Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2136-2141
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137221

Hans汉斯

Morita环上模范畴的生成子

费 卿

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月18日；录用日期：2023年7月24日；发布日期：2023年7月31日

摘 要

设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$ 是Morita环。本文给出了一个右 $\Lambda_{(0,0)}$ -模是右 $\Lambda_{(0,0)}$ -模范畴中的生成子和投射生成子的内部刻画。

关键词

Morita环，生成子，投射生成子

Generators of Module Categories over Morita Ring

Qing Fei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 18th, 2023; accepted: Jul. 24th, 2023; published: Jul. 31st, 2023

Abstract

Let $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$ be a Morita ring. In this paper, an internal characterization for a right $\Lambda_{(0,0)}$ -module to be a generator and a projective generatoris given in the category of all right $\Lambda_{(0,0)}$ -module.

Keywords

Morita Ring, Generator, Projective Generator

文章引用: 费卿. Morita 环上模范畴的生成子[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2136-2141.
DOI: 10.12677/pm.2023.137221

1. 引言

1976 年，Goodearl 在[1]中研究环论时得到一类重要的环，即 Morita 环。Morita 环及其上的模在环模理论中扮演着重要的角色。近年来，众多学者对 Morita 环在环论、模论以及同调代数理论方面进行了广泛的研究。2000 年，Haghany 等人在[2] [3]中对 Morita 环的特殊形式(即形式三角矩阵环)进行了系统的研究，给出了形式三角矩阵环上一个模是投射模的条件以及形式三角矩阵环上一个模是生成子和投射生成子的等价刻画。2010 年，Krylov 等人在[4]中给出了 Morita 环上一个模是投射模的等价刻画。

受以上工作的启发，本文研究了 Morita 环上生成子和投射生成子的内部刻画。

2. 预备知识

设 A，B 是环，M 是 B-A-双模，N 是 A-B-双模，$\phi: M\otimes_A N\to B$ 是 B-B 双模同态，$\psi: N\otimes_B M\to A$ 是 A-A-双模同态，令

$$\Lambda_{(\phi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B\end{pmatrix} =\left\{\begin{pmatrix} a & n \\ m & b\end{pmatrix}\middle| a\in A, b\in B, m\in M, n\in N\right\},$$

则 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 中元素的加法为矩阵的加法，乘法如下：

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi(n\otimes m') & an'+nb' \\ ma'+bm' & bb'+\phi(m\otimes n')\end{pmatrix},$$

称 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 为 Morita 环。总假设 $\phi(m\otimes n)m'=m\psi(n\otimes m')$，$n\phi(m\otimes n')=\psi(n\otimes m)n'$，其中 $m, m'\in M$，$n, n'\in N$，这个条件保证了 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 是一个结合环。方便起见，始终记一个 Morita 环为 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$。

设 X 是右 A-模，Y 是右 B-模，$f: X\otimes_A N\to Y$ 是 B-模同态，$g: Y\otimes_B M\to X$ 是 A-模同态，并且有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes_A N\otimes_B M & \xrightarrow{f\otimes Id_M} & Y\otimes_B M \\ {\scriptstyle Id_X\otimes\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X\otimes_A A & \xrightarrow{\cong} & X \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} Y\otimes_B M\otimes_A N & \xrightarrow{g\otimes Id_N} & X\otimes_A N \\ {\scriptstyle Id_Y\otimes\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y\otimes_B B & \xrightarrow{\cong} & Y \end{array},$$

则 (X,Y,f,g) 是右 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$-模。

设 (X,Y,f,g) 与 (X',Y',f',g') 是右 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$-模，$a: X\to X'$ 是右 A-模同态，$b: Y\to Y'$ 是右 B-模同态，并且有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes_A N & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle a\otimes Id_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X'\otimes_A N & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} Y\otimes_B M & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle b\otimes Id_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Y'\otimes_B M & \xrightarrow{g'} & X' \end{array},$$

则(a,b)是(X,Y,f,g)到(X',Y',f',g')的右$\Lambda_{(\phi,\psi)}$-模同态。

以下介绍本文中的相关定义。

定义 1 [5]设 R 是环，M 是右 R-模，称 M 是右 R-模范畴中的生成子，如果对每一个右 R-模 N，存在满同态$\alpha: M^{(J)} \to N$。

引理 1 [5]设 R 是环，设 M 是右 R-模，则 M 是右 R-模范畴中的生成子当且仅当 M 生成R_R，即有满同态$\alpha': M^{(J)} \to R$。

