2}\right)\|u_\omega\|_{H_c^1}^2-\frac{n\omega}{2}\|u_\omega\|_{L^2}^2+\frac{n}{p+2}\|u_\omega\|_{L^{p+2}}^{p+2}+\frac{n\gamma}{q+2}\|u_\omega\|_{L^{q+2}}^{q+2}=0,$$

可知 $K_\omega(u_\omega)=Q(u_\omega)=0$. 根据 d_n 的定义知,

$$S_\omega(u_\omega)\ge d_n. \tag{2.10}$$

设 $v\in H^1\backslash\{0\}$ 使得 $Q(v)=0$. 若 $K_\omega(v)=0$, 则由命题 2.1 可知, $S_\omega(v)\ge S_\omega(u_\omega)$. 若 $K_\omega(v)\ne 0$, 则

$$K_\omega(v^\lambda)=\lambda^2\|v\|_{H_c^1}^2+\omega\|v\|_{L^2}^2-\gamma\lambda^{q^*}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}-\lambda^{p^*}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}. \tag{2.11}$$

因此, 当 $\frac{4}{n}<p<\frac{4}{n-2}$ 时,

$$\lim_{\lambda\to 0}K_\omega(v^\lambda)=\omega\|v\|_{L^2}^2>0,\ \lim_{\lambda\to\infty}K_\omega(v^\lambda)<0. \tag{2.12}$$

当 $\gamma=-1, p=\frac{4}{n}$ 时, $Q(v)=0$ 及式 (2.12) 成立. 故存在 $\lambda_0>0$ 使得 $K_\omega(v^{\lambda_0})=0, S_\omega(v^{\lambda_0})\ge S_\omega(u_\omega)$. 又因为

$$\partial_\lambda S_\omega(v^\lambda)=\lambda\|v\|_{H_c^1}^2-\frac{\gamma q^*}{q+2}\lambda^{q^*-1}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}-\frac{p^*}{p+2}\lambda^{p^*-1}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}=\frac{Q(v^\lambda)}{\lambda},$$

故设

$$f(\lambda):=Q(v^\lambda)=\lambda^2\|v\|_{H_c^1}^2-\frac{\gamma q^*}{q+2}\lambda^{q^*}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}-\frac{p^*}{p+2}\lambda^{p^*}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2},$$

当 $\gamma=1$, $\frac{4}{n}\le q<p<\frac{4}{n-2}$ 时, $f(\lambda)=0$ 存在唯一的正解 $\lambda=1$. 当 $\gamma=-1$ 和 $\frac{4}{n}\le q<p<\frac{4}{n-2}$ 时, 假设存在 $\lambda_1\ne 1$ 使得 $f(\lambda_1)=0$, 则

$$\|v\|_{H_c^1}^2(1-\lambda_1^{q^*-2})=\frac{p^*}{p+2}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}(\lambda_1^{p^*-2}-\lambda_1^{q^*-2}).$$

若 $\lambda_1<1$, 则 $1-\lambda_1^{q^*-2}\ge 0$ 和 $\lambda_1^{p^*-2}-\lambda_1^{q^*-2}<0$, 产生矛盾. 若 $\lambda_1>1$, 则 $1-\lambda_1^{q^*-2}\le 0$ 和 $\lambda_1^{p^*-2}-\lambda_1^{q^*-2}>0$, 产生矛盾. 故方程 $f(\lambda)=0$ 存在唯一的正解 $\lambda=1$. 当 $\gamma=-1$ 和 $0<q<\frac{4}{n}\le p<\frac{4}{n-2}$ 时, 假设存在 $\lambda_2\ne 1$ 使得 $f(\lambda_2)=0$, 则

$$\frac{q^*}{q+2}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}(1-\lambda_2^{2-q^*})=\frac{p^*}{p+2}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}(\lambda_2^{p^*-q^*}-\lambda_2^{2-q^*}).$$

若 $\lambda_2<1$, 则 $1-\lambda_2^{2-q^*}\ge 0$ 和 $\lambda_2^{p^*-q^*}-\lambda_2^{2-q^*}\le 0$, 产生矛盾. 若 $\lambda_2>1$, 则 $1-\lambda_2^{2-q^*}<0$ 和

$\lambda_2^{p^*-q^*}-\lambda_2^{2-q^*}\geq 0$, 产生矛盾. 故方程 $f(\lambda)=0$ 存在唯一的正解 $\lambda=1$. 因此, 对所有的 $\lambda\in(0,1)$, $\partial_\lambda S_\omega(v^\lambda)>0$; 对所有的 $\lambda\in(1,\infty)$, $\partial_\lambda S_\omega(v^\lambda)<0$. 则对任意的 $\lambda>0$ 和 $\lambda\neq 1$ 时, $S_\omega(v^\lambda)<S_\omega(v)$. 对所有的 $v\in H^1\backslash\{0\}$ 时, $S_\omega(v_0^\lambda)\leq S_\omega(v)$ 和 $Q(v)=0$. 在 v 上取下确界, 有

$$S_\omega(u_\omega)\leq d_n. \tag{2.13}$$

(ii) 在条件 $c<0$ 时, 证明与 (i) 相似. 证明完成.

