Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2231-2239
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138229

Bernoulli泛函上基于典则酉对合的量子熵

刘省生

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月26日；录用日期：2023年7月27日；发布日期：2023年8月3日

摘　要

量子 Bernoulli 噪声(QBNs)是作用于平方可积Bernoulli 泛函空间上的湮灭和增生算子族，满足等时典则反交换关系(CAR)。湮灭与增生算子的和算子是Bernoulli 泛函空间上的一列自伴算子，称为Bernoulli 泛函上的典则酉对合，本文基于Bernoulli 泛函空间的子空间上的典则酉对合，构造了一类密度算子，考虑了该密度算子的量子熵以及量子熵的若干性质。

关键词

量子Bernoulli 噪声，酉对合，量子熵

Quantum Entropy Based on Canonical Unitary Involution on Bernoulli Functional

Shengsheng Liu

College of Mathematics and statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 26^{th}, 2023; accepted: Jul. 27^{th}, 2023; published: Aug. 3^{rd}, 2023

文章引用: 刘省生. Bernoulli泛函上基于典则酉对合的量子熵[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2231-2239.
DOI: 10.12677/pm.2023.138229

Abstract

Quantum Bernoulli noises (QBNs) are the family of annihilation and creation operators acting on the space of square integrable Bernoulli functional, which satisfy a canonical anti-commutation relation (CAR) in equal time. The sum operator of annihilation and creation operator is a series of self-adjoint operator on Bernoulli functional space, which is called canonical unitary involution on Bernoulli functional. In this paper, based on the canonical unitary involution on the subspace of the Bernoulli functional space, we construct a class of density operators, and consider the quantum entropy of the density operator and some properties of the quantum entropy.

Keywords

Quantum Bernoulli Noises, Unitary Involution, Quantum Entropy

1. 引言

量子信息理论是现代物理学的基础 [1, 2], 量子熵则是量子信息理论中的一个重要工具, 在数学和物理上对量子熵的研究不仅具有十分重要的理论价值, 而且证明它有着广泛的应用前景. Von Neumann 熵就是其中一种重要的量子熵, 可以用来度量信息系统中的不确定性.

量子 Bernoulli 噪声(QBNs) 是作用于平方可积Bernoulli 泛函空间上的湮灭和增生算子族$\{\partial_k, \partial_k^*\}_{k\geq 0}$, 满足等时典则反交换关系(CAR), 在描述开放量子系统中有重要作用 [3]. 近年来, QBNs 被广泛研究 [4–9]. 记$\Xi_k = \partial_k^* + \partial_k$ $(k \geq 0)$, 即Bernoulli 泛函上湮灭与增生算子的和算子, 则它是一列自伴算子, 称为Bernoulli 泛函上的典则酉对合. 文献 [10] 以典则酉对合为工具, 证明了一个针对量子游荡的极限定理, 文献 [11] 研究了典则酉对合的扰动, 并讨论了以此类扰动算子为演化算子的抽象量子游荡.

本文基于离散时间量子Bernoulli 噪声, 考虑一类密度算子的量子熵, 主要过程如下:

针对上述典则酉对合Ξ_k, 构造了Bernoulli 泛函空间$\mathfrak{h}$ 的有限维子空间$\mathfrak{h}_n$ 上的如下一类自伴算

子

$$\Xi_k + tI, \quad 0 \le k \le n,$$

其中$t \ge 1$, I 是$\mathfrak{h}_n$ 上的单位算子, 证明了这类算子具有非负特征值, 进而它是$\mathfrak{h}_n$ 上的正迹类算子, 由此构造了一类密度算子, 考虑了这类密度算子的量子熵及量子熵的若干性质.

文章的结构安排如下: 在第2 部分, 简要回顾一些关于量子Bernoulli 噪声的基本事实, 并介绍几个重要的引理; 第3 部分是本文的主要工作, 考虑基于典则酉对合所构造的量子态的量子熵及若干性质.

2. 量子 Bernoulli 噪声

在本节中, 我们简要地回顾量子 Bernoulli 噪声(简称QBNs) 的一些基本概念, 记号以及结论. 详细内容见参考文献 [3].