定义 2 [5]设 R 是环，P 是右 R-模，称 P 是右 R-模范畴的投射生成子，如果 P 是投射的并且是生成子。

本文中环指有单位元的结合环，模是酉模，Morita 环$\Lambda_{(\phi,\psi)}$中，$\phi=\psi=0$，即$\Lambda_{(0,0)}$环。

3. Morita 环 $\Lambda_{(0,0)}$上模范畴的生成子和投射生成子

设$\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$是 Morita 环。Krylov 等人在[4]中给出了 Morita 环上一个模是投射模的等价刻画。

引理 2.1 ([4]，定理 7.3)设(X,Y,f,g)是右$\Lambda_{(0,0)}$-模，则以下等价：

1) (X,Y,f,g)是投射模；

2) $X/g(Y\otimes_B M)$是投射右 A-模，$Y/f(X\otimes_A N)$是投射右 B-模，并且

$$\big(X/g(Y\otimes_B M)\big)\otimes_A N \cong f(X\otimes_A N),$$

$$\big(Y/f(X\otimes_A N)\big)\otimes_B M \cong g(Y\otimes_B M);$$

3) 存在投射右 A-模 P 和投射右 B-模 Q，使得$(X,Y)\cong\big(P\oplus g(Y\otimes_B M), f(X\otimes_A N)\oplus Q\big)$，其中$f(X\otimes_A N)\cong P\otimes_A N$，$g(Y\otimes_B M)\cong Q\otimes_B M$。

设(X,Y,f,g)是右$\Lambda_{(0,0)}$-模，令$\eta_X: X\to X/g(Y\otimes_B M)$，$\eta_Y: Y\to Y/f(X\otimes_A N)$是自然满同态，$h: B\otimes_B M\to M$，$b\otimes m\mapsto bm$，$h': A\otimes_A N\to N$，$a\otimes n\mapsto an$。

借助于环$\Lambda_{(0,0)}$的乘法，$\Lambda_{(0,0)}$作为自身上的右$\Lambda_{(0,0)}$-正则模，同构于$(A\oplus M, N\oplus B, f', g')$，其中$f'=\begin{pmatrix} h' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$g'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$。

设$\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$是 Morita 环。以下给出 Morita 环上的生成子和投射生成子的内部刻画。

定理 2.2 设(X,Y,f,g)是右$\Lambda_{(0,0)}$-模。则(X,Y,f,g)是 Mod-$\Lambda_{(0,0)}$中的生成子当且仅当存在 Mod-A 中的满同态：

$$\beta_1: \big(X/g(Y\otimes_B M)\big)^{(J_1)} \to A,$$

Mod-B 中的满同态：

$$\beta_2:\left(Y/f\left(X\otimes_A N\right)\right)^{(J_2)}\to B,$$

以及 Mod-A 中的同态 $\phi_1:X^{(J_2)}\to M$ 和 Mod-B 中的同态 $\phi_2:Y^{(J_1)}\to N$，满足：

$$\phi_1\cdot g^{(J_2)}=h\cdot\left(\left(\beta_2\cdot\eta_Y^{(J_2)}\right)\otimes Id_M\right),$$

$$\phi_2\cdot f^{(J_1)}=h'\cdot\left(\left(\beta_1\cdot\eta_X^{(J_1)}\right)\otimes Id_N\right).$$

证明 必要性。因为(X,Y,f,g)是 Mod-$\Lambda_{(0,0)}$ 中的生成子，故存在满同态：$(\alpha_1,\alpha_2):(X,Y,f,g)^{(J)}\to(A\oplus M,N\oplus B,f',g')$，使得下图交换，

$$\begin{array}{ccc} Y^{(J)}\otimes_B M & \xrightarrow{\alpha_2\otimes Id_M} & (N\oplus B)\otimes_B M \\ g^{(J)}\downarrow & & \downarrow g' \\ X^{(J)} & \xrightarrow{\alpha_1} & A\oplus M \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} X^{(J)}\otimes_A N & \xrightarrow{\alpha_1\otimes Id_N} & (A\oplus M)\otimes_A N \\ f^{(J)}\downarrow & & \downarrow f' \\ Y^{(J)} & \xrightarrow{\alpha_2} & N\oplus B \end{array} \tag{2}$$

