

具有年龄结构的SVIQR传染病模型的稳定性分析

史旭元, 高红亮*

兰州交通大学, 数理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2023年7月26日; 录用日期: 2023年8月28日; 发布日期: 2023年9月4日

摘要

讨论一类具有疫苗接种和隔离的年龄结构SVIQR传染病模型, 得出基本再生数 R_0 的表达式。证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点不稳定; 此时系统存在地方病平衡点, 并且证明了地方病平衡点是唯一的并且局部渐近稳定。最终得出, 隔离是消除传染病的有效方式, 如果不能进一步降低传播率, 那么就需要最大限度地提高疫苗接种率。

关键词

年龄结构, 疫苗接种, 隔离, 基本再生数, 稳定性

Stability Analysis of SVIQR Infectious Disease Model with Age Structure

Xuyuan Shi, Hongliang Gao*

College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 26th, 2023; accepted: Aug. 28th, 2023; published: Sep. 4th, 2023

Abstract

A class of age-structured SVIQR infectious disease models with vaccination and isolation was discussed. The expressions of basic regeneration number R_0 were derived. It was proved that when $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium point was globally asymptotically stable; when $R_0 > 1$, the disease-free equilibrium point was unstable. And there exists endemic equilibrium state, and it was proved that endemic equilibrium point was unique and locally asymptotically stable. Ultimately, isolation was an effective way to eliminate infectious diseases; if transmission rates cannot be reduced in future, then vaccination rates need to be maximized.

*通讯作者。

文章引用: 史旭元, 高红亮. 具有年龄结构的 SVIQR 传染病模型的稳定性分析[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2465-2477.

DOI: 10.12677/pm.2023.139253

Keywords

Age Structure, Vaccination, Isolation, Basic Regeneration Number, Stability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传染病是人类历史上极易造成重大伤亡的疾病, 近年来, 艾滋病、肺结核、麻疹等疾病从未淡出过人们的视野, 这就警示我们, 传染病一直存在, 我们必须不断提出新的方法来面对新出现或者反复出现的传染病。年龄是研究传染病模型中的重要因素, 最早建立和研究年龄结构的流行病模型是 Hoppenstendt [1]。此后, 研究年龄结构的流行病模型的工作不断出现, 大多数作者讨论的是 SIS, SIR, SEIR 模型 [2] [3] [4] [5] [6]。在突发传染病暴发的早期阶段, 非药物预防和控制措施往往在遏制疾病传播和暴发方面发挥着关键作用。隔离是发现传染病病人或疑似者, 将其安置在一定场所, 使之不与易感人群接触的一种措施。隔离是控制传染源的重要措施之一。隔离的方式, 应根据疾病的传播途径而定。某些传染病可在家隔离, 如麻疹等, 有些则应在临时隔离室或住院隔离, 许多学者在模型中考虑了隔离措施, 从而让模型更加符合实际情况 [7] [8] [9] [10]。文献 [7] 中提出了一类具有接种和隔离治疗的肺结核模型, 研究了模型的全局稳定性。文献 [8] 中研究了易感人群软隔离行为对 COVID-19 在武汉的传播影响。文献 [9] 中研究了由确诊病例驱动跟踪隔离的时滞传染病数学模型。文献 [10] 中研究了具有隔离和不完全治疗的传染病模型的全局稳定性。受以上文章启发, 加入了年龄结构, 研究了具有疫苗接种和隔离的年龄结构 SVIQR 传染病模型, 相比传统的模型, 更加具有实际意义。

2. 模型建立

本文将所研究的人群分为五类, 分别为易感者类、疫苗接种类、染病者类、隔离者类和康复者类, 并用 $S(a,t), V(a,t), I(a,t), Q(a,t), R(a,t)$ 表示在 t 时年龄 a 易感者类、疫苗接种者类、染病者类、隔离者类和康复者类的年龄分布函数。种群的全体成员的年龄分布函数为 $N(a,t)$, 即

$N(a,t) = S(a,t) + V(a,t) + I(a,t) + Q(a,t) + R(a,t)$, 根据传染病建模方法, 建立如下具有年龄结构的传染病模型,

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{\partial S}{\partial t} = -S(a,t) \int_0^{a^+} \frac{\beta(a,a')I(a',t)}{N(a',t)} da' - \mu(a)S(a,t) - \delta(a)S(a,t), \\ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial t} = \delta(a)S(a,t) - [\mu(a) + m]V(a,t), \\ \frac{\partial I}{\partial a} + \frac{\partial I}{\partial t} = S(a,t) \int_0^{a^+} \frac{\beta(a,a')I(a',t)}{N(a',t)} da' - [\mu(a) + \rho(a) + \sigma(a)]I(a,t), \\ \frac{\partial Q}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \rho(a)I(a,t) - [\mu(a) + \gamma(a)]Q(a,t), \\ \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial t} = \gamma(a)Q(a,t) + mV(a,t) + \sigma(a)I(a,t) - \mu(a)R(a,t), \end{cases} \quad (1)$$

