Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2478-2484
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139254

Hans汉斯

一类带不定位势Kirchoff方程解的存在性

陈林松

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年7月26日；录用日期：2023年8月28日；发布日期：2023年9月4日

摘　要

本文主要研究R^3中一类带不定位势Kirchhoff方程解的存在性，在关于V的一些假设条件和一般的谱假设下，利用变分方法，得到问题解的存在性结果。

关键词

PS条件，Morse指数，Kirchhoff方程，变分方法

Multiplicity Results for a Kirchhoff Type Equations with General Potential

Linsong Chen

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Jul. 26th, 2023; accepted: Aug. 28th, 2023; published: Sep. 4th, 2023

Abstract

In this article, we study a Kirchhoff type equation in R^3 with the potential indefinite in sign. Under certain hypotheses on V and general spectral assumption, we obtain the multiplicity results for this problem via variational methods.

Keywords

Palais-Smale Condition, Morse Index, Kirchhoff Type Equation, Variational Methods

文章引用: 陈林松. 一类带不定位势 Kirchoff 方程解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2478-2484.
DOI: 10.12677/pm.2023.139254

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 简介和主要结论

本文主要研究如下形式的 Kirchhoff 方程解的存在性

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=Q(x)f(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

其中 $a>0,\ b\geq 0$ 为常数。

方程(1.1)是一个重要的非局部拟线性问题，如果 $V(x)=0,\ Q(x)=1$ 且 R^3 被有界区域 $\Omega\subset R^3$ 代替，问题(1.1)导出如下形式的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\left(a+b\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0 & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.2}$$

这是 Kirchhoff 首次引入模型[1]的推广。更确切地说，问题(1.2)与如下方程的静止模拟相关

$$u_{tt}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u), \tag{1.3}$$

它是弹性弦自由振动的经典达朗贝尔波动方程的推广。Kirchhoff 模型考虑了横向震动产生的弦长变化，在 Lions [2]提出了一个抽象的问题框架后，问题(1.2)受到了广泛的关注。

本文首先假设 $Q(x)$ 和 $V(x)$ 满足以下条件

(*Q*) $\inf_{x\in R^3}Q(x)=Q_0>0$，其中 Q_0 是一个正常数，并且存在一个正常数 $0<\alpha\leq 1$，使得 $\sup_{x\in R^3}Q(x)\leq\alpha$。

(V_1) $V\in L^q_{loc}(R^3)$ 是实函数，定义 $V^-:=-\min\{V,0\}\in L^\infty(R^3)\cap L^q(R^3)$ 对于 $q\geq 2$ 成立。

由条件(V_1)可知 Schröding 算子 $A:=-a\Delta+V$ 在 $L^2(R^3)$ 是有界的自伴算子(见[8] [9])。定义 $\sigma(A)$ 为算子 A 的谱，$\sigma_{ess}(A)$ 为算子 A 的本质谱，$\sigma_d(A)$ 为算子 A 的纯点谱，进一步，作如下的谱假设：

(V_2) $\gamma:=\inf\sigma(A)$，$\beta:=\inf\sigma_{ess}(A)$，$-\infty<\gamma<\beta$，其中 $\beta>0$。

设非线性项 f 满足

(f_1) $f\in C(R^3\times R)$，且 $\dfrac{f(x,u)}{u}$ 是 $R^3\times(R\setminus\{0\})$ 上的有界函数。

(f_2) $f^*:=\limsup_{|x|\to+\infty}\sup_{u\neq 0}\dfrac{f(x,u)}{u}<\beta$。

显然，当(f_1)满足时，条件(f_2)有意义，定义如下集合：

$$\Lambda:=\left\{B(x)\middle|B(x)\text{是有界连续实函数，}B^*:=\limsup_{|x|\to+\infty}B(x)<\beta\right\} \tag{1.4}$$