令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \alpha_1^2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}\alpha_2^1\\ \alpha_2^2\end{pmatrix}$，其中 $\alpha_1^1:X^{(J)}\to A$，$\alpha_1^2:X^{(J)}\to M$，$\alpha_2^1:Y^{(J)}\to N$，$\alpha_2^2:Y^{(J)}\to B$，由交换图(1)，可得 $\alpha_1^1\cdot g^{(J)}=0$，$\alpha_1^2\cdot g^{(J)}=h\cdot\left(\alpha_2^2\otimes Id_M\right)$，故存在同态 $\beta_1:\left(X/g\left(Y\otimes_B M\right)\right)^{(J)}\to A$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} X^{(J)} & \xrightarrow{\eta_X^{(J)}} & \left(X/g\left(Y\otimes_B M\right)\right)^{(J)} \\ \alpha_1^1\downarrow & \swarrow \beta_1 & \\ A & & \end{array},$$

因为 α_1 为满同态，所以 α_1^1 为满同态，从而 β_1 为满同态。由交换图(2)，可得 $\alpha_2^2\cdot f^{(J)}=0$，$\alpha_2^1\cdot f^{(J)}=h'\cdot\left(\alpha_1^1\otimes Id_N\right)$，故存在同态 $\beta_2:\left(Y/f\left(X\otimes_A N\right)\right)^{(J)}\to B$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} Y^{(J)} & \xrightarrow{\eta_Y^{(J)}} & \left(Y/f\left(X\otimes_A N\right)\right)^{(J)} \\ \alpha_2^2\downarrow & \swarrow \beta_2 & \\ B & & \end{array},$$

又因为 α_2 为满同态，所以 α_2^2 为满同态，从而 β_2 为满同态。

令 $\phi_1=\alpha_1^2$，$\phi_2=\alpha_2^1$，则

$$\phi_1\cdot g^{(J)}=\alpha_1^2\cdot g^{(J)}=h\cdot\left(\alpha_2^2\otimes Id_M\right)=h\cdot\left(\left(\beta_2\cdot\eta_Y^{(J)}\right)\otimes Id_M\right),$$

$$\phi_2\cdot f^{(J)}=\alpha_2^1\cdot f^{(J)}=h'\cdot\left(\alpha_1^1\otimes Id_N\right)=h'\cdot\left(\left(\beta_1\cdot\eta_X^{(J)}\right)\otimes Id_N\right).$$

充分性。记集合 $J=J_1\dot{\bigcup}J_2$，设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\beta_1\cdot\eta_X^{(J_1)} & 0\\ 0 & \phi_1\end{pmatrix}:X^{(J)}=X^{(J_1)}\oplus X^{(J_2)}\to A\oplus M,$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}\phi_2 & 0\\ 0 & \beta_2\cdot\eta_Y^{(J_2)}\end{pmatrix}:Y^{(J)}=Y^{(J_1)}\oplus Y^{(J_2)}\to N\oplus B,$$

因为β_2，$\eta_Y^{(J_2)}$是满同态，$\phi_1\cdot g^{(J_2)}=h\cdot\left(\left(\beta_2\cdot\eta_Y^{(J_2)}\right)\otimes Id_M\right)$可得$\phi_1$是满同态。因为$\beta_1$，$\eta_X^{(J_1)}$是满同态，所以$\alpha_1$是满同态。同理可得$\alpha_2$是满同态。下证$(\alpha_1,\alpha_2)$是Mod-$\Lambda_{(0,0)}$中的同态，即证下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\left(Y^{(J_1)}\oplus Y^{(J_2)}\right)\otimes_B M & \xrightarrow{\alpha_2\otimes Id_M} & (N\oplus B)\otimes_B M\\ \begin{pmatrix}g^{(J_1)} & 0\\ 0 & g^{(J_2)}\end{pmatrix}\downarrow & & \downarrow g'\\ X^{(J_1)}\oplus X^{(J_2)} & \xrightarrow{\alpha_1} & A\oplus M\end{array},$$

$$\begin{array}{ccc}\left(X^{(J_1)}\oplus X^{(J_2)}\right)\otimes_A N & \xrightarrow{\alpha_1\otimes Id_N} & (A\oplus M)\otimes_A N\\ \begin{pmatrix}f^{(J_1)} & 0\\ 0 & f^{(J_2)}\end{pmatrix}\downarrow & & \downarrow f'\\ Y^{(J_1)}\oplus Y^{(J_2)} & \xrightarrow{\alpha_2} & N\oplus B\end{array},$$