初值条件

$$S(a,0) = S_0(a), V(a,0) = V_0(a), I(a,0) = I_0(a), Q(a,0) = Q_0(a), R(a,0) = R_0(a),$$

边界条件

$$S(0,t) = A, V(0,t) = 0, I(0,t) = 0, Q(0,t) = 0, R(0,t) = 0.$$

各参数表示的意义如下表 1:

Table 1. Each parameter and its significance

表 1. 各参数及意义

参数	意义
$\mu(a)$	年龄依赖自然死亡率
$\delta(a)$	年龄依赖疫苗接种率
m	接种疫苗者的恢复率
$\gamma(a)$	年龄依赖隔离者恢复率
$\rho(a)$	年龄依赖隔离率
$\sigma(a)$	年龄依赖恢复率
A	初始人口
$\beta(a,b)$	年龄 b 的染病者与年龄 a 的易感者接触而被感染的概率
$k(a)$	通过与年龄 a 的传染性个体接触而被感染的平均概率

基本假设

- 1) 具有一定的初始人口;
- 2) 不考虑因病死亡;
- 3) 接种疫苗之后不在染病。

为了简化系统(1), 对系统(1)进行归一变换, 令

$$s(a,t) = \frac{S(a,t)}{N(a,t)}, v(a,t) = \frac{V(a,t)}{N(a,t)}, i(a,t) = \frac{I(a,t)}{N(a,t)}, q(a,t) = \frac{Q(a,t)}{N(a,t)}, r(a,t) = \frac{R(a,t)}{N(a,t)}.$$

则系统(1)变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} + \frac{\partial s}{\partial t} = -[\lambda(a,t) + \delta(a)]s(a,t), \\ \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t} = \delta(a)s(a,t) - mv(a,t), \\ \frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial i}{\partial t} = \lambda(a,t)s(a,t) - [\rho(a) + \sigma(a)]i(a,t), \\ \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = \rho(a)i(a,t) - \gamma(a)q(a,t), \\ \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial r}{\partial t} = \gamma(a)q(a,t) + mv(a,t) + \sigma(a)i(a,t), \end{cases} \quad (2)$$

初始条件

$$s(a,0) = \frac{S_0(a)}{N_0(a)} = s_0(a), v(a,0) = \frac{V_0(a)}{N_0(a)} = v_0(a), i(a,0) = \frac{I_0(a)}{N_0(a)} = i_0(a),$$

$$q(a,0) = \frac{Q_0(a)}{N_0(a)} = q_0(a), r(a,0) = \frac{R_0(a)}{N_0(a)} = r_0(a),$$

边界条件

$$s(0,t) = 1, v(0,t) = 0, i(0,t) = 0, q(0,t) = 0, r(0,t) = 0,$$

其中

$$\lambda(a,t) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a') i(a',t) da'.$$

可以获得

$$s(a,t) + v(a,t) + i(a,t) + q(a,t) + r(a,t) = 1.$$

3. 无病平衡点的存在性和稳定性

3.1. 无病平衡点的存在性

当系统(2)达到稳定的年龄分布时, s, v, i, q, r 只与年龄 a 有关, 所以系统变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{ds}{da} = -[\lambda(a) + \delta(a)]s(a), \\ \frac{dv}{da} = \delta(a)s(a) - mv(a), \\ \frac{di}{da} = \lambda(a)s(a) - [\rho(a) + \sigma(a)]i(a), \\ \frac{dq}{da} = \rho(a)i(a) - \gamma(a)q(a), \\ \frac{dr}{da} = \gamma(a)q(a) + mv(a) + \sigma(a)i(a), \end{cases} \quad (3)$$

初始条件

$$s(0) = 1, v(0) = 0, i(0) = 0, q(0) = 0, r(0) = 0,$$

其中

$$\lambda(a) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a') i(a') da'.$$

r 在上面 4 个方程均为出现, 所以只考虑前 4 个方程, 得到其无病平衡点

$$E^0 = (s^0(a), v^0(a), i^0(a), q^0(a)).$$

显然, $i^0(a) = q^0(a) = 0,$

$$s^0(a) = e^{-\int_0^a \delta(s) ds}, v^0(a) = \int_0^a \delta(\tau) e^{-\int_0^\tau \delta(\xi) d\xi} e^{-\int_\tau^a m ds} d\tau.$$