设存在 $B_1(x)$，$B_2(x)\in\Lambda$ 使得

(f_3) $f(x,u)=B_1(x)u+o(|u|)$ 当 $u\to 0$，对几乎处处 $x\in R^3$ 一致成立。

(f_4) $f(x,u)=B_2(x)u+R_u(x,u)$，且对任意 $(x,u)\in R^3\times R$，都有 $R(x,u)\leq 0$，其中 $R(x,u)=\int_0^u R_u(x,t)\mathrm{d}t$。

对任意 $B\in\Lambda$，都存在整数对 $(i(B),\nu(B))$ 与如下的线性 Schröding 系统相关联

$$-a\Delta u+V(x)u=B(x)u,\quad x\in R^3.$$

其中$i(B)$被称为B的指数函数，$\nu(B)$被称为B的零化度。定义

$$\nu(B)=\ker(-a\Delta+V-B).$$

指数函数$i(B)$可以被定义为算子$-a\Delta+V-B$负本征空间的维数。那么，$i(B)$是非增函数，文章在第二部分提出了一些关于B的性质，更多详细内容可以参考文献[1]。

考虑问题(1.1)解的存在性，本文有如下的主要结论：

定理 1.1 假设条件(Q)，(V_1)，(V_2)和(f_1)~(f_4)满足，则问题(1.1)至少存在一个非平凡解。

在研究哈密顿系统的周期解时，指数理论得到了广泛的应用(见[2] [3] [4])，本文介绍的分类理论与上述的指标理论有很大的相关性，从理论上来说，本文的分类结构与文献([2] [3] [4])中提到的又有所不同，由于基本谱的出现，还需要克服更多复杂的问题。

考虑到 Rayleigh-Ritz 商的标准定义和结果，定义极小极大序列

$$\lambda_n:=\inf_{Y_n}\sup_{u\in Y_n\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^3}\left(a|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x},$$

其中Y_n定义为$C_0^\infty(R^3)$的n-维子空间族，那么

$$\lambda_\infty:=\lim_{n\to\infty}\lambda_n.$$

如果λ_∞是有限数，进一步有，

$$\lambda_\infty=\inf\sigma_{ess}(A),$$

由不等式$\lambda_n<\lambda_\infty$可知$\lambda_n\in\sigma_d(A)$。因此，假设$\lambda_\infty>0$，易知 Schröding 算子A满足条件(V_2)。

当$\lambda_k<0\le\lambda_{k+1}$，问题(1.1)已经取得了一些解的存在性结果，在文章([5] [6] [7])中，作者通过 Clark 定理、三临界点定理以及 Clark 定理的变体形式研究了两个非平凡解和无穷多平凡解的存在性。

2. 简介和主要结论

通常情况下，令$L^p(R^3)$为标准的L^p空间，其中$1\le p<\infty$，且定义范数为

$$|u|_p=\left(\int_{R^3}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\qquad u\in L^p(R^3).$$

令$H^1(R^3)$，$D^{1,2}(R^3)$为通常的 Sobblev 空间，定义范数为

$$\|u\|_{H^1(R^3)}=\left(\int_{R^3}\left[|\nabla u|^2+u^2\right]\mathrm{d}x\right)^{1/2},\quad \|u\|_{D^{1,2}(R^3)}=\left(\int_{R^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

由于 0 是至多有限重特征值，假设$0\in\sigma(A)$。那么根据谱性质(V_2)，可以得到如下的正交分解

$$L^2=L^-\oplus L^+,\quad u=u^-+u^+.$$

使得A在L^-空间上为负定的，在L^+空间上为正定的。定义算子A的绝对值为$|A|$，令$E=D\left(|A|^{1/2}\right)$为 Hilbert 空间，并且定义内积为

$$(u,v)=\left(|A|^{1/2}u,|A|^{1/2}v\right)_2,$$

那么其中的范数为

$$\|u\| = (u,u)^{1/2},$$

其中$(\cdot\cdot)_2$为通常的L^2-范数。一般地可以把E空间正交分解为

$$E := E^- \oplus E^+.$$

其中

$$E^\pm = E \cap L^\pm,$$

那么E连续嵌入到$H^1(R^3)$，则E连续嵌入到$L^p(R^3)$对于$p\in[2,6]$。

问题(1.1)具有如下形式的能量泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)F(x,u)dx, \quad u\in E. \tag{1.5}$$