因为

$$\phi_1\cdot g^{(J_2)}=h\cdot\left(\left(\beta_2\cdot\eta_Y^{(J_2)}\right)\otimes Id_M\right),$$

$$\phi_2\cdot f^{(J_1)}=h'\cdot\left(\left(\beta_1\cdot\eta_X^{(J_1)}\right)\otimes Id_N\right),$$

$\beta_2\cdot\eta_Y^{(J_2)}\cdot f^{(J_2)}=0$，$\beta_1\cdot\eta_X^{(J_1)}\cdot g^{(J_1)}=0$，所以上图可交换，则
$(\alpha_1,\alpha_2):(X,Y,f,g)^{(J)}\to(A\oplus M,N\oplus B,f',g')$是Mod-$\Lambda_{(0,0)}$上的满同态。

由引理1知，(X,Y,f,g)是Mod-$\Lambda_{(0,0)}$中的生成子。 □

命题2.3 设(X,Y,f,g)是投射右$\Lambda_{(0,0)}$-模。则(X,Y,f,g)是Mod-$\Lambda_{(0,0)}$中的生成子当且仅当$X/g(Y\otimes_B M)$是Mod-A中的生成子，$Y/f(X\otimes_A N)$是Mod-B中的生成子。

证明 必要性。设(X,Y,f,g)是Mod-$\Lambda_{(0,0)}$中的生成子，则由定理2.2得$X/g(Y\otimes_B M)$是Mod-A中的生成子，$Y/f(X\otimes_A N)$是Mod-B中的生成子。

充分性。因为(X,Y,f,g)是投射右$\Lambda_{(0,0)}$-模，由引理2.1可知：
$(X,Y,f,g)\cong(P\oplus Q\otimes_B M,P\otimes_A N\oplus Q,\alpha,\beta)$其中$P$是投射右$A$-模，$Q$是投射右$B$-模，并且$\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\left(P\oplus(Q\otimes_B M)\right)/\operatorname{Im}\beta\cong P$，$\left((P\otimes_A N)\oplus Q\right)/\operatorname{Im}\alpha\cong Q$，由已知$P$是Mod-$A$中的生成子，$Q$是Mod-$B$中的生成子，所以存在Mod-$A$中的满同态$\delta_1:P^{(J_1)}\to A$和Mod-$B$中的满同态$\delta_2:Q^{(J_2)}\to B$，则有

$$\left(P\oplus(Q\otimes M)\right)^{(J_2)}\cong P^{(J_2)}\oplus Q^{(J_2)}\otimes M\xrightarrow{(0,1)^{(J_2)}}Q^{(J_2)}\otimes M\xrightarrow{\delta_2\otimes Id_M}B\otimes_B M\xrightarrow{h}M,$$

$$\left(P\otimes(N\oplus Q)\right)^{(J_1)}\cong P^{(J_1)}\otimes N\oplus Q^{(J_1)}\xrightarrow{(1,0)^{(J_1)}}P^{(J_1)}\otimes N\xrightarrow{\delta_1\otimes Id_N}A\otimes_A N\xrightarrow{h'}N,$$

令

$$\phi_1=h\cdot(\delta_2\otimes Id_M)\cdot(0,1)^{(J_2)},$$

$$\phi_2=h'\cdot(\delta_1\otimes Id_N)\cdot(1,0)^{(J_1)},$$

易得

$$\phi_1 \cdot \beta^{(J_2)} = h \cdot \left(\left(\delta_2 \cdot (0,1)^{(J_2)} \right) \otimes Id_M \right),$$

$$\phi_2 \cdot \alpha^{(J_1)} = h' \cdot \left(\left(\delta_1 \cdot (1,0)^{(J_1)} \right) \otimes Id_N \right),$$

由定理 2.2，可得$(P \oplus Q \otimes_B M, P \otimes_A N \oplus Q, \alpha, \beta)$是 Mod-$\Lambda_{(0,0)}$ 中的生成子，所以(X, Y, f, g)是 Mod-$\Lambda_{(0,0)}$ 中的生成子，命题得证。 □

参考文献

[1] Goodearlk, R. (1976) Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules. Marcel Dekker, New York.

[2] Haghany, A. and Varadarajan, K. (1999) Study of Formal Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **27**, 5507-5525. https://doi.org/10.1080/00927879908826770

[3] Haghany, A. and Varadarajan, K. (2000) Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **147**, 41-58. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00129-7

[4] Krylov, P.A. and Tuganbae, A.A. (2010) Modules over Formal Matrix Rings. *Journal of Mathematical Sciences*, **171**, 248-295. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0133-5

[5] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992) Rings and Categories of Modules. 2nd Edition, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4418-9