综上, 我们可知无病平衡点存在且唯一, 即 $E^0 = (s^0(a), v^0(a), 0, 0)$ 。

3.2. 无病平衡点的局部稳定性

为了研究无病平衡点的局部稳定性, 我们对系统(3)进行平移变换, 令

$$s(a,t) = s^0(a) + \bar{s}(a,t), v(a,t) = v^0(a) + \bar{v}(a,t),$$

$$i(a,t) = i^0(a) + \bar{i}(a,t), q(a,t) = q^0(a) + \bar{q}(a,t).$$

则系统变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{s}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\bar{\lambda}(a,t)\bar{s}(a,t) - \delta(a)\bar{s}(a,t) - \bar{\lambda}(a,t)s^0(a), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \delta(a)\bar{s}(a,t) + \delta(a)s^0(a) - m\bar{v}(a,t) - mv^0(a), \\ \frac{\partial \bar{i}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{i}}{\partial t} = \bar{\lambda}(a,t)\bar{s}(a,t) + \bar{\lambda}(a,t)s^0(a) - [\rho(a) + \sigma(a)]\bar{i}(a,t), \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \rho(a)\bar{i}(a,t) - \gamma(a)\bar{q}(a,t), \end{cases} \tag{4}$$

边界条件

$$\bar{s}(0,t) = 0, \bar{v}(0,t) = 0, \bar{i}(0,t) = 0, \bar{q}(0,t) = 0,$$

其中

$$\bar{\lambda}(a,t) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a') \bar{i}(a',t) da'.$$

系统(4)线性部分如下

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{s}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\delta(a)\bar{s}(a,t) - \bar{\lambda}(a,t)s^0(a), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \delta(a)\bar{s}(a,t) - m\bar{v}(a,t), \\ \frac{\partial \bar{i}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{i}}{\partial t} = \bar{\lambda}(a,t)s^0(a) - [\rho(a) + \sigma(a)]\bar{i}(a,t), \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \rho(a)\bar{i}(a,t) - \gamma(a)\bar{q}(a,t), \end{cases} \tag{5}$$

边界条件 $\bar{s}(0,t) = 0, \bar{v}(0,t) = 0, \bar{i}(0,t) = 0, \bar{q}(0,t) = 0$.

考虑系统(5)的指数解形式, 令

$$\bar{s}(a,t) = \bar{s}(a)e^{\lambda t}, \bar{v}(a,t) = \bar{v}(a)e^{\lambda t}, \bar{i}(a,t) = \bar{i}(a)e^{\lambda t}, \bar{q}(a,t) = \bar{q}(a)e^{\lambda t}.$$

则系统(5)变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{d\bar{s}}{da} = -\hat{\lambda}(a)s^0(a) - [\delta(a) + \lambda]\bar{s}(a), \\ \frac{d\bar{v}}{da} = \delta(a)\bar{s}(a) - [\lambda + m]\bar{v}(a), \\ \frac{d\bar{i}}{da} = \hat{\lambda}(a)s^0(a) - [\lambda + \rho(a) + \sigma(a)]\bar{i}(a), \\ \frac{d\bar{q}}{da} = \rho(a)\bar{i}(a) - \gamma(a)\bar{q}(a), \end{cases} \tag{6}$$

初始条件 $\bar{s}(0) = 0, \bar{v}(0) = 0, \bar{i}(0) = 0, \bar{q}(0) = 0$,

其中

$$\hat{\lambda}(a) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a') \bar{i}(a') da'.$$

解系统(6)可以得

$$\begin{cases} \bar{s}(a) = -\int_0^a \hat{\lambda}(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\lambda + \delta(s)] ds} d\tau, \\ \bar{v}(a) = \int_0^a [\delta(\tau) \bar{s}(\tau)] e^{-\int_{\tau}^a (\lambda + m) ds} d\tau, \\ \bar{i}(a) = \int_0^a \hat{\lambda}(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\lambda + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau, \\ \bar{v}(a) = \int_0^a [\rho(\tau) \bar{i}(\tau)] e^{-\int_{\tau}^a \gamma(s) ds} d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

令 $\Lambda = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \bar{i}(a) da$, 有 $\hat{\lambda}(a) = \Lambda k(a)$ 。

将 $\bar{i}(a)$ 的表达式代入, 可以获得

$$\Lambda = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a \Lambda k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\lambda + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da.$$

产生以下关于 λ 的特征方程

$$1 = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\lambda + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da.$$

利用 $F(\lambda)$ 来表示右侧

$$F(\lambda) = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\lambda + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da.$$

