Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2330-2344
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138241

具有多项式记忆的非经典反应扩散方程全局吸引子的存在性

杨　晗

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年7月3日；录用日期：2023年8月4日；发布日期：2023年8月11日

摘　要

本文考虑具有多项式记忆的非经典反应扩散方程全局吸引子的存在性。首先利用**Faedo-Garlerkin**方法和能量估计获得了解的存在唯一性，接着证明了有界吸收集的存在性，最后得到全局吸引子的存在性。

关键词

多项式记忆，非经典反应扩散方程，全局吸引子

Existence of Global Attractors of Non-Classical Reaction-Diffusion Equation with Polynomial Memory

Han Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 3^{rd}, 2023; accepted: Aug. 4^{th}, 2023; published: Aug. 11^{th}, 2023

文章引用: 杨晗. 具有多项式记忆的非经典反应扩散方程全局吸引子的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2330-2344. DOI: 10.12677/pm.2023.138241

Abstract

In this paper, we consider existence of global attractors for non-classical reaction-diffusion equation with polynomial memory. We first obtain existence and uniqueness of the solution by using Faedo-Garlerkin method and energy estimation, then prove existence of bounded absorbing set, finally we get existence of the global attractors.

Keywords

Polynomial Memory, Non-Classical Reaction-Diffusion Equation, Global Attractor

1. 介绍

本文考虑如下问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle \partial_t u - \triangle u - \int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds + \rho|u(t)|^\gamma u(t) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geqslant 0, \\ u(x,t) = u_0(x), & x \in \Omega,\ t \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma < 2$. 假设记忆项 $\mu(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R})$ 满足:

$$\mu(s) \geqslant 0,\ \mu'(s) \leqslant 0,\ \forall\, s \in \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty \mu(s)ds = 1, \tag{1.3}$$

$$m_1\mu(s) \leqslant -\mu'(s) \leqslant m_2\mu(s),\ \forall\, s \in \mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

其中 $m_1,\ m_2 > 0$.

非经典反应扩散方程在数学物理中有一个漫长的发展过程, 并出现在许多数学模型中. 1980年, Aifantis在文 [1]中提出了一个通用框架, 用于为某类特殊的材料(如聚合物和高粘度液体)建立数学

模型, 这就是下面经典的反应扩散方程

$$u_t - \triangle u + f(u) = g(x),$$

但这个方程并没有包含反应扩散问题的各个方面, 它忽略了固体扩散过程中媒介的诸多粘性, 弹性, 压力等因素. 随后, 他通过一些实例, 建立了扩散过程中考虑这些因素的数学模型, 即下面的非经典反应扩散方程

$$u_t - \triangle u_t - \triangle u + f(u) = g(x),$$

该方程常被运用于流体力学, 固体力学以及热传导理论等领域, 见文 [2–4]等. 对这类方程, 前人已经研究并取得了以下成果. 孙春友和杨美华在文 [5]中考虑了在非线性项 f 满足临界增长条件和外力项 $g \in H^{-1}(\Omega)$ 时非经典扩散方程全局吸引子的存在性; 在文 [6]中, Chepyzhov 等人得到了具有衰退记忆的扩散方程在 f 满足超临界增长条件, $g \in L^2(\Omega)$ 时全局吸引子的存在性. Jaime 等人在文 [7]中考虑了一类带记忆和 Dirichlet 边界的二阶抽象系统, 通过定义适当 Lyapunov 泛函证明了当记忆项指数衰减时, 解是多项式衰减且是非指数稳定的. 近年来, 也有许多学者研究了非经典反应扩散方程的渐近行为, 汪璇等人在文 [8]中首次研究了具有衰退记忆的非经典反应扩散方程. 他们在该文中证明了当非线性项满足临界指数增长时方程全局吸引子的存在性与正则性. 马巧珍等人在文 [9]中研究了一类非经典反应扩散方程的时间依赖全局吸引子的存在性, 正则性及上半连续性. 就我们所知, 针对记忆型的耗散偏微分方程解的渐近行为, 大部分是在线性记忆的情况下展开的. 然而, 记忆项为非线性的情况更能准确地刻画系统过去的状态. Cavalcanti 在文 [10]中研究了具有非线性边界记忆和非线性边界阻尼的波动方程解的存在性和一致衰减性. 本文在文 [10]的研究基础上考虑具有非线性记忆的非经典反应扩散方程全局吸引子的存在性, 增加了记忆项的条件.

