Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2374-2377
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138245

不可压缩多孔介质方程的转化

杨凯歌

成都理工大学数理学院，四川 成都

收稿日期：2023年7月7日；录用日期：2023年8月8日；发布日期：2023年8月15日

摘 要

本文主要介绍了不可压缩多孔介质方程的大概背景，对不可压缩多孔介质方程组的转化做了推导，使得方程组变得更加简洁，并简要介绍了近几年的研究成果。

关键词

IPM方程，不可压缩，转化

Transformation of Incompressible Porous Media Equation

Kaige Yang

College of Mathematics and Physics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Jul. 7th, 2023; accepted: Aug. 8th, 2023; published: Aug. 15th, 2023

Abstract

This paper mainly introduces the background of incompressible porous media equations, deduces the conversion process of incompressible porous media equations, makes the equations more concise, and briefly introduces the research results in recent years.

Keywords

IPM Equation, Incompressible, Transform

文章引用: 杨凯歌. 不可压缩多孔介质方程的转化[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2374-2377.
DOI: 10.12677/pm.2023.138245

1. 背景

多孔介质指的是由具有相互连接的空隙的固体基质组成的材料。假设固体基质要么是刚性的(通常情况下)，要么是经历了小变形。空隙(气孔)的相互连通性允许一种或多种流体流过材料。在最简单的情况下(“单相流”)，多孔介质的空隙被单一的流体饱和。在“两相流”中，液体和气体共享空隙。在天然多孔介质中，气孔相对于形状和大小的分布是不规则的。天然多孔介质的例子有海滩沙、砂岩、石灰岩、黑麦面包、木材和人类肺。在孔隙尺度(微观尺度)上，流量、速度、压力等，显然是不规律的。但在典型的实验中，人们感兴趣的量是在跨越许多孔隙的区域来衡量的，并且这种空间平均(宏观)量在空间和时间上以规则方式变化，这样也便于理论处理[1]。

在连续介质力学里，不可压缩流是流速的散度等于零的流动，由于做了不可压缩这个假设，物质流动的主导方程能够得到极大的简化，不可压缩流体方程由于其许多有趣的现象，近年来受到了偏微分方程界的极大关注。根据给定流体方程模型的具体物理情况，发现会产生截然不同的数学现象。粗略地说，一个完全耗散的系统是指所有的“运动”都受到某种机制的抑制，比如扩散或阻力。相对应地，部分耗散系统是只有某些类型的运动被抑制的系统。很容易看出，这两种情况都可以相当自然地出现在不同的物理场景中。例如，在一个有重力和分层的物理系统中，垂直运动可能会受到限制，而水平运动则不会。本文将研究在没有扩散的情况下按密度分层的流体；这种流体可以用无粘性不可压缩多孔介质方程来建模：不可压缩多孔介质方程(Incompressible Porous Medium Equation)，简称 IPM 方程：

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\mu}{\kappa} u = -\nabla p - (0, g\rho), \\ div(u) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

(1.1)中的第一个方程为活动标量方程，流体的速度场 u 满足达西定律(Darcy’ law，描述饱和土中水的渗流速度与水力坡降之间的线性关系的规律，又称线性渗流定律。)给出的动量方程，$div(u) = 0$ 为不可压缩条件。其中，p 是压力，μ 是动态粘度，κ 是各向同性介质的渗透率，ρ 是液体密度，g 是重力加速度。当在有界域上研究这些方程时，我们假设 u 满足无滑移边界条件：

$$u \cdot n = 0$$

在区域的边界上，其中 n 是边界的单位法向量。为了简单起见，以 $g = -1, \mu = \kappa$ 为例。注意到，此时系统可以写为

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, x \in \Omega, t > 0, \\ u = -\nabla p + (0, \rho), \\ div(u) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

2. IPM 方程的转换过程

(1.2)系统通过对 u 运用 Biot-Savart 定律(对第二个方程做散度)，并经过 Riesz 变换也可以写为下列形式

$$\begin{cases}\partial_t\rho+u\cdot\nabla\rho=0,\\ u=R_1R^{\perp}\rho,\end{cases}$$

这里 $R^{\perp}=(R_2,-R_1)$， R_1,R_2 表示 Riesz 变换， $R_i=\partial_i\Lambda^{-1}(i=1,2)$ 。

在研究流体方程时，系统的精确稳态能够更好地帮助理解，本文感兴趣的精确解是：

$$\rho=f(y),u=0,p=0\text{，}$$

这里 $f\in C^1$，模型中固有的分层可以作为解决方案的稳定机制，这些解决方案处于某个稳定状态的小(Sobolev)邻域中。事实上，可以想象，密度与深度成正比的流动(即流体的密度随着你进入流体的深度而增加)在某种意义上是“稳定的”。另一方面，如果密度与深度成反比，那么人们会想象这样的场景是不稳定的。虽然很明显，在密度方程中有扩散，小溶液最终会衰减到零，但没有扩散的情形就不清楚了。