基本再生数指的是一个病人在平均患病期内所传染的人数, 是考量病毒能否流行的指标性因素, 可以将基本再生数定义为 $R_0 = F(0)$, 即

$$R_0 = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da. \quad (8)$$

对于无病平衡点 E^0 的局部稳定性, 我们有以下结果。

定理 1 如果 $R_0 < 1$, E^0 是局部稳定的。如果 $R_0 > 1$, E^0 是不稳定的。

证明 从 $F(\lambda)$ 的表达式中, 可以得到以下的性质

$$F'(\lambda) < 0, \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = +\infty, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0.$$

则存在唯一的实根 λ^* , 使得 $F(\lambda^*) = 1$ 。

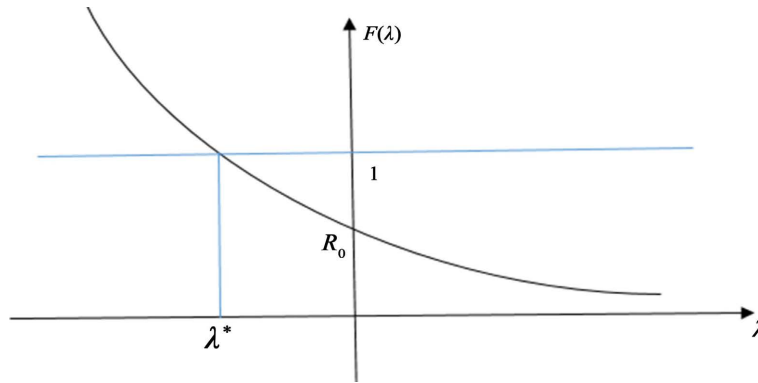


Figure 1. The approximate graph of $F(\lambda)$

图 1. $F(\lambda)$ 的近似图

情况一 $F(\lambda)=1$ 有一个实根。如果 $R_0 < 1$, 即 $F(0) < 1$, 则 $\lambda^* < 0$ 。因此, 如果 $R_0 < 1$, $F(\lambda^*)=1$ 有唯一的负实根。

情况二 $F(\lambda)=1$ 有一个复根。令 $\lambda = \alpha + \beta i$ 是满足 $F(\lambda)=1$ 的根。则 $\operatorname{Re} F(\lambda)=1$, $\operatorname{Im} F(\lambda)=0$, 并且

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(e^\lambda) &= \operatorname{Re}(e^{\alpha+\beta i}) = \operatorname{Re}[e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)] = e^\alpha \cos \beta \leq e^\alpha = e^{\operatorname{Re} \lambda}, \\ F(\lambda) &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_\tau^a [\lambda + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da \\ &\leq \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-[\operatorname{Re} \lambda(a-\tau)]} e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da = F(\operatorname{Re} \lambda).\end{aligned}$$

所以, 可以获得

$$1 \leq F(\operatorname{Re} \lambda) \Leftrightarrow F(\lambda^*) \leq F(\operatorname{Re} \lambda) \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda^* < 0.$$

$F(\lambda)$ 的近似图如图 1 所示, 因此, 若 $F(\lambda^*)=1$ 有一个复根, 则复根必须要有负实部。从以上可知, 当 $R_0 < 1$ 时, $F(\lambda^*)=1$ 总有负实部, 即 E_0 是局部稳定的。反之, 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的。

3.3. 无病平衡点的全局稳定性

在本节中讨论了当 $R_0 < 1$ 时无病稳态 E_0 的全局稳定性, 并得到如下结果。

定理 2 如果 $R_0 < 1$, 则无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 只需要证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 下列极限成立

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} s(a, t) = s^0(a) = e^{-\int_0^a \delta(\tau) d\tau}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(a, t) = v^0(a) = \int_0^a \delta(\tau) s(\tau) e^{-\int_\tau^a m ds} d\tau, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} i(a, t) = i^0(a) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} q(a, t) = q^0(a) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

利用特征线法求解 $s(a, t), v(a, t), i(a, t), q(a, t)$ 。因为我们想研究 $t \rightarrow \infty$ 时的解, 所以只考虑当 $t > a$ 时的解。可以得到

$$\begin{cases} s(a, t) = e^{-\int_0^a [\lambda(\tau+t-a, \tau) + \delta(\tau)] d\tau}, \\ v(a, t) = \int_0^a \delta(\tau) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_\tau^a m ds} d\tau, \\ i(a, t) = \int_0^a \lambda(\tau+t-a) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau, \\ q(a, t) = \int_0^a \rho(\tau) i(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_\tau^a \gamma(s) ds} d\tau. \end{cases} \quad (10)$$

当 $t > a$ 时, 将 $s(a, t)$ 的表达式代入 $i(a, t)$, 可以获得

$$i(a, t) = \int_0^a \lambda(\tau+t-a) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau.$$