2. 预备知识

不失一般性, 记 $H = V_0 = L^2(\Omega)$, $V = V_1 = H_0^1(\Omega)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\|\cdot\|_q$ 表示空间 $L^q(\Omega)$的范数, 特别地, 当 $q = 2$ 时, 记$\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$. 令 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$, 其中 $A = -\triangle$, 其内积和范数分别为

$$(u,v)_{V_s} = (A^{\frac{s}{2}}u, A^{\frac{s}{2}}v),\ \|u\|_{V_s} = \|A^s u\|.$$

用 H' 和 V' 分别表示 H and V 的对偶空间. 为方便起见, 本文中出现的 C 表示任意正常数, 它的取值在每一行甚至同一行中都可能不同.

引理 2.1 [11] (Aubin-Dubinskii-Lions 引理) 设 $X \subset Y \subset Z$ 均为 Banach 空间, 且 $X \Subset Y$.

(i) 若 F 是 $L_p(a,b;X)$, $1 \leqslant p < \infty$ 中的有界集, $\partial_t F := \{\partial_t f : f \in F\}$ 在 $L_q(a,b;Z)$, $q \geqslant 1$ 中有界, 其中 $\partial_t f$ 是分布意义下的导数. 则 F 在 $L_p(a,b;Y)$ 中相对紧. 若 $q > 1$, 则 F 也在 $C(a,b;Z)$ 相对紧.

(ii) 若 F 是 $L_\infty(a,b;X)$ 中的有界集, $\partial_t F$ 在 $L_r(a,b;Z)$, $r > 1$ 中有界, 则 F 在 $C(a,b;Y)$ 中相对紧.

引理 2.2 [7] (Mazur 不等式) 设 $p \geqslant 0$, 则对任意的 u, v, 有

$$2^{-p}|u-v|^{p+1} \leqslant \left|u|u|^p - v|v|^p\right| \leqslant (p+1)|u-v|(|u|^p + |v|^p).$$

3. 主要结论与证明

定理 3.1 假设 (1.2) – (1.4) 成立. 则对任意给定的 $u_0 \in V$, 方程 (1.1) 存在唯一的全局解 u, 且满足

$$u \in L^\infty([0,\infty);V);\ u_t \in L^2([0,\infty);V).$$

证明 首先用 Faedo-Galerkin 方法 [12]来证明解的存在性. 设 $\{e_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 中完备的正交基, 同时也是 $L^2(\Omega)$ 中完备的正交基. $L^2(\Omega)$ 是可分的 Hilbert 空间, A 是 $L^2(\Omega)$ 上具有离散谱的正定算子, 且

$$Ae_i = \lambda_i e_i,\ i \in \mathbb{N};\ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...,\ \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

定义

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m a_{im}(t)e_i, \tag{3.1}$$

使得对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$ 满足

$$\begin{aligned}&(\partial_t u_m, e_i) - (\triangle\partial_t u_m, e_i) - (\triangle u_m, e_i) + \big(\rho|u_m(t)|^\gamma u_m(t), e_i\big)\\&-\Big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s)ds, e_i\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.2}$$

对应的初始条件为

$$u_m(0) = u_{m0} = \sum_{i=1}^m a_{im}(0)e_i(x) \to u_0,\ m \to \infty, \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) 是关于 $a_{im}(t),\ i = 1,2,...,m$ 的有限维常微分方程组的 Cauchy 问题. 由常微分方程理论可知: 对 $T_n > 0$, 存在区间 $[0,T_n]$ 上的唯一解 $a_{im}(t)$. 即 $u_m(t)$ 存在. 下面对逼近解 $u_m(t)$ 作先验估计.

用 $\partial_t a_{im} + \epsilon a_{im}$ 与 (3.2) 做内积, 并且对 i 从 1 到 m 求和, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\epsilon\|u_m\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla u_m\|^2 + \rho\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\big) + \|\partial_t u_m\|^2 + \|\nabla\partial_t u_m\|^2 + \epsilon\|\nabla u_m\|^2\\&+\epsilon\rho\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} - \Big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s)ds, \partial_t u_m + \epsilon u_m\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

定义

$$(\mu\square u_m)(t) = \int_0^\infty \mu(t-s)\big||u_m(s)|^{\frac{\beta}{2}}u_m(s) - |u_m(s)|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2 ds, \tag{3.5}$$

$$(\mu'\square u_m)(t) = \int_0^\infty \mu'(t-s)\big||u_m(s)|^{\frac{\beta}{2}}u_m(s) - |u_m(s)|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2 ds, \tag{3.6}$$

且

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds\big)=\frac{1}{2}\mu(0)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds. \tag{3.7}$$

