

单个正态总体方差假设检验的MATLAB实现

田万福

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2023年7月14日; 录用日期: 2023年8月15日; 发布日期: 2023年8月22日

摘要

本文针对单个正态总体方差的假设检验, 给出了MATLAB程序, 可以检验三种假设检验问题, 并给出了具体的应用实例, 验证了程序的可行性。

关键词

正态总体, 方差, 假设检验, MATLAB

MATLAB Implementation of Hypothesis Testing for Single Normal Population Variance

Wanfu Tian

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Jul. 14th, 2023; accepted: Aug. 15th, 2023; published: Aug. 22nd, 2023

Abstract

In this paper, for the hypothesis testing of single normal population variance, a MATLAB program is given, which can test three hypothesis testing problems, and specific application examples are given to verify the feasibility of the program.

Keywords

Normal Population, Variance, Hypothesis Testing, MATLAB



1. 引言

假设检验(Hypothesis Testing) [1]-[6], 又称统计假设检验, 是统计推断的一类重要问题, 在日常生活生产和科学研究中应用极为广泛。假设检验是在总体的分布函数未知或只知道其形式但不知道其参数的情况下, 为了推断总体的某些特性, 提出某些关于总体的假设, 然后给出一个合理的法则, 根据这一法则, 利用已知样本对所提出的假设作出决策, 是接受还是拒绝。假设检验是作出这一决策的过程。常用的假设检验方法有 Z 检验、 t 检验、 χ^2 检验、 F 检验等。本文用到的检验方法为 χ^2 检验。假设检验的一般步骤如下:

- (1) 根据实际问题的要求, 提出原假设 H_0 与备择假设 H_1 ;
- (2) 给定显著性水平 α 及确定样本容量 n ;
- (3) 选定合适的检验统计量以及拒绝域的形式;
- (4) 根据 $P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} \leq \alpha$ 求出拒绝域;
- (5) 根据样本的观察值做出判断, 是接受 H_0 , 还是拒绝 H_0 。

MATLAB [4]-[10]是矩阵实验室(Matrix Laboratory)的简称, 是美国 MathWorks 公司出品的商业数学软件, 是目前国际上最流行、应用最广泛的科学与工程计算软件。MATLAB 主要应用于数值分析、数值和符号计算、工程与科学绘图、控制系统的设计与仿真、数字图像处理、深度学习等。它已经成为高等数学、线性代数、数理统计、数字信号处理等课程的基本工具。

假设检验是数理统计中的一类重要问题, 对于单个正态总体均值的假设检验, MATLAB 提供了两个函数: $[h, sig, ci, zval] = ztest(x, mu, sigma, alpha, tail)$ (Z 检验)和 $[h, sig, ci] = ttest(x, mu, alpha, tail)$ (t 检验), 其中输入参数 x 为样本, mu 为假设检验中的 μ_0 , $sigma$ 为总体标准差 σ , $alpha$ 为显著性水平 α , $alpha$ 缺省值为 0.05, $tail$ 为假设检验类型的标识, $tail = 0$ 为双边假设检验, $tail = 1$ 为右边假设检验, $tail = -1$ 为左边假设检验, $tail$ 缺省值为 0。输出参数 $h = 0$, 表示接受原假设 H_0 , $h = 1$ 表示拒绝原假设 H_0 , sig 为犯第一类错误的概率, 即 $P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\}$, 当 sig 为小概率时则对原假设 H_0 提出质疑, ci 为置信水平为 $1 - alpha$ 的均值 μ 的置信区间, $zval$ 为统计量的观察值 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。

而对于总体方差假设检验的函数 MATLAB 是没有提供的。本文旨在给出单个正态总体方差假设检验的 MATLAB 程序, 并给出具体应用实例验证程序的可行性。

2. 单个正态总体方差假设检验的结论

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ , σ^2 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本。在显著性水平 α 下检验假设:

- a) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (双边假设检验)
- b) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (右边假设检验)
- c) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (左边假设检验)

以上三种假设检验的拒绝域分别为

- a) $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

$$\begin{aligned} \text{b) } \chi^2 &\geq \chi_{\alpha}^2(n-1) \\ \text{c) } \chi^2 &\leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \end{aligned}$$

其中 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ 。

3. MATLAB 实现

根据单个正态总体方差假设检验的结论,编写相关的 MATLAB 程序。建立 M 文件并编写如下代码,保存为 chi2test.m。利用此函数可以检验 μ 未知情况下的关于 σ^2 的三种假设检验问题。

```
function [h,chi2]=chi2test(x,sigma02,alpha,tail)
%卡方假设检验
% h=1 拒绝原假设 H0,h=0 接受 H0
% chi2 为统计量的值
% x 为样本
% sigma02 为要检验的总体方差的值
% alpha 为显著性水平,默认为 0.05
% tail=0 为双边检验,tail=1 为右边检验,tail=-1 为左边检验. 默认 tail=0
if nargin<3||isempty(alpha)% 设置显著性水平 alpha 的缺省值
    alpha=0.05;
end
if nargin<4% 设置假设检验类型的缺省值
    tail=0;
end
n=length(x);% 样本容量
chi2=(n-1)*var(x)/sigma02;% 计算统计量的值
if tail==0
    c1=chi2inv(1-alpha/2,n-1); % 计算分位点的值
    c2=chi2inv(alpha/2,n-1);
    if chi2>=c1||chi2<=c2% 判断统计量的值是否落入双边检验的拒绝域中
        h=1;
    else
        h=0;
    end
end
if tail==1
    c1=chi2inv(1-alpha,n-1);
    if chi2>=c1% 判断统计量的值是否落入右边检验的拒绝域中
        h=1;
    else
        h=0;
    end
end
```

```

end
if tail== -1
    c2=chi2inv(alpha,n-1);
if chi2<=c2% 判断统计量的值是否落入左边检验的拒绝域中
    h=1;
else
    h=0;
end
end
end
end