令 $\chi(t) = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i(t, a) da$, 则 $\lambda(a, t)$ 可以表示为

$$\lambda(a, t) = k(a) \chi(t).$$

将 $i(a, t)$ 代入 $\chi(t)$ 中, 可以获得

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a \lambda(\tau+t-a) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} d\tau da \\ &= \int_0^t \tilde{\beta}(a) \int_0^a \lambda(\tau+t-a) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} d\tau da + \int_t^{a^+} \tilde{\beta}(a) i(t, a) da. \end{aligned}$$

显然, 当 t 很大时, 上面最后一项为零。

此外, 由于 $\lambda(a, t) > 0$, 所以

$$s(\tau+t-a, \tau) = e^{-\int_0^a [\lambda(\tau+t-a, \tau) + \delta(\tau)] d\tau} \leq e^{-\int_0^a \delta(\tau) d\tau} = s^0(\tau)。$$

因此

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) \chi(\tau+t-a) s(\tau+t-a, \tau) e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} d\tau da \\ &\leq \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} s^0(\tau) k(\tau) \chi(\tau+t-a) d\tau da. \end{aligned}$$

又因为

$$R_0 = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} k(\tau) s^0(\tau) d\tau da,$$

对 $\chi(t)$ 两边取极限可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \chi(t) \leq R_0 \limsup_{t \rightarrow \infty} \chi(t),$$

当 $R_0 < 1$ 时

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0。$$

因为 $\chi(t) \geq 0$, $\chi(t) = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i(t, a) da$, 可以获得

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} i(a, t) &= 0 = i^0(a), \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} q(a, t) &= 0 = q^0(a). \end{aligned}$$

把 $s(t, a)$ 的表达式代入得

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t, a) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^a [\lambda(\tau+t-a, \tau) + \delta(\tau)] d\tau} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^a [k(\xi) \chi(\xi+t-a) + \delta(\xi)] d\xi} \\ &= e^{-\int_0^a \delta(\xi) d\xi} = s^0(a), \end{aligned}$$

同理 $\limsup_{t \rightarrow \infty} v(t, a) = v^0(a)$ 。

即 $R_0 < 1$, 则无病平衡点 E^0 是全局渐近稳定的。

4. 地方病平衡点的存在性和稳定性

4.1. 地方病平衡点的存在性

定理 3 如果 $R_0 > 1$, 则系统存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (s^*(a), v^*(a), i^*(a), q^*(a))$ 。

证明 当系统达到稳定的年龄分布时, 系统只与年龄有关, 则系统 (2) 的稳态解满足如下形式

$$\begin{cases} \frac{ds^*}{da} = -[\lambda^*(a) + \delta(a)]s^*(a), \\ \frac{dv^*}{da} = \delta(a)s^*(a) - mv^*(a), \\ \frac{di^*}{da} = \lambda^*(a)s^*(a) - [\rho(a) + \sigma(a)]i^*(a), \\ \frac{dq^*}{da} = \rho(a)i^*(a) - \gamma(a)q^*(a), \end{cases} \quad (11)$$

初始条件 $s^*(0) = 1, v^*(0) = 0, i^*(0) = 0, q^*(0) = 0$, 其中 $\lambda^*(a) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i^*(a) da = k(a) \Lambda^*$, $\Lambda^* = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i^*(a) da$ 。

系统 (11) 的解为

$$\begin{cases} s^*(a) = e^{-\int_0^a \lambda(\tau) + \delta(\tau) d\tau}, \\ v^*(a) = \int_0^a \delta(\tau) s^*(\tau) e^{-\int_\tau^a m ds} d\tau, \\ i^*(a) = \Lambda^* \int_0^a k(\tau) e^{-\int_0^a [k(\tau)\Lambda^* + \delta(\tau)] d\tau} e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau, \\ q^*(a) = \int_0^a \rho(\tau) i^*(\tau) e^{-\int_\tau^a \gamma(s) ds} d\tau. \end{cases} \quad (12)$$

由此可见, 当 $\Lambda^* = 0$ 时, 地方病平衡点 $E^* = (s^*(a), v^*(a), i^*(a), q^*(a))$ 转变为无病平衡点 $E^0 = (s^0(a), v^0(a), i^0(a), q^0(a))$ 。

将 $i^*(a)$ 的表达式代入 $\Lambda^* = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i^*(a) da$, 又因为 $\Lambda^* \neq 0$, 可得

$$1 = \int_0^a k(\tau) e^{-\int_0^a [k(\tau)\Lambda^* + \delta(\tau)] d\tau} e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau.$$

用 $H(\Lambda^*)$ 来表示右侧

$$H(\Lambda^*) = \int_0^a k(\tau) e^{-\int_0^a [k(\tau)\Lambda^* + \delta(\tau)] d\tau} e^{-\int_\tau^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau.$$