结合 (3.5) − (3.7), 有

$$\begin{aligned}&\big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s)ds,\partial_t u_m(t)\big)\\=&\frac{1}{2}(\mu'\Box u_m)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mu\Box u_m)(t)-\frac{1}{2}\mu(0)\|u_m(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}\\&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2ds\big)\\&-\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2ds.\end{aligned} \tag{3.8}$$

应用 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s)ds,u_m(t)\big)\\\leqslant&\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds+\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2ds,\end{aligned} \tag{3.9}$$

把 (3.8), (3.9) 代入 (3.4) 中并结合 (1.4), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\epsilon\|u_m\|^2+(1+\epsilon)\|\nabla u_m\|^2+(\mu\Box u_m)(t)+\frac{2\rho}{\gamma+2}\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\\&+\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds-\int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2ds\Big)\\&+\|\partial_t u_m\|^2+\|\nabla\partial_t u_m\|^2+\epsilon\|\nabla u_m\|^2+\frac{m_1-\epsilon}{2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds\\&+\frac{m_1}{2}(\mu\Box u_m)(t)+\epsilon\rho\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}-\frac{m_2+\epsilon}{2}\int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2ds\\&\leqslant 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

取 ϵ 足够小, 使得 $\frac{m_1-\epsilon}{2}>0$. 取 $\delta=min\{\epsilon,\epsilon\rho,\frac{m_1-\epsilon}{2},\frac{m_2+\epsilon}{2}\}$, 则有

$$\frac{d}{dt}E_m(t)+\|\partial_t u_m\|^2+\|\nabla\partial_t u_m\|^2+\delta F_m(t)\leqslant 0, \tag{3.11}$$

在 $[\tau,t]$ 上积分, 有

$$E_m(t)\leqslant -\delta\int_\tau^t F_m(s)ds+E_m(\tau), \tag{3.12}$$

其中

$$
\begin{aligned}
E_m(t) =& \epsilon\|u_m\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla u_m\|^2 + (\mu\Box u_m)(t) + \frac{2\rho}{\gamma+2}\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\
& + \int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds - \int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2 ds, \\
F_m(t) =& \|\nabla u_m\|^2 + \int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds + (\mu\Box u_m)(t) + \|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\
& - \int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2 ds.
\end{aligned}
$$

使用 Young 不等式, Poincaré 不等式和 (1.3), 可知

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty \mu(t-s)\big|\|u_m(s)\|^{\frac{\beta}{2}}u_m(t)\big|^2 ds \\
\leqslant & \frac{\beta}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds + \frac{2}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds \\
\leqslant & \frac{\beta}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds + \frac{2}{\beta+2}|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

将 (3.13) 代入 $E_m(t)$, 由于 $\rho > \frac{\gamma+2}{\beta+2}|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}$, 有

$$
\begin{aligned}
E_m(t) \geqslant & \epsilon\|u_m\|^2 + \Big(\frac{2\rho}{\gamma+2} - \frac{2}{\beta+2}|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}\Big)\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + (\mu\Box u_m)(t) \\
& + (1+\epsilon)\|\nabla u_m\|^2 + \frac{2}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds \\
\geqslant & \epsilon\|u_m\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla u_m\|^2 \\
\geqslant & C_1(\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2) - M_1,
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

类似地, 由 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$
\begin{aligned}
F_m(t) \geqslant & \|\nabla u_m\|^2 + \Big(1 - \frac{2}{\beta+2}|\Omega|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}\Big)\|u_m(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + (\mu\Box u_m)(t) \\
& + \frac{2}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u_m(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds \\
\geqslant & c\|u_m\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\nabla u_m\|^2 \\
\geqslant & C_2(\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2) - M_2,
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

将 (3.14), (3.15) 代入 (3.12) 可得

$$
C_1(\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2) - M_1 \leqslant -\delta\int_\tau^t \Big(C_2(\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2) - M_2\Big)ds + E_m(\tau),
$$

因此, 对任意的 $R > \frac{M_2}{C_2}$, 存在 t_0 使得

$$\|u(t_0)\|^2 + \|\nabla u(t_0)\|^2 \leqslant R. \tag{3.16}$$

由 (3.11) 可得

$$\frac{d}{dt}E_m(t) + \|\partial_t u_m\|^2 + \|\nabla \partial_t u_m\|^2 \leqslant C_3, \tag{3.17}$$

在 $[0, \infty)$ 上积分, 有

$$\int_0^\infty \|\partial_t u_m\|^2 + \|\nabla \partial_t u_m\|^2 ds \leqslant C_4,\ t \in (0, T). \tag{3.18}$$