如果想证明稳定解 $\rho(x,y):=y$ 的光滑扰动在 Sobolev 空间中始终是稳定的。需要假设给稳定解一些扰动，有 $\rho=f(y)+\tilde{\rho}$， $u=\tilde{u}$，之后会看到

$$\begin{cases}\tilde{u}=-\nabla p+(0,\tilde{\rho}),\\ \partial_t\tilde{\rho}+\tilde{u}\cdot\nabla\big(f(y)+\tilde{\rho}\big)=0,\end{cases}$$

将 $\tilde{u}$ 重写为 u， $\tilde{\rho}$ 重写为 ρ 并化简得：

$$\begin{cases}u=-\nabla p+(0,\rho),\\ \partial_t\rho+u_2f'(y)+u\cdot\nabla\rho=0,\end{cases}$$

通过引入流函数并定义 $u=\nabla^{\perp}\psi$ ，则有

$$\Delta\psi=-\partial_x\rho$$

并且在边界区域满足 $\psi=0$ 。这表示 $u_2=-R_1^2(-\Delta)^{-\alpha}\rho$ ，因此，方程就转化为化为：

$$\partial_t\rho-R_1^2\rho+u\cdot\nabla\rho=0 \tag{1.4}$$

这样，我们就把方程(1.2)式化为了(1.4)式，此时，如果我们想要探索无粘不可压缩多孔介质方程的性质，我们只需要对(1.4)式进行处理即可。

我们发现，原本的方程组变成了一个方程，这会更便于方程之后的计算的处理，也会使得计算更加简便。下面将会简要介绍 IPM 方程的相关结果，在阅读这些文献时我们会发现，本文所描述的这个转化过程是必不可少的，但是很多文章都是一笔带过，这显得我们这个过程尤为重要，可以帮助更多人理解本过程，并且更方便人们理解这个方程的本质构成。

3. 国内外研究现状

多孔介质方程一直是偏微分方程领域的研究热点，近些年陆续有很多出色的成果：

T. Elgindi 在 2017 年[2]研究了 $\mathbb{T}^2$ 和 $\mathbb{R}^2$ 上二维无粘性不可压缩多孔介质方程(IPM) (1.2)平稳解的稳定性。表明某些稳定平稳解附近的解必须随着 $t\to\infty$ 收敛到 IPM 方程的平稳解，对某一类稳定平稳解的 IPM 方程进行线性化，得到了非局部部分阻尼机制。在环面 $\mathbb{T}^2$ 上，线性化问题有非常大量的定常(无阻尼)模态，这使得大时间行为的问题变得更加困难，[2]利用特殊的非线性结构围绕无阻尼模式进行第二次线性化，并表明平稳模式是可以控制的。A. Castro，D. Córdoba 和 D. Lear 在 2019 年[3]考虑了一个受限的物理场景来证明无粘性不可压缩多孔介质(IPM)方程(1.2)具有有界密度和有限能量的平滑解的全局存在性，考虑的是条带区域 $\mathbb{T}\times[-l,l],0<l<\infty$ 。结果证明使用分层解决方案的稳定性，结合最初的扰动的附加结构，使得能够摆脱能量估计中的边界项。

D. Córdoba 和 F. Gancedo 在 2007 年[4]考虑了两种不可压缩流体通过多孔介质时界面的演化问题，这被称为 Muskat 问题，在二维上，它在数学上类似于两相 Hele-Shaw 单元。用达西定律得到的演化方程，证明了在小密度以上(稳定情况)的局部适定性，在不稳定情况下证明了不适定性。D. Córdoba，F. Gancedo 和 R. Orive 在 2007 年[5]研究了基于达西定律的多孔介质中不可压缩流体二维质量平衡方程的解析结构。利用粒子轨迹法得到了局部存在性和唯一性，并给出了不同的全局存在性准则。这些分析结果与数值模拟相结合，表明奇异性的非形成性。此外，在一类具有无限能量的解中，给出了爆破结果。

参考文献

[1] Nield, D.A. and Bejan, A. (2006) Convection in Porous Media. 3rd Edition, Springer, New York.

[2] Elgindi, T. (2017) On the Asymptotic Stability of Stationary Solutions of the Inviscid Incompressible Porous Medium Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **225**, 573-599. https://doi.org/10.1007/s00205-017-1090-7

[3] Castro, A., Córdoba, D. and Lear, D. (2019) Global Existence of Quasi-Stratified Solutions for the Confined IPM Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **232**, 437-471. https://doi.org/10.1007/s00205-018-1324-3

[4] Córdoba, D. and Gancedo, F. (2007) Contour Dynamics of Incompressible 3-D Fluids in a Porous Medium with Different Densities. *Communications in Mathematical Physics*, **273**, 445-471. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0246-y

[5] Córdoba, D., Gancedo, F. and Orive, R. (2007) Analytical Behavior of Two-Dimensional Incompressible Flow in Porous Media. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 065206. https://doi.org/10.1063/1.2404593