```

4. 实例

例 1 某公司生产的发动机部件的直径对应的随机变量 X 服从正态分布。该公司称 X 的标准差为 $\sigma = 0.048$ cm，现随机抽取 5 个部件，测得它们的直径分别为：1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44。问能否认为目前该公司生产这种直径的技术稳定性较以往有明显的改变？(显著性水平 $\alpha = 0.05$)

解 这是双边假设检验问题。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下提出检验假设

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.048^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

由题知， $n = 5$ ， $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(4) = 11.143$ ， $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(4) = 0.484$ ， $\sigma_0^2 = 0.048^2$ ，拒绝域为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 0.484 \text{ 或 } \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 11.143$$

经计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 13.507 > 11.143$ ，落入到了拒绝域中，所以拒绝 H_0 。

编写代码如下：

```

x=[1.32,1.55,1.36,1.40,1.44]; % 样本
alpha=0.05; % 显著性水平
sigma02=0.048^2;
[h,chi2]=chi2test(x,sigma02,alpha)

```

运行结果为： $h = 1$ ； $chi2 = 13.5069$ 。

$h = 1$ ，所以拒绝 H_0 ，即认为目前该公司生产这种直径的技术稳定性较以往有明显改变。

例 2 某工厂用自动生产线生产金属丝，假定金属丝的折断力为 X (单位：N) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其合格标准为方差不超过 64。某日开工后，抽取 9 根作折断检测，测得结果如下：578, 572, 570, 568, 572, 570, 596, 586, 568。试问：此日自动生产线是否工作正常？(显著性水平 $\alpha = 0.02$)

解 这是右边假设检验问题。在显著性水平 $\alpha = 0.02$ 下提出检验假设

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 64, \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

由题知， $n = 9$ ， $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.02}^2(8) = 18.168$ ， $\sigma_0^2 = 64$ ，拒绝域为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq 18.168$$

经计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 11.472 < 18.168$ ，没有落入拒绝域中，所以接受 H_0 。

编写代码如下：

```
x=[578,572,570,568,572,570,596,586,568];% 样本
alpha=0.02; % 显著性水平
sigma02=64;
[h,chi2]=chi2test(x,sigma02,alpha,1)
```

运行结果为： $h = 0$ ； $chi2 = 11.4722$ 。

$h = 0$ ，所以接受 H_0 ，即认为此日自动生产线工作正常。

例 3 假设某炼铁厂铁水中含碳量 X (单位: kg)服从正态分布 $N(\mu, 0.112^2)$ ，现对工艺进行了改进，从中抽取了 7 炉铁水，测得含碳量数据如下：4.421, 4.052, 4.357, 4.394, 4.326, 4.287, 4.683。试问：新工艺炼出的铁水含碳量的方差是否小于 0.112^2 ? (显著性水平 $\alpha = 0.01$)

解 这是左边假设检验问题。在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下提出检验假设

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 0.112^2, \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

由题知， $n = 7$ ， $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.99}^2(6) = 0.872$ ， $\sigma_0^2 = 0.112^2$ ，拒绝域为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq 0.872$$

经计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 16.786 > 0.872$ ，没有落入拒绝域中，所以接受 H_0 。

编写代码如下：

```
x=[4.421,4.052,4.357,4.394,4.326,4.287,4.683];% 样本
alpha=0.01; % 显著性水平
sigma02=0.112^2;
[h,chi2]=chi2test(x,sigma02,alpha,-1)
```

运行结果为： $h = 0$ ； $chi2 = 16.7860$ 。

$h = 0$ ，所以接受 H_0 ，即新工艺炼出的铁水含碳量的方差不小于 0.112^2 。

5. 结论

利用 MATLAB 语言编写了关于单个正态总体方差假设检验的程序，可以检验双边及单边检验问题，并给出了具体的应用实例，验证了程序的可行性。MATLAB 没有关于单个正态总体方差假设检验的相关命令，因此函数 `chi2test` 可以作为 MATLAB 软件在假设检验问题命令上的一个有效补充。

基金项目

辽宁省普通高等教育本科教学改革研究项目(辽教办[2021] 254 号)。

参考文献

- [1] 龙永红, 等. 概率论与数理统计[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [3] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

- [4] 王正东. 数学软件与数学实验[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.
- [5] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 Matlab 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [6] 姜启源, 邢文训, 谢金星, 等. 大学数学实验[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [7] 杨德平, 李聪, 杨本硕, 等. MATLAB9.8 基础教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [8] 汪祥莉, 孙琳. 数理统计及其在数学建模中的实践(使用 MATLAB) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [9] 王正盛. MATLAB 与科学计算[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [10] 张志涌, 等. 精通 MATLAB R2011a [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2011.