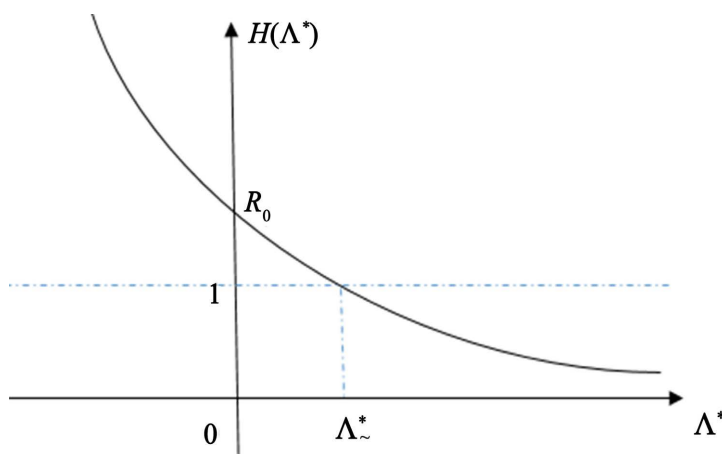


Figure 2. The approximate graph of $H(\Lambda^*)$

图 2. $H(\Lambda^*)$ 的近似图

从 $H(\Lambda^*)$ 的表达式中, 可以得到以下的性质

$$H'(\Lambda^*) < 0, \lim_{\Lambda^* \rightarrow -\infty} H(\Lambda^*) = +\infty, H(0) = 0,$$

$$\lim_{\Lambda^* \rightarrow +\infty} H(\Lambda^*) = \lim_{\Lambda^* \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Lambda^*} \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i^*(a) da \leq \lim_{\Lambda^* \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Lambda^*} \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) da = 0.$$

关于 $H(\Lambda^*)$ 的近似图如图 2 所示, 由此表明, 当 $R_0 > 1$ 时, $H(\Lambda^*) = 1$ 有唯一的正实根 Λ_-^* 。则系统具有唯一的正地方性平衡点 $E^* = (s^*(a), v^*(a), i^*(a), q^*(a))$ 。

4.2. 地方病平衡点的局部稳定性

为了分析 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点的局部稳定性, 还需要讨论在 E^* 处的线性化系统, 令

$$s(a, t) = s^*(a) + \tilde{s}(a, t), v(a, t) = v^*(a) + \tilde{v}(a, t),$$

$$i(a, t) = i^*(a) + \tilde{i}(a, t), q(a, t) = q^*(a) + \tilde{q}(a, t).$$

取其线性部分, 系统变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -\lambda^*(a) \tilde{s}(a, t) - \delta(a) \tilde{s}(a, t) - \tilde{\lambda}(a, t) s^*(a), \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \delta(a) \tilde{s}(a, t) - m \tilde{v}(a, t), \\ \frac{\partial \tilde{i}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{i}}{\partial t} = \lambda^*(a) \tilde{s}(a, t) + \tilde{\lambda}(a, t) s^*(a) - [\rho(a) + \sigma(a)] \tilde{i}(a, t), \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = \rho(a) \tilde{i}(a, t) - \gamma(a) \tilde{q}(a, t), \end{cases} \quad (13)$$

边界条件

$$\tilde{s}(0, t) = 0, \tilde{v}(0, t) = 0, \tilde{i}(0, t) = 0, \tilde{q}(0, t) = 0,$$

其中

$$\tilde{\lambda}(a, t) = k(a) \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \tilde{i}(a, t) da, \lambda^*(a) = k(a) \Lambda_-^*, \Lambda_-^* = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) i^*(a) da.$$

现在考虑系统 (13) 的非零指数解, 令

$$\tilde{s}(a, t) = \tilde{s}(a) e^{\omega t}, \tilde{v}(a, t) = \tilde{v}(a) e^{\omega t}, \tilde{i}(a, t) = \tilde{i}(a) e^{\omega t}, \tilde{q}(a, t) = \tilde{q}(a) e^{\omega t}.$$

则系统变为如下形式

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{s}}{da} = -\omega \tilde{s}(a) - \Lambda_-^* k(a) \tilde{s}(a) - \delta(a) \tilde{s}(a) - \tilde{\lambda} k(a) s^*(a), \\ \frac{d\tilde{v}}{da} = -\omega \tilde{v}(a) + \delta(a) \tilde{s}(a) - m \tilde{v}(a), \\ \frac{d\tilde{i}}{da} = -\omega \tilde{i}(a) - [\rho(a) + \sigma(a)] \tilde{i}(a) + \Lambda_-^* k(a) \tilde{s}(a) + \tilde{\lambda} k(a) s^*(a), \\ \frac{d\tilde{q}}{da} = -\omega \tilde{q}(a) + \rho(a) \tilde{i}(a) - \gamma(a) \tilde{q}(a), \end{cases} \quad (14)$$