根据上面的估计, 可知

$$u_m \text{ 在 } L^\infty([0,\infty); V \cap H) \text{ 中一致有界;}$$

$$\partial_t u_m \text{ 在 } L^2([0,\infty); V \cap H) \text{ 中一致有界.}$$

因此, 从序列 $\{u_m\}$ 中可以选择子序列 (仍然记为 $\{u_m\}$) 使得

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ 在 } L^\infty([0,\infty); V \cap H)\text{中;}$$

$$\partial_t u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u \text{ 在 } L^2([0,\infty); V \cap H)\text{中;}$$

$$\triangle u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \triangle u \text{ 在 } L^2([0,T]; V' \cap H')\text{中;}$$

$$\triangle \partial_t u_m \rightharpoonup \triangle \partial_t u \text{ 在 } L^2([0,T]; V' \cap H')\text{中.}$$

又因为 $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$, 利用引理 2.1 可得, $\{u_m\}$ 在 $L^2([0,T]; H)$ 中强收敛. 即 $\{u_m\}$ 在 $L^2(Q_T)$ 中强收敛, 可得存在一个子序列 (仍记为 $\{u_m\}$). 因此 $u_m \to u$ 在 Q_T 中也几乎处处成立. 又因为 $|u_m|^\gamma u_m$ 为连续函数, 故

$$\rho|u_m|^\gamma u_m \to \rho|u|^\gamma u \text{ 在 } Q_T \text{ 中几乎处处收敛,}$$

使用 Sobolev 嵌入定理 $V \hookrightarrow L^6(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\gamma+1)}(\Omega)$ 和式 (3.18), 可知

$$\int_0^T \int_\Omega \left|\rho|u_m|^\gamma u_m\right| dx dt \leqslant \rho \int_0^T \|u_m\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} dt \leqslant C, \tag{3.19}$$

由 (3.18) 和 Lions 引理, 便可得到

$$\rho|u_m|^\gamma u_m \rightharpoonup \rho|u|^\gamma u \text{ 在 } L^2(Q_T)\text{中.}$$

同理可得

$$\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m|^\beta u_m ds \rightharpoonup \int_0^\infty \mu(t-s)|u|^\beta u ds \text{ 在 } L^2(Q_T)\text{中.}$$

因为 $V_m = span\{e_1, e_2, ...e_m\}$ 生成的空间, 故由式 (3.3) 得, 对任意的 $e \in V_m$, 有

$$\begin{aligned} &(\partial_t u_m, e) - (\triangle \partial_t u_m, e) - (\triangle u_m, e) + \big(\rho |u_m(t)|^\gamma u_m(t), e\big) \\ -&\big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s) ds, e\big) = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

在上式两端同时乘以 $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ 并对 t 在 (0,T) 上积分, 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\partial_t u_m, e)\varphi dt - \int_0^T (\triangle u_m, e)\varphi dt + \int_0^T \big(\rho |u_m(t)|^\gamma u_m(t), e\big)\varphi dt \\ -&\int_0^T \big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u_m(s)|^\beta u_m(s) ds, e\big)\varphi dt - \int_0^T (\triangle \partial_t u_m, e)\varphi dt = 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

在 (3.21) 中令 $m \to \infty$ 并结合以上收敛性结果, 得

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\partial_t u, e)\varphi dt - \int_0^T (\triangle u, e)\varphi dt + \int_0^T \big(\rho |u(t)|^\gamma u(t), e\big)\varphi dt \\ -&\int_0^T \big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s) ds, e\big)\varphi dt - \int_0^T (\triangle \partial_t u, e)\varphi dt = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

则

$$\partial_t u - \triangle \partial_t u - \triangle u + \rho |u(t)|^\gamma u(t) - \int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s) ds = 0. \tag{3.23}$$

已知:

$$u_m \rightharpoonup u \text{ 在 } V \cap H \text{ 中},$$

$$\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u \text{ 在 } V \cap H \text{ 中},$$

因此在 V 中 $u_m(0) \overset{*}{\rightharpoonup} u(0)$, 但在 V 中 $u_m(0) \to u_0$, 故根据极限的唯一性, 可得

$$u(0) = u_0.$$

下证唯一性. 假设 u 和 v 是 (1.1) 具有相同初值的两个解, 令 $w = u - v$ 为下面方程的解:

$$\begin{aligned} &w_t - \triangle w_t - \big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s) ds - \int_0^\infty \mu(t-s)|v(s)|^\beta v(s) ds\big) \\ &- \triangle w + \big(\rho |u(t)|^\gamma u(t) - \rho |v(t)|^\gamma v(t)\big) = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