设$\mathbb{N}$ 是非负整数集, Γ 表示$\mathbb{N}$ 的有限幂集, 即

$$\Gamma = \{\sigma \mid \sigma \subset \mathbb{N} \text{ 且 } \#\sigma < \infty\},$$

其中$\#\sigma$ 表示集合σ 的基数. 设$\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ 表示所有映射$\omega : \mathbb{N} \mapsto \{-1, 1\}$ 构成的集合, $(\zeta_n)_{n\ge0}$ 表示定义在Ω 上的典则投影序列, 对每个$n \ge 0$, 有

$$\zeta_n(\omega) = \omega(n), \quad \omega \in \Omega.$$

定义$\mathcal{F} = \sigma(\zeta_n; n \ge 0)$ 是Ω 上由序列$(\zeta_n)_{n\ge0}$ 生成的$\sigma-$域; 设$(p_n)_{n\ge0}$ 是给定的正数序列, 其中$0 < p_n < 1, n \ge 0$. 那么在可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$ 上存在唯一的概率测度$\mathbb{P}$, 使得

$$\mathbb{P} \circ (\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \cdots \zeta_{n_k})^{-1}\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_k)\} = \prod_{j=1}^{k} p_{n_j}^{\frac{1+\epsilon_j}{2}} p_{n_j}^{\frac{1-\epsilon_j}{2}},$$

其中$k \ge 1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $n_j \in \mathbb{N}\,(1 \le j \le k)$ 满足: 当$i \ne j$ 时, $n_i \ne n_j$. 因此我们得到一个概率测度空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 称为 Bernoulli 空间, 且该空间上的复值随机变量称为 Bernoulli 泛函. 设$Z = (Z_n)_{n\ge0}$ 是随机变量序列$(\zeta_n)_{n\ge0}$ 生成的 Bernoulli 泛函, 即

$$Z_n = \frac{\zeta_n + q_n - p_n}{2\sqrt{p_n q_n}}, \quad n \ge 0,$$

其中$q_n = 1 - p_n$. 显然, $Z = (Z_n)_{n\ge0}$ 是概率测度空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一列独立的随机变量.

设$\mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是$Z = (Z_n)_{n\ge0}$ 的平方可积 Bernoulli 泛函构成的空间, 用$\mathfrak{h}$ 表示, 即

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

用$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和$\|\cdot\|$ 表示$\mathfrak{h}$ 中的内积和范数, 并约定$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变量共轭线性, 关于第二个变量线性. 由文献 [12] 可知, Z 具有混沌表示性质. 则$\mathfrak{Z} = \{Z_\sigma | \, \sigma \in \Gamma\}$ 是$\mathfrak{h}$ 的标准正交基(ONB), 其中$Z_\emptyset = 1$,

且

$$Z_\sigma = \prod_{j\in\sigma} Z_j, \quad \sigma \in \Gamma, \quad \sigma \neq \emptyset.$$

显然$\mathfrak{h}$ 是一个无穷维的复可分 Hilbert 空间. 易知, 对于每个$n \geq 0$, $Z_n = Z_{\{n\}}$ 为$\mathfrak{h}$ 的典则 ONB 的一个基向量.

引理 2.1 [3] 对任意的$k \geq 0$, 在$\mathfrak{h}$ 上存在一个有界算子$\partial_k : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, 满足$\| \partial_k \| = 1$ 且

$$\partial_k Z_\sigma = \mathbf{1}_\sigma(k) Z_{\sigma\setminus k}, \quad \partial_k^* Z_\sigma = [1 - \mathbf{1}_\sigma(k)] Z_{\sigma\cup k}, \qquad \sigma \in \Gamma,$$

其中∂_k^* 为∂_k 的共轭算子, $\sigma \setminus k = \sigma \setminus \{k\}$, $\sigma \cup k = \sigma \cup \{k\}$, 且$\mathbf{1}_\sigma(k)$ 是$\mathbb{N}$ 的子集σ 的示性函数.

算子∂_k 和其共轭算子∂_k^* 分别称为作用在 Bernoulli 泛函空间上的湮灭算子和增生算子.

定义 2.1 [3] 湮灭和增生算子族$\{\partial_k, \partial_k^*\}_{k\geq 0}$ 称为量子 Bernoulli 噪声.

下个引理表明量子 Bernoulli 噪声满足等时典则反交换关系(CAR).

