Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2120-2124
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137219

Hans汉斯

交换群的子群包含图的一些性质

康富斌，李元林[*]

江西理工大学理学院，江西 赣州

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月21日；发布日期：2023年7月28日

摘　要

有限群G的子群包含图$In(G)$是指下列无向简单图：$In(G)$的顶点集是G的所有非平凡的子群组成的集合，而G的两个非平凡的子群H和K在$In(G)$中有边相连当且仅当 $H \subset K$ 或 $H \supset K$ 。本文将给出交换群的子群包含图的一些性质；特别地，本文将决定子群包含图是完美图(或三角图，或强三角图)的有限交换群。

关键词

群，交换群，子群包含图，子空间包含图

Some Properties of Subgroup Inclusion Graph of an Abelian Group

Fubin Kang, Yuanlin Li[*]

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, JXUST, Ganzhou Jiangxi

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 21st, 2023; published: Jul. 28th, 2023

Abstract

The subgroup inclusion graph $In(G)$ of a finite group G is an undirected simple graph defined as follows: the vertex set of $In(G)$ is consisting of all nontrivial subgroups of G, and for two nontrivial subgroups H and K of G, there is an edge adjoining them in $In(G)$ if and only if $H \subset K$ or $H \supset K$. In this paper, we will give some properties of the subgroup inclusion graph of Abelian groups; specially, we will determine the Abelian groups whose subgroup inclusion graph is a perfect graph (triangular graph, or strong triangular graph).

[*]通讯作者。

文章引用: 康富斌, 李元林. 交换群的子群包含图的一些性质[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2120-2124.
DOI: 10.12677/pm.2023.137219

Keywords

Groups, Abelian Groups, Subgroup Inclusion Graphs, Subspace Inclusion Graphs

1. 引言

本文所涉及的群均是有限群，图是有限简单图。关于群论和图论的相关基本概念请参考文[1]和[2]。

对于给定的群，可用多种方式定义图，比如 Cayley 图、交图、交换图和素图等(见文[3] [4] [5] [6])。设 G 是群，则 G 的子群包含图 $In(G)$是指下列无向简单图：$In(G)$的顶点集是 G 的所有非平凡的子群组成的集合，而 G 的两个非平凡的子群 H 和 K 在 $In(G)$中有边相连(即 $H \sim K$)当且仅当 $H \subset K$ 或 $H \supset K$ 。Devi 和 Rajkumar 在文[7]中给出子群包含图的定义，决定了子群包含图是某类图(比如，完全图、二部图、树、星或平面图)的群，确定了子群包含图的团数、色数和围长，并讨论了交换群的子群包含图的直径。近来，偶世坤等[8]确定了幂零群的子群包含图的直径，并刻画了循环群的子群包含图的独立支配集和自同构群；偶世坤等[9]找出了子群包含图是平面图的所有幂零群，并计算了循环群的子群包含图的固定数。如果 G 是初等交换群，本文将看到 $In(G)$实际上是向量空间的子空间包含图(见定理 2.1)。

设 V 是有限维向量空间，则 V 的子空间包含图 $In(V)$是指下列无向简单图：$In(V)$的顶点集是 V 的所有非平凡的子空间组成的集合，而 V 的两个非平凡的子空间 U 和 W 在 $In(V)$中有边相连当且仅当 $U \subset W$ 或 $U \supset W$ 。2016 年，Das [10]确定了 $In(V)$的直径、围长和团数，证明了两个向量空间的子空间包含图同构当且仅当这两个向量空间同构。记 V_n 是 n 维向量空间。2018 年，Das [11]考虑了 $In(V)$的完美性和平面性，并给出了 $In(V_3)$的支配数的界。同一年，Ma 和 Wang [12]研究了 $In(V)$的独立数；Wong 等[13]证明了 $In(V_3)$是距离正则的，并计算了 $In(V_3)$的支配数。2019 年，Wang 和 Wong [14]刻画了 $In(V)$的自同构。此外，Cameron 等[15]证明了 $In(V_3)$既是凯莱图也是汉密尔顿图。

受上述文献的影响，我们将给出交换群的子群包含图的一些性质；特别地，我们将决定子群包含图是完美图(或三角图，或强三角图)的有限交换群。

2. 初等交换群的子群包含图

为了考虑初等交换群的包含图的性质，我们先介绍一个重要结论。

定理 2.1 设 G 是初等交换 p-群，其中 p 是素数，则存在正整数 n 使得 $In(G)$与 $In(V_n)$是同构的。

证明设 $G = F_p^n$ 。定义 F_p 对 G 的数乘运算为：

$$k\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right),\quad k\in F_p,\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in F_p^n,$$