用 w 与上式在 $L^2(\Omega)$ 中做内积可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2\big) + \|\nabla w(t)\|^2 \\ =&\big(\int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s) ds - \int_0^\infty \mu(t-s)|v(s)|^\beta v(s) ds, w(t)\big) \\ &+ \big(\rho |v(t)|^\gamma v(t) - \rho |u(t)|^\gamma u(t), w(t)\big). \end{aligned} \tag{3.25}$$

下面分别估计上式等号右边的项, 由 Mazur, Hölder 不等式以及 Sobolev 嵌入定理, 再结合 (3.16), 得

$$\begin{aligned}\big(\rho|v(t)|^{\gamma}v(t)-\rho|u(t)|^{\gamma}u(t),w(t)\big) \leqslant&\rho\int_{\Omega}\big||v|^{\gamma}v-|u|^{\gamma}u\big||w(t)|dx\\ \leqslant&\rho(\gamma+1)\int_{\Omega}|w|^{2}\big(|u|^{\gamma}+|v|^{\gamma}\big)dx\\ \leqslant&\rho(\gamma+1)\|w\|_{\gamma+2}^{2}\big\||u|^{\gamma}+|v|^{\gamma}\big\|_{\gamma+2}\\ \leqslant&\rho(\gamma+1)\|w\|_{\gamma+2}^{2}\big(\|u\|_{\gamma+2}^{\gamma}+\|v\|_{\gamma+2}^{\gamma}\big)\\ \leqslant&\rho(\gamma+1)\|\nabla w\|^{2}(\|\nabla u\|^{\gamma}+\|\nabla v\|^{\gamma})\\ \leqslant&C\rho(\gamma+1)\|\nabla w\|^{2},\end{aligned} \tag{3.26}$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{0}^{\infty}\mu(t-s)|u(s)|^{\beta}u(s)ds-\int_{0}^{\infty}\mu(t-s)|v(s)|^{\beta}v(s)ds,w(t)\Big)\\ \leqslant&\int_{0}^{\infty}\mu(t-s)\big(|u(s)|^{\beta}u(s)-|v(s)|^{\beta}v(s)\big)ds\\ \leqslant&C(\beta+1)\|\nabla w\|^{2}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

将 (3.26), (3.27) 代入 (3.25) 并结合 Poincaré 不等式, 可知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w(t)\|^{2}+\|\nabla w(t)\|^{2}\big)\leqslant\lambda_{1}\|w\|^{2}+\big(C(\beta+1)+C\rho(\gamma+1)\big)\|\nabla w(t)\|^{2}, \tag{3.28}$$

再根据 Gronwall 引理, 可知

$$\|w(t)\|^{2}+\|\nabla w(t)\|^{2}\leqslant C\big(\|w(0)\|^{2}+\|\nabla w(0)\|^{2}\big),$$

显然, 对任意的 $t>0$, $\|w(t)\|=0$, 即 $u(t)=v(t)$. 唯一性得证.

由 (3.16) 可知, 对任意的 $R>\frac{M_2}{C2}$, 存在 $t_0=t_0(\mathcal{B})$, $t\geqslant t_0$, 使得

$$\|u(t_0)\|^{2}+\|\nabla u(t_0)\|^{2}\leqslant R.$$

令

$$\mathcal{B}_0=\bigcup_{t\geqslant\tau}S(t)\mathcal{B}_0',$$

其中

$$\mathcal{B}_0'=\{u_0\in V\big|\|u(t_0)\|^{2}+\|\nabla u(t_0)\|^{2}\leqslant R\},$$

则存在常数 $R_0>0$, 对任意有界集 $\mathcal{B}\subset V$, 球 $\mathcal{B}_0=B(0,R_0)$ 是问题 (1.1) 生成的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 V 中的有界吸收集. 即对任意的有界集 $\mathcal{B}\subset V$, 存在 $t_0>0$, 使得当 $t\geqslant t_0$ 时, 有

$$S(t)\mathcal{B}\subset\mathcal{B}_0.$$

为证 $S(t)$ 的渐近紧性, 我们将 $S(t)$ 分解成 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$, 其中 $S_1(t)$ 在 V 中一致紧, $S_2(t)$ 指数衰退. 因此, 对任意的有界集 $\mathcal{B}\subset V$, 有

$$\alpha(S(t)\mathcal{B})\leqslant\alpha(S_1(t)\mathcal{B})+\alpha(S_2(t)\mathcal{B})=\alpha(s_2(t)\mathcal{B})\to 0,\ t\to\infty.$$