引理 2.2 [3] 设k, $l \in \mathbb{N}$, 则下列等式成立

$$\partial_k\partial_l = \partial_l\partial_k, \quad \partial_k^*\partial_l^* = \partial_l^*\partial_k^*, \quad \partial_k^*\partial_l = \partial_l\partial_k^*, \quad k \neq l$$

且

$$\partial_k\partial_k = \partial_k^*\partial_k^* = 0, \quad \partial_k\partial_k^* + \partial_k^*\partial_k = I.$$

其中I 是空间$\mathfrak{h}$ 上的单位算子.

记$\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, Γ_n 表示$\mathbb{N}_n$ 的幂集, 则

$$\mathfrak{h}_n = \mathrm{span}\{\ \mathrm{Z}_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_\mathrm{n}\}$$

是$\mathfrak{h}$ 的子空间. 容易验证$\mathfrak{h}_n$ 的维数是2^{n+1}.

引理 2.3 [3] 设$k \geq 0$, 则$\Xi_k = \partial_k^* + \partial_k$ 是$\mathfrak{h}$ 上的一列自伴酉算子, 称为Bernoulli 泛函上的典则酉对合.

注 当$0 \leq k \leq n$ 时, $\mathfrak{h}_n$ 是∂_k^* 和∂_k 的不变子空间, 从而Ξ_k 可视为$\mathfrak{h}_n$ 上的算子.

引理 2.4 若$\{Z_\sigma | \ \sigma \in \Gamma_n\}$ 是$\mathfrak{h}_n$ 的标准正交基, 则$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma + Z_{\sigma\setminus k}) \mid \sigma \in \Gamma_n, k \in \sigma\}$ 也是$\mathfrak{h}_n$ 的标准正交基.

证明. 对$\forall\, \sigma, \tau \in \Gamma_n, \forall\, k \in \sigma \bigcap \tau$, 显然$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma + Z_{\sigma\setminus k}) \in \mathfrak{h}_n$, 且

当$\sigma \neq \tau$ 时, 有

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma + Z_{\sigma\setminus k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\tau + Z_{\tau\setminus k})\rangle = 0,$$

当$\sigma = \tau$ 时,有

DOI: 10.12677/pm.2023.138229

$$\begin{aligned}&\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}),\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k})\rangle\\=&\frac{1}{2}\left\langle Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k},Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right\rangle\\=&\frac{1}{2}\left(\langle Z_\sigma,Z_\sigma\rangle+\left\langle Z_{\sigma\backslash k},Z_{\sigma\backslash k}\right\rangle\right)\\=&1.\end{aligned}$$

这表明$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k})\mid\sigma\in\Gamma_n,k\in\sigma\}$ 是$\mathfrak{h}_n$ 的标准正交基. □

引理 2.5 对$\sigma\in\Gamma_n,k\in\sigma$, Ξ_k 作为$\mathfrak{h}_n$ 上的算子有特征值$1,-1$, 且对应的特征向量分别为$Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}$ 与$Z_\sigma-Z_{\sigma\backslash k}$.

证明. 对$k\in\sigma$, 由Ξ_k 的定义, 有

$$\Xi_k\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)=\left(\partial_k^*+\partial_k\right)Z_\sigma+\left(\partial_k^*+\partial_k\right)Z_{\sigma\backslash k}=Z_{\sigma\backslash k}+Z_\sigma,$$

$$\Xi_k\left(Z_\sigma-Z_{\sigma\backslash k}\right)=\left(\partial_k^*+\partial_k\right)Z_\sigma-\left(\partial_k^*+\partial_k\right)Z_{\sigma\backslash k}=Z_{\sigma\backslash k}-Z_\sigma=-(Z_\sigma-Z_{\sigma\backslash k}).$$

这表明1 和-1 是算子Ξ_k 的特征值, 而$Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}$ 和$Z_\sigma-Z_{\sigma\backslash k}$ 是相应的特征向量. □

引理 2.6 对$0\le k\le n$, $t\in\mathbb{R}$, Ξ_k+tI 作为$\mathfrak{h}_n$ 上的自伴算子有特征值$t-1$, $t+1$.

证明. 由引理2.5 易得.

注 注意到当$0\le k\le n$ 时, 对$\forall\, t\ge 1$, Ξ_k+tI 的所有特征值非负, 结合算子Ξ_k+tI 的自伴性易知, Ξ_k+tI 是$\mathfrak{h}_n$ 上的正算子, 进一步, 它是$\mathfrak{h}_n$ 上的正迹类算子.