引理 2.7 设 $n\geq 3$, $\omega>0$, $\gamma=-1$, $0<q<p$ 和 $\frac{4}{n}\leq p<\frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0<c<c_*$, 则对任意的 $u_\omega\in\mathcal{G}_\omega$,

$$S_\omega(u_\omega)=S_\omega^1(u_\omega)=\inf\{S_\omega^1(v):v\in H^1\backslash\{0\},\ Q(v)\leq 0\}. \tag{2.14}$$

(ii) 若 $c<0$, 则对任意的 $u_\omega\in\mathcal{G}_{rad,\omega}$,

$$S_\omega(u_\omega)=S_\omega^1(u_\omega)=\inf\{S_\omega^1(v):v\in H_{rad}^1\backslash\{0\},\ Q(v)\leq 0\},$$

其中

$$\begin{aligned}S_\omega^1(v)&=S_\omega(v)-\frac{1}{p^*}Q(v)\\&=\frac{p^*-2}{2p^*}\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{p^*-q^*}{p^*(q+2)}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

证明 (i) 在条件 $0<c<c_*$ 时, 设 $d^1(\omega)=\inf\{S_\omega^1(v):v\in H^1\backslash\{0\},\ Q(v)\leq 0\}$. 由 $Q(u_\omega)=0$, 可得

$$S_\omega^1(u_\omega)\geq d^1(\omega). \tag{2.16}$$

设 $v\in H^1\backslash\{0\}$ 和 $Q(v)\leq 0$. 若 $Q(v)=0$, 则由引理 2.5 可知

$$S_\omega^1(v)=S_\omega(v)-\frac{1}{p^*}Q(v)=S_\omega(v)\geq S_\omega(u_\omega)=S_\omega^1(u_\omega).$$

若 $Q(v)<0$, 则对足够小的 $\lambda>0$,

$$Q(v^\lambda)=\lambda^2\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{q^*}{q+2}\lambda^{q^*}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}-\frac{p^*}{p+2}\lambda^{p^*}\|v\|_{L^{p+2}}^{p+2}>0,$$

故存在 $\lambda_0\in(0,1)$ 使得 $Q(v^{\lambda_0})=0$. 于是

$$\begin{aligned}S_\omega^1(v)&=\frac{p^*-2}{2p^*}\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{p^*-q^*}{p^*(q+2)}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}\\&\geq\frac{p^*-2}{2p^*}\lambda_0^2\|v\|_{H_c^1}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{p^*-q^*}{p^*(q+2)}\lambda_0^{q^*}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}\\&=S_\omega^1(v^{\lambda_0})=S_\omega(v^{\lambda_0})\geq S_\omega(u_\omega)=S_\omega^1(u_\omega).\end{aligned}$$

故

$$d^1(\omega) \geq S^1_\omega(u_\omega). \tag{2.17}$$

结合式 (2.16) 和 (2.17) 得, $S^1_\omega(u_\omega) = d^1(\omega)$.

(ii) 在条件 $c < 0$ 时, 证明与 (i) 相似. 证明完成.

注 在条件 $\gamma = 1$ 和 $p = \frac{4}{n}$ 时, 上述证明方法并不适用. 故考虑下面的结果.

引理 2.8 设 $n \geq 3$, $\omega > 0$, $\gamma = 1$, $\frac{4}{n} \leq q < p < \frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0 < c < c_*$, $v \in H^1 \backslash \{0\}$ 和 $Q(v) \leq 0$, 则对任意的 $u_\omega \in \mathcal{G}_\omega$,

$$S_\omega(u_\omega) \leq S_\omega(v) - \frac{Q(v)}{2}.$$

(ii) 若 $c < 0$, $v \in H^1_{rad} \backslash \{0\}$ 和 $Q(v) \leq 0$, 则对任意的 $u_\omega \in \mathcal{G}_{rad,\omega}$,