其中

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt,$$

并且，I是E中的C^1泛函，以及I的导函数为

$$(I'(u),v) = (u^+,v^+) - (u^-,v^-) + b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^3}Q(x)f(x,u)v dx. \tag{1.6}$$

由变分原理可知问题(1.1)的弱解为能量泛函I的临界点。

回忆在(1.4)定义的Λ，定义如下形式的二次型

$$q_B(u,v) = \frac{1}{2}(u^+,v^+) - \frac{1}{2}(u^-,v^-) - \frac{1}{2}(Bu,v)_2, \quad \forall u,v\in E. \tag{1.7}$$

q_B的欧拉方程为

$$-a\Delta u + V(x)u + B(x)u = 0.$$

为了研究I的临界点，需要利用文献[8]中提到的临界点理论。

定义 2.1 称$I\in C^1(E,R)$满足$(PS)_c$条件，如果E中任意序列$\{u_n\}$使得

$$I(u_n)\to c, \quad I'(u_n)\to 0, \quad \text{当 } n\to\infty,$$

都有收敛的子列。

命题 2.2 ([9]) 1)空间E可以被分解为三个子空间

$$E = E^+(B)\oplus E^0(B)\oplus E^-(B)$$

使得q_B分别在$E^+(B)$，$E^0(B)$，$E^-(B)$是正定的，零，负定的。此外，$E^0(B)$和$E^-(B)$为有限维子空间。

1) 定义$i(B)=\dim E^-(B)$，$\nu(B)=\dim E^0(B)$。称$i(B)$为B的指数，$\nu(B)$为B的零化度。$i(B)=\sum_{\lambda<0}\nu(B+\lambda)$，其中$i(B)$是$q_B$在$E$中的Morse指数；$\nu=\ker\dim(A-B)$。

2) 对任意B_m，$B_n\in\Lambda$，当$B_m<B_n$时，都有

$$i(B_n)-i(B_m) = \sum_{\lambda\in[0,1)}\nu\left(B_m+\lambda(B_n-B_m)\right).$$

3) 存在ε_0使得对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，都有

$$\nu(B+\varepsilon) = 0 = \nu(B-\varepsilon),$$
$$i(B-\varepsilon) = i(B),$$
$$i(B+\varepsilon) = i(B)+\nu(B).$$

4) $\left(-q_B(u,u)\right)^{1/2}$ 是 $E^-(B)$ 上的等价范数，且存在 $c>0$ 使得

$$\left(q_B(u,u)\right)^{1/2} \ge c\|u\|^2, \quad \forall u \in E^+(B).$$

3. 主要结论的证明

为了完成定理的证明，需要以下的引理：

引理 3.1 假设(V_1)，(V_2)，(Q)和(f_4)满足，则泛函 I 是强制的，即

$$I(u) \to +\infty, \quad \text{当}\|u\| \to +\infty$$

证明：假设结论不正确，则可以选择序列 $\{u_n\} \subset E$，以及 $M>0$ 使得 $I(u_n) \le M$，当 $\|u_n\| \to +\infty$ 时。令 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$，则有 $\|v_n\| = 1$，由条件(Q)和(f_4)，易知存在 $B_\infty \in \Lambda$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{M}{\|u_n\|^2} &\ge \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} Q(x) F(x,u_n) \mathrm{d}x}{\|u_n\|^2} + \frac{b\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2}{4\|u_n\|^2} \\ &= q_{B_\infty}(v_n, v_n) - \frac{\int_{\mathbb{R}^3} Q(x) R(x,u_n) \mathrm{d}x}{\|u_n\|^2} + \frac{b\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2}{4\|u_n\|^2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