3. 量子熵

若一个正迹类算子ρ 满足$\mathrm{Tr}(\rho)=1$, 则称ρ 为密度算子. 在量子力学中, 常称密度算子为态. 在这一节, 我们给出Bernoulli 泛函空间上基于典则酉对合的密度算子的量子熵及若干性质, 为此, 首先给出量子熵的定义.

定义 3.1 [1] 一个量子态ρ 的Von Neumann 熵定义为

$$S(\rho)=-\mathrm{Tr}(\rho\log\rho),\tag{3.1}$$

它的量子相关熵定义为

$$S(\rho\,||\,\rho')=\mathrm{Tr}(\rho\log\rho)-\mathrm{Tr}(\rho\log\rho'),\quad \rho\neq\rho'.\tag{3.2}$$

这里的对数是以2为底的.

下面介绍一个重要的定理.

定理 3.1 对任意的$\sigma\in\Gamma_n$, $k\in\sigma$, $\forall\, t\ge 1$, 有$\mathrm{Tr}(\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)})=1$. 即$\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)}$ 是$\mathfrak{h}_n$ 上的一个密度算子.

证明. 通过直接计算, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left(\Xi_k+tI\right)=&\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right),\left(\Xi_k+tI\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\rangle\\=&\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}),\ (1+t)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\rangle\\=&(1+t)\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\rangle\\=&2^{n+1}(1+t).\end{aligned}$$

这意味着$\operatorname{Tr}(\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)})=1$. □

以下, 为方便起见, 我们称$\rho_k=\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)}$ 为由点则酉对合确定的密度算子, 显然ρ_k 也是自伴算子, 下面的定理给出由点则酉对合确定的密度算子的Von Neumann 熵.

定理 3.2 对$\forall\, k\in\mathbb{N}_n$, $\forall\, t\geq 1$, 由点则酉对合确定的密度算子的Von Neumann 熵为

$$S\left(\rho_k\right)=n+1-\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{Tr}\left(\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right),$$

它的量子相关熵为

$$S(\rho_k\mid\mid\rho_j)=\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{Tr}(\log\frac{\Xi_k+tI}{\Xi_j+tI}),k\neq j.$$

证明. 根据Von Neumann 熵的定义及算子Ξ_k 的自伴性, 有

$$S\left(\rho_k\right)=-\operatorname{Tr}\left(\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)}\log\frac{\Xi_k+tI}{2^{n+1}(1+t)}\right)=n+1+\frac{1}{2^{n+1}}S\left(\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right),$$

和

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right)=&-\operatorname{Tr}\left(\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right)\\=&-\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right),\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\right\rangle\\=&-\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\left\langle\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right),\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\right\rangle\\=&-\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_\sigma\backslash k\right),\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma+Z_{\sigma\backslash k}\right)\right\rangle\\=&-\operatorname{Tr}\left(\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right).\end{aligned}$$

从而$S\left(\rho_k\right)=n+1-\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{Tr}\left(\log\frac{\Xi_k+tI}{1+t}\right)$.

对于量子相关熵来说，容易验证$\operatorname{Tr}\left(\rho_k\log\rho_k\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{Tr}\left(\log\rho_k\right),\operatorname{Tr}\left(\rho_k\log\rho_j\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{Tr}\left(\log\rho_j\right)$.

从而

$$
\begin{aligned}
S(\rho_k \,||\, \rho_j) &= \mathrm{Tr}\left(\rho_k \log \rho_k\right) - \mathrm{Tr}\left(\rho_k \log \rho_j\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr}\left(\log \rho_k\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr}\left(\log \rho_j\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr}(\log \frac{\rho_k}{\rho_j}) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \mathrm{Tr}(\log \frac{\Xi_k + tI}{\Xi_j + tI}).
\end{aligned}
$$

□

以下我们讨论由点则酉对合确定的密度算子的Von Neumann 熵的若干性质.

定理 3.2 对$\forall\ \sigma \in \Gamma_n, k, j \in \sigma, k \neq j$, 有$S(\rho_k\rho_j) = \frac{1}{2^{n+1}}(S(\rho_k) + S(\rho_j))$.