$$S_\omega(u_\omega) \leq S_\omega(v) - \frac{Q(v)}{2}.$$

证明 (i) 在条件 $0 < c < c_*$ 时, 由式 (2.11) 和 (2.12) 知, 存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $K(v^{\lambda_0}) = 0$. 又由 $d(\omega)$ 的定义得, $S_\omega(u_\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0})$. 此外, 当 $\gamma = 1$ 和 $\frac{4}{n} \leq q < p < \frac{4}{n-2}$, 函数

$$\begin{aligned} h(\lambda) := &S_\omega(v^\lambda) - \frac{\lambda^2 Q(v)}{2} \\ &= \frac{\omega}{2}\|v\|^2_{L^2} + \frac{q^*\lambda^2 - 2\lambda^{q^*}}{2(q+2)}\|v\|^{q+2}_{L^{q+2}} + \frac{p^*\lambda^2 - 2\lambda^{p^*}}{2(p+2)}\|v\|^{p+2}_{L^{p+2}}, \end{aligned}$$

在 $\lambda = 1$ 处取得最大值, 故 $Q(v) \leq 0$ 时,

$$S_\omega(u_\omega) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) \leq S_\omega(v^{\lambda_0}) - \frac{\lambda_0^2 Q(v)}{2} \leq S_\omega(v) - \frac{Q(v)}{2}.$$

(ii) 在条件 $c < 0$ 时, 证明与 (i) 相似. 证明完成.

接下来, 设 $u_\omega \in \mathcal{G}_\omega$, 并定义

$$\mathcal{B}_\omega = \{v \in H^1 \backslash \{0\} : S_\omega(v) < S_\omega(u_\omega),\ Q(v) < 0\}.$$

相似地, 当 $u_\omega \in \mathcal{G}_{rad,\omega}$, 子集

$$\mathcal{B}_{rad,\omega} := \mathcal{B}_\omega \cap H^1_{rad}.$$

引理 2.9 设 $n \geq 3$, $\omega > 0$, u_ω 是方程 (1.2) 的基态. 若 $\gamma = 1$, $\frac{4}{n} \leq q < p < \frac{4}{n-2}$ 或 $\gamma = -1$, $0 < q < p$, $\frac{4}{n} \leq p < \frac{4}{n-2}$, 那么

(i) 若 $0 < c < c_*$, 则 $\mathcal{B}_\omega$ 是不变集. 即若 $\psi_0 \in \mathcal{B}_\omega$, 则以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t)$ 属于 $\mathcal{B}_\omega$, 且对任意的 $t \in [0, T^*)$

$$Q(\psi(t)) \leq 2(S(\psi_0) - S(u_\omega)). \tag{2.18}$$

(ii) 若 $c<0$, 则 $\mathcal{B}_{rad,\omega}$ 也是不变集.

证明 (i) 在条件 $0<c<c_*$ 时, 设 $\psi_0\in\mathcal{B}_\omega$, 由局部适定性 [10] 知, 存在唯一的解 $\psi\in C([0,T^*),H^1)$. 由质量守恒和能量守恒定理知, 对任意的 $t\in[0,T^*)$,

$$S_\omega(\psi(t))=S_\omega(\psi_0)<S_\omega(u_\omega). \tag{2.19}$$

此外, 由函数 $t\mapsto Q(\psi(t))$ 的连续性和引理 2.5 知, 若存在 $t_0\in[0,T^*)$ 使得 $Q(\psi(t_0))=0$, 则 $S_\omega(\psi(t_0))\geq S_\omega(u_\omega)$, 这与方程 (2.19) 矛盾, 故对任意的 $t\in[0,T^*)$, $Q(\psi(t))<0$. 当 $\gamma=1$ 时, 由引理 2.8 可得方程 (2.18). 当 $\gamma=-1$ 时, 由引理 2.7 知, 对所有的 $t\in[0,T^*)$,

$$S_\omega(u_\omega)\leq S_\omega^1(\psi(t))=S_\omega(\psi(t))-\frac{1}{p^*}Q(\psi(t))<S_\omega(\psi_0)-\frac{Q(\psi(t))}{2}.$$

故 $Q(\psi(t))\leq 2(S(\psi_0)-S(u_\omega))$.

(ii) 在条件 $c<0$ 时, 证明与 (i) 相似. 证明完成.