根据 $R(x,u_n) \le 0$，因此

$$o(1) \ge q_{B_\infty}(v_n, v_n).$$

由 Λ 集的定义以及命题 2.2(iv)，选择足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_\infty + \varepsilon \in \Lambda$，$\nu(B_\infty + \varepsilon) = 0$。此外，容易计算得出

$$q_{B_\infty+\varepsilon}(v_n, v_n) = q_{B_\infty}(v_n, v_n) - \frac{\varepsilon}{2}|v_n|_2^2 \le o(1) \tag{1.9}$$

由命题 2.2 以及 $\nu(B_\infty + \varepsilon) = 0$，有如下的关于 v_n 的 $q_{B_\infty+\varepsilon}$-正交分解

$$v_n = v_{n,1} + v_{n,2} \in E^-(B_\infty + \varepsilon) \oplus E^+(B_\infty + \varepsilon),$$

和

$$q_{B_\infty+\varepsilon}(v_n, v_n) = q_{B_\infty+\varepsilon}(v_{n,1}, v_{n,1}) + q_{B_\infty+\varepsilon}(v_{n,2}, v_{n,2}).$$

则，由(1.9)可知

$$-q_{B_\infty+\varepsilon}(v_{n,1}, v_{n,1}) + o(1) \ge q_{B_\infty+\varepsilon}(v_{n,2}, v_{n,2}).$$

显然 $\|v_n\| = 1$，则在 E 中可设 $v_n \rightharpoonup v$，因为 $\dim E^-(B_\infty + \varepsilon) < +\infty$，则有 $v_{n,1} \to v_1$，$v_{n,2} \rightharpoonup v_2$。

断言 $v_1 \ne 0$，如果 $v_1 = 0$，则 $v_{n,1} \to 0$ 在 E 中，以及 $q_{B_\infty+\varepsilon}(v_{n,1}, v_{n,1}) \to 0$。根据命题 2.2(v)，存在常数 c 使得

$$q_{B_\infty}(v_{n,2}, v_{n,2}) \ge c\|v_{n,2}\|^2,$$

这就意味着 $v_{n,2} \to v_2 = 0$，$v_n \to 0$。这是与 $\|v_n\| = 1$ 矛盾的。因此，$v_1 \neq 0$ 和 $v \neq 0$。由 Fatou 引理，设 $n \to \infty$ 可得

$$
\begin{aligned}
o(1) &= \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^4} \\
&= \frac{q_{B_\infty}(u_n, u_n) - \int_{\mathbb{R}^3} Q(x) R(x, u_n) \mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2}{\|u_n\|^4} \\
&\geq o(1) + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \\
&> 0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

这是矛盾的，假设不成立，则引理得证。

引理 3.2 设条件(V_1)，(V_2)，(Q)，以及(f_1)~(f_3)满足，则存在 $\varepsilon, \rho > 0$ 以及 $B_0(x) \in \Lambda$ 使得

$$
\sup_{E^-(B_0 - \varepsilon) \cap S_\rho} I(u) < 0.
$$

证明：由(f_3)可得

$$
f(x,u) = B_1(x) u + f_1(x,u)
$$

且

$$
f_1(x,u) = o(|u|)
$$

当 $|u| \to 0$ 几乎处处对 $x \in R^3$ 一致成立，设

$$
F_1(x,u) = \int_0^u f_1(x,t) \mathrm{d}t.
$$

固定 $s \in (2,6)$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$
f_1(x,u) \geq -\varepsilon u - C_\varepsilon |u|^{s-1},
$$

这就意味着

$$
F_1(x,u) \geq -\frac{\varepsilon}{2}|u|^2 - \frac{C_\varepsilon}{s}|u|^s.
$$

由 $E \to L^s(R^3)$ 是连续嵌入，则存在依赖于 s 的正常数 C_ε^*，使得

$$
\int_{R^3} F_1(x,u) \mathrm{d}x \geq -\frac{\varepsilon}{2}|u|_2^2 - C_\varepsilon^* \|u\|^s.
$$