初始条件

$$\tilde{s}(0) = 0, \tilde{v}(0) = 0, \tilde{i}(0) = 0, \tilde{q}(0) = 0,$$

其中

$$\tilde{\Lambda} = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \tilde{i}(a) da.$$

因为 $\tilde{\Lambda} \neq 0$, 令 $\hat{s} = \frac{\tilde{s}}{\tilde{\Lambda}}, \hat{v} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{\Lambda}}, \hat{i} = \frac{\tilde{i}}{\tilde{\Lambda}}, \hat{q} = \frac{\tilde{q}}{\tilde{\Lambda}}$. 这个系统变为

$$\begin{cases} \frac{d\hat{s}}{da} = -\omega\hat{s}(a) - \Lambda_-^* k(a)\hat{s}(a) - \delta(a)\hat{s}(a) - k(a)s^*(a), \\ \frac{d\hat{v}}{da} = -\omega\hat{v}(a) + \delta(a)\hat{s}(a) - m\hat{v}(a), \\ \frac{d\hat{i}}{da} = -\omega\hat{i}(a) - [\rho(a) + \sigma(a)]\hat{i}(a) + \Lambda_-^* k(a)\hat{s}(a) + k(a)s^*(a), \\ \frac{d\hat{q}}{da} = -\omega\hat{q}(a) + \rho(a)\hat{i}(a) - \gamma(a)\hat{q}(a), \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$1 = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \hat{i}(a) da.$$

系统(15)的解为

$$\begin{cases} \hat{s}(a) = -\int_0^a e^{-\int_\eta^a [\omega+k(s)\Lambda_-^* + \delta(s)] ds} s^*(\eta) k(\eta) d\eta, \\ \hat{v}(a) = \int_0^a e^{-\int_\eta^a (\omega+m) ds} [\delta(\eta) \hat{s}(\eta)] d\eta, \\ \hat{i}(a) = \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\omega+\rho(s)+\sigma(s)] ds} [\Lambda_-^* k(\eta) \hat{s}(\eta) + k(\eta) s^*(\eta)] d\eta, \\ \hat{q}(a) = \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\omega+\gamma(s)] ds} \rho(\eta) \hat{i}(\eta) d\eta. \end{cases} \quad (16)$$

令 $\varphi(\omega) = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \hat{i}(a) da$, 当 $R_0 > 1$ 时, 我们想要证明 $\varphi(\omega) = 1$ 具有负实部。

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\omega+\rho(s)+\sigma(s)] ds} (\Lambda_-^* k(\eta) \hat{s}(\eta) + k(\eta) s^*(\eta)) d\eta da \\ &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\omega+\rho(s)+\sigma(s)] ds} \left[\tilde{\Lambda} k(\eta) s^*(\eta) - \Lambda_-^* k(\eta) \int_0^\eta e^{-\int_\xi^\eta [\omega+k(s)\Lambda_-^* + \delta(s)] ds} s^*(\xi) k(\xi) d\xi \right] d\eta da, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} (\Lambda_-^* k(\eta) \hat{s}(\eta) + k(\eta) s^*(\eta)) d\eta da \\ &= \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} \left[k(\eta) s^*(\eta) - \Lambda_-^* k(\eta) \int_0^\eta e^{-\int_\xi^\eta [k(s)\Lambda_-^* + \delta(s)] ds} s^*(\xi) k(\xi) d\xi \right] d\eta da. \end{aligned}$$

根据 $H(\Lambda_-^*)$ 的表达式

$$H(\Lambda_-^*) = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a s^*(\eta) k(\eta) e^{-\int_\eta^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} d\eta da = 1.$$

这个 $\varphi(0)$ 可以转变为

$$\varphi(0) = 1 - \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a e^{-\int_\eta^a [\rho(s)+\sigma(s)] ds} \Lambda_-^* k(\eta) \int_0^\eta e^{-\int_\xi^\eta [k(s)\Lambda_-^* + \delta(s)] ds} s^*(\xi) k(\xi) d\xi d\eta da < 1.$$