这里的 ka_i $(1 \le i \le n)$是 k 个 a_i 的和。易知，G 关于加法运算和上述数乘运算成为 F_p 上 n 维向量空间，故而 G 与 V_n 作为向量空间同构。由于 G 的子群均可看成 G 的子空间，故 $In(G)$与 $In(V_n)$是同构的。证毕。

下面将由定理 2.1 得到初等交换群的包含图的一些性质。首先，计算图的直径、围长、团数和色数。

推论 2.2 设 G 是初等交换 p-群，其中 p 是素数。若 G 的阶 $|G|$ 至少含 3 个素因数，则

1) $In(G)$的直径是 3；

2) $In(G)$的围长 $girth\left(In\left(G\right)\right)$是 3，6 或无穷；

3) $In(G)$的团数和色数是 $n-1$，其中 n 是 G 作为 F_p 上向量空间的维数。

证明由定理 2.1 和文[10]的定理 4.1、定理 4.2、定理 5.1、定理 5.2 立刻得到结论。

记 $\gamma\left(In\left(G\right)\right)$ 为群 G 的包含图 $In(G)$的支配数。当 G 是循环群且 $In(G)$是连通图时，偶世坤等证明了 $\gamma\left(In\left(G\right)\right)=2$ (见文[8]的引理 4.1)。现在我们考虑 $In(G)$的独立数和支配数。

推论 2.3 设 G 是初等交换 p-群。若$|G|$至少含 3 个素因数，则

1) $In(G)$的支配数 $\gamma\left(In\left(G\right)\right)\geq 2p$，且等式成立的充要条件是 $n=3$；

2) $In(G)$的独立数为 $\alpha\left(In\left(G\right)\right)=\dfrac{\left(p^{n}-1\right)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots\left(p^{n-k+1}-1\right)}{\left(p^{k}-1\right)\left(p^{k-1}-1\right)\cdots\left(p-1\right)}$，其中 $k=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$。

证明由定理 2.1、文[12]的定理 2.5 和文[13]的定理 2.2 立刻得证。

当初等交换群的阶是 3 个素数的乘积时，可得下面的结论。

推论 2.4 设 G 是初等交换群。若$|G|$是 3 个素数的乘积，则

1) $In(G)$是顶点传递的；

2) $In(G)$是距离传递的；

3) $In(G)$是距离正则的；

4) $In(G)$是凯莱图；

5) $In(G)$是哈密尔顿图。

证明由定理 2.1、文[11]的定理 6.5、文[13]的定理 3.1 和推论 3.2、以及文[15]的定理 2.1 和定理 2.2 立刻可得。

图 Γ 被称为**完美的**(也称 Γ 为**完美图**)，如果它的任一子图 Γ_0 的团数等于 Γ_0 的色数。文[7]给出了有限群的包含图是弱完美的。本节的最后我们考虑初等交换群的包含图的完美性。

推论 2.5 设 G 是初等交换群。若$|G|$至少含 3 个素因数，则 $In(G)$是完美图。

证明由定理 2.1 和[10]的定理 5.2 可得证。

3. 交换群的子群包含图

当 G 是有限交换群时，若 k 是$|G|$的因数，则 G 必有 k 阶子群。设 H 和 K 是 G 的两个非平凡子群，若在 $In(G)$中 $H\sim K$，则 $H\subset K$ 或 $H\supset K$，故而$|H|$整除$|K|$，或者$|K|$整除$|H|$。

首先，我们介绍一个引理。

引理 3.1 设 G 是有限交换群，若$|G|$是 3 个素数的乘积，则 $In(G)$是不含 4 圈的二部图。进而，G 的围长 $girth\left(In\left(G\right)\right)\geq 6$。