令 $u=v+w$, 其中 v 和 w 分别为下面方程的解:

$$\begin{cases} v_t-\triangle v_t-\triangle v=\int_0^\infty\mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds-\rho|u(t)|^\gamma u(t), & x\in\Omega,\ t>0,\\ v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}\tag{3.29}$$

和

$$\begin{cases} w_t-\triangle w_t-\triangle w=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ w(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\\ w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}\tag{3.30}$$

引理 3.2 定义如下抽象方程:

$$\begin{cases} u_t+Au_t+Au=0, & x\in\Omega,\ t>0\ ,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}\tag{3.31}$$

若 $u_0\in V$, u 是方程 (3.31) 的解, 则 $u\in C_b(\mathbb{R}^+;V)$, 并且 u 满足

$$\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\leqslant\big(\|u_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2\big)e^{-\alpha_1 t},\tag{3.32}$$

其中 $\alpha_1>0$.

证明 用 u 与方程 (3.31) 在 H 中做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\big)+\|\nabla u\|^2=0,$$

进一步, 有

$$\frac{d}{dt}\big(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\big)+\alpha_1\big(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\big)\leqslant 0,$$

根据 Gronwall 引理, 可知

$$\|v\|^2+\|\nabla v\|^2\leqslant\big(\|u_0\|^2+\|\nabla u_0\|^2\big)e^{-\alpha_1 t}.\tag{3.33}$$

命题 3.3 [9] 已知 u 是方程 (3.33) 的解, 且 $u\in C_b(\mathbb{R};V_{s+1})$, $s\in\mathbb{R}$. 则 $u\in C_b(\mathbb{R};V_{\sigma+1})$.

证明 让 $A^{\frac{\sigma}{2}}$ 作用于方程 (3.33), 且令 $w = A^{\frac{\sigma}{2}}u$, 那么方程 (3.33) 可写为

$$w_t + Aw_t + Aw = 0, \ t \in \mathbb{R},$$

又根据 $u \in C_b(\mathbb{R}; V_{s+1})$, 得

$$w \in C_b(\mathbb{R}; V_{s+1-\sigma}),$$

由一一对应关系, 可知 $w \in C_b(\mathbb{R}; V)$. 故 $u = A^{-\frac{\sigma}{2}}w \in C_b(\mathbb{R}; V_{\sigma+1})$. 接下来我们将证明 $S_1(t)$ 在 V 中一致紧.

引理 3.4 设 $0 < \nu < 2$, 若 $u \in C_b(\mathbb{R}^+; V)$, 则存在 $\sigma > 0$, 使得

$$\partial_t \mathcal{F}(x,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V_{\sigma-1}), \tag{3.34}$$

并且, 对任意的有界集 $\mathcal{B} \subset V$, 存在 $C(\mathcal{B}) > 0$, 使得当 $u_0 \in V$ 时, 有

$$\sup_{u \in V} \|\partial_t \mathcal{F}(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; V_{\sigma+1})} \leqslant C(\mathcal{B}), \tag{3.35}$$

其中

$$\mathcal{F}(x,t) = \int_0^\infty \mu(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds - \rho|u(t)|^\gamma u(t). \tag{3.36}$$

证明 由 Sobolev 嵌入定理可知

$$H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega); \quad H^s(\Omega) \subset L^{\frac{6}{3-2s}}(\Omega), \ 0 \leqslant s < \frac{3}{2}. \tag{3.37}$$

取 $1 - \sigma = \frac{\tau}{2}$, 其中 $\tau = max\{\gamma, \nu\}$ 则有

$$0 < 2(1-\sigma) < 2, \tag{3.38}$$

以及

$$\tau + 2 \leqslant \frac{2n}{n - 2(1-\sigma)}, \tag{3.39}$$

故可推得

$$L^{\frac{2n}{n-2(1-\sigma)}} \subset L^{\tau+2} \subset L^{\gamma+2} \subset L^{\beta+2}, \tag{3.40}$$

此外, 由插值定理和 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$V_{1-\sigma} \subset H^{1-\sigma} \subset L^{\frac{2n}{n-2(1-\sigma)}}, \tag{3.41}$$

由于所有的嵌入都是连续的, 则由 (3.40) 和 (3.41) 可知

$$V_{1-\sigma} \subset L^{\tau+2} \subset L^{\gamma+2} \subset L^{\beta+2}. \tag{3.42}$$

又因为

$$\frac{\gamma n}{1-\sigma}=\frac{2\gamma n}{\tau}<2n, \tag{3.43}$$

则有

$$\|u\|_{\frac{\gamma n}{1-\sigma}}\leqslant C\|u\|. \tag{3.44}$$

计算得

$$\partial_t\mathcal{F}(x,t)=\int_0^\infty \mu'(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds+\mu(0)|u(t)|^\beta u(t)-\rho(\gamma+1)|u(t)|^\gamma u_t(t). \tag{3.45}$$