证明. 根据Von Neumann 熵的定义及迹运算的性质, 有

$$
\begin{aligned}
S\left(\rho_k\rho_j\right) =& - \mathrm{Tr}\left(\rho_k\rho_j \log \rho_k\rho_j\right) \\
=& - \mathrm{Tr}\left(\rho_j\rho_k \log \rho_k\right) - \mathrm{Tr}\left(\rho_k\rho_j \log \rho_j\right) \\
=& - \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}\right), \rho_j\rho_k \log \rho_k \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}\right)\right\rangle \\
&- \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k}\right), \rho_k\rho_j \log \rho_j \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k}\right)\right\rangle \\
=& - \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \rho_j \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}), \rho_k \log \rho_k \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}\right)\right\rangle \\
&- \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \rho_k \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k}\right), \rho_j \log \rho_j \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k})\right)\right\rangle \\
=& - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}\right), \rho_k \log \rho_k \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash j}\right)\right\rangle \\
&- \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\sigma\in\Gamma_n} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k}\right), \rho_j \log \rho_j \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Z_\sigma + Z_{\sigma\backslash k}\right)\right\rangle \\
=& \frac{1}{2^{n+1}}\left(S\left(\rho_k\right) + S\left(\rho_j\right)\right).
\end{aligned}
$$

□

推论 3.3 对$\forall\ \sigma \in \Gamma_n, k, j \in \sigma, k \neq j$, 有$S(\rho_k\rho_j) \leq S(\rho_k) + S(\rho_j)$.

定理 3.4 对$\forall\ \sigma \in \Gamma_n, k, j \in \sigma, k \neq j$, 如果 $p + q = 1$, 那么$S(p\rho_k + q\rho_j) \geq pS(\rho_k) + qS(\rho_j)$.

证明. 设$\varphi(x) = x \log x$, 它是一个凸函数满足$\varphi(px + qy) \leq p\varphi(x) + q\varphi(y)$, 若$p + q = 1$, 由定义,

有

$$
\begin{aligned}
S\left(p\rho_k+q\rho_j\right) &= -\operatorname{Tr}\left[\left(p\rho_k+q\rho_j\right)\log p\left(\rho_k+q\rho_j\right)\right] \\
&= -\operatorname{Tr}\left[\varphi\left(p\rho_k+q\rho_j\right)\right] \\
&\geq -\operatorname{Tr}\left[p\varphi\left(\rho_k\right)+q\varphi\left(\rho_j\right)\right] \\
&= pS\left(\rho_k\right)+qS\left(\rho_j\right).
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. (2000) Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Watrous, J. (2018) Theory of Quantum Information. Cambridge University Press, New York. https://doi.org/10.1017/9781316848142

[3] Wang, C.S., Chai, H.F. and Lu, Y.C. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article 053528. https://doi.org/10.1063/1.3431028

[4] Wang, C.S. and Ye, X.J. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Quantum Information Process*, **15**, 1897-1908. https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2

[5] Wang, C.S., Wang, C., Ren, S.L. and Tang, Y.L. (2018) Open Quantum Random Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noise. *Quantum Information Process*, **17**, Article No. 4. https://doi.org/10.1007/s11128-018-1820-2

[6] Wang, C.S. and Chen, J.S. (2016) Quantum Markov Semigroups Constructed from Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, Article 023502. https://doi.org/10.1063/1.4939920

[7] Wang, C.S. and Zhang, J.H. (2013) Localization of Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **54**, Article 103502. https://doi.org/10.1063/1.4824130

[8] Han, Q., Chen, Z.H. and Lu, Z.Q. (2022) Quantum Entropy in Terms of Local Quantum Bernoulli Noises and Related Properties. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **51**, 4210-4220. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1812654

[9] Wang, C. (2022) Higher-Dimensional Open Quantum Walk in Environment of Quantum Bernoulli Noises. *Stochastics and Dynamics*, **22**, Article 2250001. https://doi.org/10.1142/S0219493722500010

[10] Wang, C.S., Ren, S.L. and Tang, Y.L. (2020) A New Limit Theorem for Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli noises. *Entropy*, **22**, Article 486. https://doi.org/10.3390/e22040486

[11] 范楠, 王才士, 姬红. Bernoulli泛函上典则酉对合的扰动[J]. 数学物理学报, 2022, 42(4): 969-977.

[12] Privault, N. (2008) Stochastic Analysis of Bernoulli Processes. *Probability Surveys*, **5**, 435-483. https://doi.org/10.1214/08-PS139