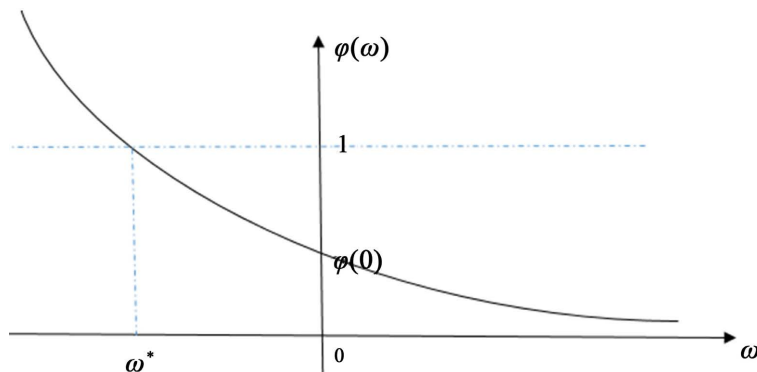


Figure 3. The approximate graph of $\varphi(\omega)$

图 3. $\varphi(\omega)$ 的近似图

由于 $\Lambda_*^* > 0$, 所以

$$\varphi(\omega) < \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a s^*(\eta) k(\eta) e^{-\int_{\eta}^a [\omega + \rho(s) + \sigma(s)] ds} d\eta da \triangleq \psi(\omega).$$

关于 $\varphi(\omega)$ 的近似图如图 3 所示。由于 $\psi(\omega)$ 是单调递减的, 因此对于所有 $\text{Re } \omega > 0$, 有 $\varphi(\omega) < \psi(0) = H(\Lambda_*^*) = 1$, 所以 $\varphi(\omega) = 1$ 只发生在 $\text{Re } \omega < 0$ 的区域。因此, 如果 $R_0 > 1$, 则 $\varphi(\omega) = 1$ 的所有根都有负实部。

定理 4 如果 $R_0 > 1$, 则地方性平衡点 $E^* = (s^*(a), v^*(a), i^*(a), q^*(a))$ 局部渐近稳定。

证明 证明和上述定理 1 证明类似。

5. 总结

本文在文献[5]的基础上对原有模型进行改进, 考虑了隔离类, 并将疫苗接种者列为单独一类进行讨论, 建立了一类具有接种和隔离的年龄结构 SVIQR 传染病模型。分析计算得到模型的基本再生数 $R_0 = \int_0^{a^+} \tilde{\beta}(a) \int_0^a k(\tau) s^0(\tau) e^{-\int_{\tau}^a [\rho(s) + \sigma(s)] ds} d\tau da$ 。证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E^0 不稳定, 此时系统存在地方病平衡点 E^* , 证明了当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定。从基本再生数的表达式可以看出, 隔离率 $\rho(a)$ 或疫苗接种率 $\delta(a)$ 增大, 则基本再生数 R_0 减小, 即隔离和提高疫苗接种率是消除传染病的有效方式。

基金项目

国家自然科学基金(11961039); 甘肃省高等学校青年博士项目(2022QB-056)。

参考文献

- [1] Hoppenstend, F. (1994) An Age-Structured Epidemic Model. *Journal of the Franklin Institute*, **197**, 325-333. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(74\)90037-4](https://doi.org/10.1016/0016-0032(74)90037-4)
- [2] Busenberg, S.N., Iannelli, M. and Thieme, H.R. (1991) Global Behavior of an Age-Structured Epidemic Model. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **22**, 1065-1080. <https://doi.org/10.1137/0522069>
- [3] El-Doma, M. (1999) Analysis of an Age-Dependent SIS Epidemic Model with Vertical Transmission and Proportionate Mixing Assumption. *Mathematical and Computer Modelling*, **29**, 31-43. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(99\)00060-6](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00060-6)
- [4] Li, X.Z., et al. (2001) Threshold and Stability Results for an Age-Structured SEIR Epidemic Model. *Computers and Mathematics with Applications*, **42**, 883-907. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00206-1](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00206-1)

-
- [5] Huang, J.C., Kang, H., Lu, M., Ruan, S.G. and Zhuo, W.T. (2022) Stability Analysis of an Age Structured Epidemic Model with Vaccination and Standard Incidence Rate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **66**, Article ID: 103525. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103525>
- [6] 徐文达, 许李灿, 于非凡, 刘素莉. SEI_1I_2QR 传染病模型的动力学分析与应用[J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(3): 443-448.
- [7] 霍海峰, 邹明轩. 一类具有接种和隔离治疗的结核病模型的稳定性[J]. 兰州理工大学学报, 2016, 42(3): 150-154.
- [8] 张菊平, 李云, 姚美萍, 张娟, 朱怀平, 靳祯. 武汉市 COVID-19 疫情与易感人群软隔离强度关系分析[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 162-173.
- [9] 李倩, 肖燕妮, 吴建宏, 唐三一. COVID-19 疫情时滞模型构建与确诊病例驱动的追踪隔离措施分析[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 238-250.
- [10] 丰利香, 王德芬. 具有隔离和不完全治疗的传染病模型的全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(4): 1235-1248.