证明 如果 $In(G)$是树，结论显然成立。如果 $In(G)$不是树，则 $In(G)$中有圈。不妨设 $girth\left(In\left(G\right)\right)=n$，且令 $G_1\sim G_2\sim\cdots\sim G_n\sim G_1$ 是 $In(G)$中的 n 圈。显然，$|G_i|$至多 2 个素因数，$1\leq i\leq n$。如果$|G_1|$是素数，则由$|G_1|$整除$|G_2|$ (因为 $G_1\sim G_2$)得知$|G_2|$是 2 个素数的乘积，再由$|G_3|$整除$|G_2|$ (因为 $G_2\sim G_3$)得知$|G_3|$是素数。于是由归纳法可得$\left|G_{2j-1}\right|$是素数，且$\left|G_{2j}\right|$是 2 个素数的乘积，$1\leq j\leq 2^{-1}\left(n+1\right)$。如果$|G_1|$是 2 个素数的乘积，同理可得$\left|G_{2j-1}\right|$是 2 个素数的乘积，且$\left|G_{2j}\right|$是素数，$1\leq j\leq 2^{-1}\left(n+1\right)$。不妨设$\left|G_{2j-1}\right|$是素数，且$\left|G_{2j}\right|$是 2 个素数的乘积，$1\leq j\leq 2^{-1}\left(n+1\right)$。现证：$n$ 不是奇数。否则，若 n 是奇数，则由$|G_1|$和$|G_n|$均是素数可知 G_1 和 G_n 没有真包含关系，即 G_1 和 G_n 不相连，矛盾。所以，$In(G)$是二部图。

下面只需证：$In(G)$不含 4 圈。反证。若 $n=4$，即 $G_1\sim G_2\sim G_3\sim G_4\sim G_1$，则由 $G_4\sim G_1\sim G_2$ 可知 $G_1=G_2\cap G_4$；由 $G_2\sim G_3\sim G_4$ 得到 $G_3=G_2\cap G_4$。于是 $G_1=G_3$，这说明 $In(G)$中存在 3 圈(即三角形)，矛

盾。因此，$In(G)$不含 4 圈。得证。

实际上，直接计算立得下面的结论。

引理 3.2 设 G 是交换群。若$|G|$是 3 个素数的乘积，则

1) 当 G 是 p^3 阶循环群时，$In(G)$是长为 2 的路；

2) 当 G 是一个 p^2 阶循环群和一个 p 阶群的直积时，$In(G)$是树；

3) 当 G 是一个 p^2 阶循环群和一个 q 阶群的直积时，$In(G)$是长为 4 的路；

4) 当 G 是两个 p 阶群和一个 q 阶群的直积时，$In(G)$是围长为 6 的连通图；

5) 当$|G|$是三个不同素数的乘积时，$In(G)$是长为 6 的圈。

如果图 Γ 中 4 阶以上的圈必有**弦**(即连接两个不相邻顶点的边)，则称 Γ 为**三角图**；如果 Γ 中的点均在某个三角形(即 3 圈)中，则称 Γ 为**强三角图**。显然，强三角图是三角图；强三角图的围长为 3；而三角图的围长为 3 或无穷。但是三角图未必是强三角图。例如，无圈图是三角图，但不是强三角图。

现在我们给出刻画包含图是三角图的一个结论。

定理 3.3 设 G 是有限交换群，但不是初等交换群。若$|G|$是 3 个素数的乘积，但不是三个不同素数的乘积，则 $In(G)$是三角图当且仅当 G 不是两个 p 阶群和一个 q 阶群的直积。

证明由有限交换群基本定理可知，$\boldsymbol{G}$ 是一些有限循环群的直积。再由条件得知 G 为 p^3 阶循环群，或为一个 p^2 阶循环群和一个 p 阶群的直积，或为两个 p 阶群和一个 q 阶群的直积。于是由引理 3.2 得证。

设 G 是有限交换群，而 H 是 G 的一个非平凡子群。若$|G|/|H|$不是素数，即 H 不是 G 的极大子群，则在 G 中存在极大子群 M 包含 H (即在 $In(G)$中存在 $M \sim H$)；若 H 不是素数阶子群，因为 H 也是交换群，故而 H 必有非平凡的子群 L (即在 $In(G)$中存在 $L \sim H$)。