令 $B_0(x) = Q(x) B_1(x)$，则 $B_0(x) \in \Lambda$。注意到 $E^-(B_0 - \varepsilon)$ 为有限维，由命题 2.2(v)，存在常数 c_1，c_2 使得

$$
c_1 \|u\|^2 \leq -q_{B_0 - \varepsilon}(u,u) \leq c_2 \|u\|^2.
$$

因为在有限维空间中所有范数都是等价的，则存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $u \in E^-(B_0 - \varepsilon)$，都有

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} Q(x) F(x,u) \mathrm{d}x \\
&\leq q_{B_0 - \varepsilon}(u,u) + \frac{b}{4}|\nabla u|_2^4 + C_\varepsilon^* \|u\|^s \\
&\leq -c_1 \|u\|^2 + C\|u\|^4 + C_\varepsilon^* \|u\|^s.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

因此，通过选取足够小的$\rho>0$可以使得引理成立。

定理 1.1 的证明 由引理 3.1 可知I是强制的，那么I是下方有界的；由引理 3.2 可知$\inf_E I<0$，下需证I是弱下半连续的。令$u_n \rightharpoonup u$，由q_{B_∞}-分解，设

$$u_n = u_{n,1} + u_{n,2} \in E^-\left(B_\infty\right) \oplus E^+\left(B_\infty\right)$$
$$u_{n,1} \to u_1, \qquad u_{n,2} \rightharpoonup u_2.$$

根据 Fatou 引理，可得

$$\liminf_{n\to\infty} q_{B_\infty}\left(u_{n,2},u_{n,2}\right) \ge q_{B_\infty}\left(u_2,u_2\right).$$

以及

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} I\left(u_n\right) &= \liminf_{n\to\infty}\left\{q_{B_\infty}\left(u_{n,1},u_{n,1}\right)+q_{B_\infty}\left(u_{n,2},u_{n,2}\right)+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u_n\right|^2 dx\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}B_\infty u_n^2-Q\left(x\right)F\left(x,u_n\right)\right)\mathrm{d}x\right\}\\ &\ge q_{B_\infty}\left(u_1,u_1\right)+q_{B_\infty}\left(u_2,u_2\right)+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x\right)^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}B_\infty u^2-Q\left(x\right)F\left(x,u\right)\mathrm{d}x\\ &= I\left(u\right)\end{aligned}$$

因此，I是弱下半连续的，由经典的变分原理可知，存在$u\in E$使得

$$I\left(u\right)=\inf_E I<0.$$

那么全局最小值点就是问题(1.1)的一个非平凡解。

参考文献

[1] Kirchhoff, G. and Hensel, K. (1883) Vorlesungen Über Mathematische Physik. Druck und Verlag von BG Teub-ner.

[2] Lions, J.L. (1978) On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. *North-Holland Mathematics Studies*, **30**, 284-346. https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70870-3

[3] Dong, Y. (2010) Index Theory for Linear Self-Adjoint Operator Equations and Nontrivial Solutions for Asymptotically Linear Operator Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **38**, 75-109. https://doi.org/10.1007/s00526-009-0279-5

[4] Long, Y. (2002) Index Theory for Symplectic Paths with Applications. In: *Progress in Mathematics*, Vol. 207, Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8175-3

[5] Jiang, S.L. (2022) Multiple Solutions for Schrödinger-Kirchhoff Equations with Indefinite Potential. *Applied Mathematics Letters*, **124**, Article ID: 107672. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107672

[6] Liu, H. and Chen, H. (2015) Multiple Solutions for an Indefinite Kirchhoff-Type Equation with Sign-Changing Potential. *Electronic Journal of Differential Equations*, **274**, 1-9.

[7] Wu, Y. and Liu, S. (2015) Existence and Multiplicity of Solutions for Asymptotically Linear Schrödinger-Kirchhoff Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **26**, 191-198. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.05.010

[8] Shan, Y. (2020) Existence and Multiplicity Results for Nonlinear Schrödinger-Poisson Equation with General Potential. *Frontiers of Mathematics in China*, **15**, 1189-1200. https://doi.org/10.1007/s11464-020-0881-6

[9] Rabinowitz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/cbms/065