定理 1.3 的证明 (i) 设在条件 $0<c<c_*$ 时, $\varepsilon>0$, $\omega>0$, $u_\omega\in\mathcal{G}_\omega$, $u_\omega^\lambda(x):=\lambda^{\frac{n}{2}}u_\omega(\lambda x)$. 因为在 H^1 中, 当 $\lambda\to 1$ 时, $u_\omega^\lambda\to u_\omega$, 存在 $\lambda_0>1$ 使得 $\|u_\omega^{\lambda_0}-u_\omega\|_{H^1}<\varepsilon$, 随着 λ_0 的逐渐减小, $u_\omega^{\lambda_0}\in\mathcal{B}_\omega$. 根据 Pohozaev's 恒等式得, $Q(u_\omega)=0$. 根据引理 2.5 知, $\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda)=0$ 且存在唯一的非零解. 对所有的 $\lambda\in(0,1)$, $\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda)>0$; 对所有的 $\lambda\in(1,\infty)$, $\partial_\lambda S_\omega(u_\omega^\lambda)<0$. 故对所有的 $\lambda\in(0,1)$, $Q(u_\omega^\lambda)>0$; 对所有的 $\lambda\in(1,\infty)$, $Q(u_\omega^\lambda)<0$. 故 $S_\omega(u_\omega^{\lambda_0})<S_\omega(u_\omega)$, $Q(u_\omega^{\lambda_0})<0$, 或 $u_\omega^{\lambda_0}\in\mathcal{B}_\omega$. 由局部适定性知, 存在唯一的解 $\psi\in C([0,T^*),H^1)$ 及初值 $\psi_0=u_\omega^{\lambda_0}$, 其中 T^* 为最大存在时间. 又因为 u_ω 在无穷远处呈指数衰减, 故 $u_\omega^{\lambda_0}$ 在无穷远处有相同的指数衰减, $u_\omega^{\lambda_0}\in\Sigma=H^1\cap L^2(|x|^2dx)$. 由文献 [11] 知, $\psi\in C([0,T^*),\Sigma)$, 对所有的 $t\in[0,T^*)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}\|x\psi(t)\|_{L^2}^2=8Q(\psi(t)),$$

又因为 $\mathcal{B}_\omega$ 是不变集, 故对所有的 $t\in[0,T^*)$, $\psi(t)\in\mathcal{B}_\omega$,

$$Q(\psi(t))\leq 2(S_\omega(\psi(t))-S_\omega(u_\omega))=2(S_\omega(u_\omega^{\lambda_0})-S_\omega(u_\omega))<0,$$

由凸性论证 [12] 知, 以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t)$ 在有限时间内爆破.

(ii) 在条件 $c<0$ 时, 证明与 (i) 相似. 证明完成.

参考文献

[1] Berestycki, H. and Cazenave, T. (1981) Instabilité des états stationaires dans les éuations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **293**, 489-492.

[2] Coz, S.L. (2008) A Note on Berestycki-Cazenave's Classical Instability Result for Nonlinear

Schrödinger Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **8**, 455-463.
https://doi.org/10.1515/ans-2008-0302

[3] Feng, B.H. and Wang, Q.X. (2021) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations in Trapped Dipolar Quantum Gases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **33**, 1989-2008. https://doi.org/10.1007/s10884-020-09881-0

[4] Fukaya, N. and Ohta, M. (2019) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Attractive Inverse Power Potential. *Osaka Journal of Mathematics*, **56**, 713-726.

[5] Ohta, M. (2018) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Harmonic Potential. *Funkcialaj Ekvacioj*, **61**, 135-143. https://doi.org/10.1619/fesi.61.135

[6] Ohta, M. (2018) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with a Partial Confinement. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **17**, 1671-1680.
https://doi.org/10.3934/cpaa.2018080

[7] Bensouilah, A., Dinh, V.D. and Zhu, S.H. (2018) On Stability and Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Inverse-Square Potential. *Journal of Mathematical Physics*, **59**, Article 101505. https://doi.org/10.1063/1.5038041

[8] Dinh, V.D. (2021) On the Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Inverse-Square Potential. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**, 1699-1716.
https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1779235

[9] Killip, R., Miao, C., Visan, M., *et al.* (2017) Sobolev Spaces Adapted to the Schrödinger Operator with Inverse-Square Potential. *Mathematische Zeitschrift*, **288**, 1273-1298.
https://doi.org/10.1007/s00209-017-1934-8

[10] Okazawa, N., Suzuki, T. and Yokota, T. (2012) Energy Methods for Abstract Nonlinear Schrödinger Equations. *Evolution Equations and Control Theory*, **1**, 337-354.
https://doi.org/10.3934/eect.2012.1.337

[11] Cazenave, T. (2003) Semilinear Schrödinger Equations. Courant Lecture Notes in Mathematics Vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences. American Mathematical Society, New York, Providence, RI.

[12] Glassey, R.T. (1997) On the Blowing up of Solutions to the Cauchy Problem for Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **18**, 1794-1797.
https://doi.org/10.1063/1.523491