用 $w(t)$ 与上式在 $L^2(\Omega)$ 中做内积, 得

$$\begin{aligned}\big(\partial_t\mathcal{F}(x,t),w(t)\big)=&\Big(\int_0^\infty \mu'(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds,w(t)\Big)+\big(\mu(0)|u(t)|^\beta u(t),w(t)\big)\\&-\big(\rho(\gamma+1)|u(t)|^\gamma u_t(t),w(t)\big),\end{aligned} \tag{3.46}$$

对上式等号右边各项进行估计, 利用 Hölder, Young 不等式 $\big(\frac{\beta+1}{\beta+2}+\frac{1}{\beta+2}=1\big)$和式 (1.4), 可得

$$\begin{aligned}&\Big(\int_0^\infty \mu'(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds,w(t)\Big)\\ \leqslant&-m_1\int_0^\infty \mu(t-s)\|u(s)\|_{\beta+2}^{\beta+1}ds\|w(t)\|_{\beta+2}\\ \leqslant&-m_1\frac{\beta+1}{\beta+2}\int_0^\infty \mu(t-s)\|u(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds\|w(t)\|_{\beta+2}-m_1\frac{1}{\beta+2}\|w(t)\|_{\beta+2},\end{aligned} \tag{3.47}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}&\big(\mu(0)|u(t)|^\beta u(t),w(t)\big)\\ \leqslant&\mu(0)\|u(t)\|_{\beta+2}^{\beta+1}\|w(t)\|_{\beta+2}\\ \leqslant&\mu(0)\frac{\beta+1}{\beta+2}\|u(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}\|w(t)\|_{\beta+2}+\mu(0)\frac{1}{\beta+2}\|w(t)\|_{\beta+2},\end{aligned} \tag{3.48}$$

利用 Hölder 不等式 $\big(\frac{2(1-\sigma)}{2n}+\frac{1}{2}+\frac{n-2(1-\sigma)}{2n}=1\big)$ 和式 (3.44), 得

$$\begin{aligned}&\big(\rho(\gamma+1)|u(t)|^\gamma u_t(t),w(t)\big)\\ \leqslant&\rho(\gamma+1)\|u(t)\|_{\frac{\gamma n}{1-\sigma}}^\gamma\|u_t(t)\|\|w(t)\|_{\frac{2n}{n-2(1-\sigma)}}\\ \leqslant&C\rho(\gamma+1)\|u(t)\|^\gamma\|u_t(t)\|\|w(t)\|_{\frac{2n}{n-2(1-\sigma)}},\end{aligned} \tag{3.49}$$

将 (3.47)-(3.49) 代入 (3.46) 并结合 (3.40), (3.41) 得

$$\big(\partial_t\mathcal{F}(x,t),w(t)\big)\leqslant C(\mathcal{B})\|w(t)\|_{V_{1-\sigma}}, \tag{3.50}$$

其中

$$C(\mathcal{B})=\sup_{\{u_0\}\in\mathcal{B},t\in\mathcal{R}^+}\left\{\frac{\mu(0)(\beta+1)C}{\beta+2}\|u(t)\|_{\beta+2}^{\beta+2}-\frac{m_1C}{\beta+2}+C\rho(\gamma+1)\|u(t)\|^{\gamma}\|u_t(t)\|\right.$$

$$\left.+\frac{\mu(0)C}{\beta+2}-\frac{m_1(\beta+1)C}{\beta+2}\int_0^\infty\mu(t-s)\|u(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds\right\}.$$

综上所述, $C(\mathcal{B})$ 是有界的, 故 $\partial_t\mathcal{F}(x,t)$ 在 $V_{1-\sigma}$ 的对偶空间 $V_{\sigma-1}$ 中, 并且其范数在 $V_{\sigma-1}$ 中有界.

引理 3.5 对于充分大的 t, 算子 $S_1(t)$ 在 V 中一致紧.