下面我们刻画强三角的包含图。

定理 3.4 设 G 是有限交换群，且$|G|$至少含 3 个素因数，则 $In(G)$是强三角图当且仅当$|G|$至少含 4 个素因数。

证明 若$|G|$是 3 个素数的乘积，则由引理 3.1 立知 $In(G)$不是强三角图。下设$|G|$至少含 4 个素因数。

任取 H 为 G 的非平凡的子群。若$|H|$是素数，因为$|G|/|H|$不是素数，所以可取 M 为 G 中含 H 的极大子群，则$|M|$至少含 3 个素因数。再令 K 是 M 中含 H 的极大子群，则 $H \subset K \subset M$，故 $H \sim K \sim M \sim H$ 形成三角形。若$|H|$是 2 个素数的乘积，令 L 是 H 的素数阶子群，而 M 是 G 中含 H 的极大子群，则 $L \subset H \subset M$，故 $H \sim L \sim M \sim H$ 形成三角形。若$|H|$至少含 3 个素因数，令 N 是 H 中极大子群，而 L 是 N 中素数阶子群，则 $L \subset N \subset H$，故 $H \sim L \sim N \sim H$ 形成三角形。因此，$In(G)$是强三角图。

由定理 3.4 立得下一推论。

推论 3.5 设 G 是有限交换群，且$|G|$至少含 4 个素因数，则 $In(G)$是三角图，且 $girth\left(In\left(G\right)\right)=3$。

最后，我们考虑有限交换群的包含图的完美性。

定理 3.6 设 G 是有限交换群。若$|G|$至少含 3 个素因数，则 $In(G)$是完美图。

证明 若$|G|$是 3 个素数的乘积，由推论 2.5 和引理 3.2 得知 $In(G)$是完美的。若$|G|$至少含 4 个素因数，则由推论 3.5 知道 $In(G)$是三角图。而三角图是完美的(见[16]的定理 9.3.11)，故而 $In(G)$是完美的。得证。

致　谢

感谢审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

江西省教育厅基金项目 GJJ2200841。

参考文献

[1] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2010.

[2] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 17-180.

[3] Kelarev, A.V., Ryan, J. and Yearwood, J. (2009) Cayley Graphs as Classifiers for Data Mining: The Influence of Asymmetries. *Discrete Mathematics*, **309**, 5360-5369. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.11.030

[4] Zelinka, T. (1975) Intersection Graphs of Finite Abelian Groups. *Czechoslovak Mathematics*, **25**, 171-174. https://doi.org/10.21136/CMJ.1975.101307

[5] Bates, C., Bundy, D., Perkins, S. and Rowley, P. (2003) Commuting Involution Graphs for Symmetric Groups. *Journal of Algebra*, **266**, 133-153. https://doi.org/10.1016/S0021-8693(03)00302-8

[6] Iiyori, N. and Yamaki, H. (1991) Prime Graph Components of the Simple Groups of Lie Type over the Field of Even Characteristic. *Proceedings of the Japan Academy Series A—Mathematical Sciences*, **6**, 82-83. https://doi.org/10.3792/pjaa.67.82

[7] Devi, P. and Rajkumar, R. (2016) Inclusion Graph of Subgroups of a Group. https://arxiv.org/abs/1604.08259v1

[8] Ou, S., Wong, D. and Wang, Z. (2020) Diameters and Automorphism Groups of Inclusion Graphs over Nilpotent Groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, **19**, Article ID: 2050097. https://doi.org/10.1142/S0219498820500978

[9] Ou, S., Wong, D. and Liu, H. (2020) Planarity and Fixing Number of Inclusion Graph of a Nilpotent Group. *Journal of Algebra and Its Applications*, **19**, Article ID: 2150001. https://doi.org/10.1142/S0219498821500018

[10] Das, A. (2016) Subspace Inclusion Graph of a Vector Space. *Communications in Algebra*, **44**, 4724-4731. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1110588

[11] Das, A. (2018) Onsubspace Inclusion Graph of a Vector Space. *Linear and Multilinear Algebra*, **66**, 554-564. https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1306016

[12] Ma, X. and Wang, D. (2018) Independence Number of Subspace Inclusion Graph and Subspace Sum Graph of a Vector Space. *Linear and Multilinear Algebra*, **66**, 2430-2437. https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1398709

[13] Wong, D., Wang, X. and Xia, C. (2018) On Two Conjectures on the Subspace Inclusion Graph of a Vector Space. *Journal of Algebra and Its Applications*, **17**, Article ID: 1850189. https://doi.org/10.1142/S021949881850189X

[14] Wang, X. and Wong, D. (2019) Automorphism Group of Subspace Inclusion Graph of a Vector Space. *Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 2213-2224. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0597-2

[15] Cameron, P., Das, A. and Dey, H. (2022) On Some Properties of Vector Space Based Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2121370

[16] Balakrishnan, R. and Ranganthan, K. (2012) A Textbook of Graph Theory. 2nd Edition, Springer Science + Business Media, New York, 209-211. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4529-6