证明 已知 u 是方程 (1.1) 的解, 由引理 3.4 知 $u\in C_b(\mathbb{R}^+;V)$, $\mathcal{F}(x,t)\in C_b(\mathbb{R}^+;H)$, v 是方程 (3.30) 的解, 对方程 (3.30) 关于 t 微分, 且令 $w=v_t$ 得

$$\begin{cases} w_t-\triangle w_t-\triangle w=\int_0^\infty\mu'(t-s)|u(s)|^\beta u(s)ds & \\ +\mu(0)|u(t)|^\beta u(t)-\rho(\gamma+1)|u(t)^\gamma u_t(t), & x\in\Omega,\ t>0, \\ w(x,0)=0, & x\in\Omega. \end{cases}\tag{3.51}$$

在式 (3.50) 中, 由引理 3.4 可得,

$$\partial_t\mathcal{F}(x,t)\in C_b(\mathbb{R}^+;V_{\sigma-1}),$$

应用命题 3.3, 得

$$v_t=w\in C_b(\mathbb{R}^+;V_{\sigma+1}),$$

则

$$Av_t\in C_b(\mathbb{R}^+;V_{\sigma-1}).$$

由式 (3.31) 和 (3.36), 可知

$$Av=\mathcal{F}(x,t)-v_t-Av_t,$$

故由 Sobolev 嵌入定理, 可知

$$Av\in C_b(\mathbb{R}^+;V_{\sigma-1}),$$

从而

$$v\in C_b(\mathbb{R}^+;V_{\sigma+1}),$$

由嵌入定理 $V_{\sigma+1}\hookrightarrow V$ 得到

$$\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)\mathcal{B}\text{ 在 }V\text{ 中紧},$$

故 $S_1(t)$ 在 V 中一致紧. 故结论得证.

定理 3.6 对任意有界集 $\mathcal{B}$, 存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\bigcup_{t>t_0} S(t)\mathcal{B} \text{ 在 } V \text{ 中相对紧},$$

其中 t_0 由 (3.16) 所确定. 从而 $S(t)$ 在 V 中相对紧.

证明 令 $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. 根据命题 4.5 可知方程 (3.30) 的解是一致衰减的, 即对方程 (3.30) 以 $u_0 \in \mathcal{B}$ 为初始条件的任意解 v 有以下不等式成立

$$\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 \leqslant C(\mathcal{B})e^{-\alpha_1 t},$$

因此,

$$\alpha(S_2(t)\mathcal{B}) \to 0,\ t \to \infty.$$

根据引理 3.4 可得算子 $S_1(t)$ 在 V 中一致紧. 因此

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}) \leqslant \alpha(S_1(t)\mathcal{B}) + \alpha(S_2(t)\mathcal{B}) = \alpha(S_2(t)\mathcal{B}) \to 0,\ t \to \infty.$$

定理得证.

基金项目

国家自然科学基金 (11961059).

参考文献

[1] Aifantis, E.C. (1980) On the Problem of Diffusion in Solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296. https://doi.org/10.1007/BF01202949

[2] Aifants, E.C. (2011) Gradient Gradient Nanomechanics: Applications to Deformation, Fracture, and Diffusion in Nanopolycrystal. *Metallurgical and Materials Transactions A*, **209**, 649-658.

[3] Chen, P.J. and Gurtin, M.E. (1968) On the Theory of Heat Condition Involving Two Temperatures. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **19**, 614-627. https://doi.org/10.1007/BF01594969

[4] Lions, J.L. and Magenes, E. (1972) Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications. Springer-Verlag, Heidelberg.

[5] Sun, C.Y. and Yang, M.H. (2008) Dynamics of the Nonclassical Diffusion Equations. *Asymptotic Analysis*, **59**, 51-81. https://doi.org/10.3233/ASY-2008-0886

[6] Chepyzhov, V.V. and Miranville, A. (2006) On Trajectory and Global Attractors for Semilinear Heat Equations with Fading Memory. *Indiana University Mathematics Journal*, **55**, 119-167. https://doi.org/10.1512/iumj.2006.55.2597

[7] Rivera, J.E.M., Naso, M.G. and Vegni, F.M. (2003) Asymptotic Behavior of Energy for a Class of Weakly Dissipative Second-Order Systems with Memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 692-704. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00511-0

[8] Wang, X. and Zhong, C.K. (2009) Attractors for the Non-Autonomous Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **71**, 5733-5746. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.001

[9] Ma, Q.Z., Wang, X.P. and Xu, L. (2016) Existence and Regularity of time-Dependent Global Attractors for the Nonclassical Reaction-Diffusion Equations with Lower Forcing Term. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 10. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0513-3

[10] Cavalcanti, M.M. and Domingos Cavalcanti, V.N. (2000) Global Existence and Uniform Decay for the Coupled Kleingordon-Schrodinger Equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **7**, 285-307. https://doi.org/10.1007/PL00001426

[11] Chueshov, I. (2015) Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems. Springer International Publishing, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22903-4

[12] Lions, J.L. (1969) Quelques méthodes de résolution des probléms aux limites non linéaires. Dunod Gautier-Villars, Paris.