Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2572-2577
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139262

一类酉Virasoro顶点算子代数扩张的Zhu代数

程存广

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2023年8月2日；录用日期：2023年9月4日；发布日期：2023年9月12日

摘 要

本文主要研究一类酉Virasoro顶点算子代数扩张的Zhu代数。Zhu在博士论文中证明了顶点算子代数的不可约模和顶点算子代数相应的Zhu代数的不可约模有一一对应关系，因此本文将通过其不可约模决定Zhu代数。

关键词

Virasoro顶点算子代数，扩张，Zhu代数

Zhu Algebras of a Class of Unitary Virasoro Vertex Operator Algebras Extension

Cunguang Cheng

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Aug. 2nd, 2023; accepted: Sep. 4th, 2023; published: Sep. 12th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly study the Zhu algebras of one-of-a-kind unitary Virasoro vertex operator algebras. Zhu proved in his doctoral thesis that there is a one-to-one correspondence between the irreducible modules of vertex operator algebras and the corresponding Zhu algebras of vertex operator algebras. Therefore, in this paper, Zhu algebras are determined by their irreducible modules.

Keywords

Virasoro Vertex Operator Algebra, Extension, Zhu Algebra

文章引用: 程存广. 一类酉 Virasoro 顶点算子代数扩张的 Zhu 代数[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2572-2577.
DOI: 10.12677/pm.2023.139262

1. 引言

Frenkel，Lepowsky，Meurman 三人在构造 moonshine 模[1]和 Borcherd 研究 Kac-Moody 代数与魔群的过程中[2]分别得到了顶点算子代数的概念。顶点算子代数的本质是物理上二维共形场论中的手性代数，后由 Frenkel，Lepowsky，Meurman 三人给出了精确的定义[1]。物理上会把弦对应为不可约模，而两个弦相互作用之后散射出一堆新的弦，数学上会对应为两个不可约模的表示作张量以后分解成不可约模的直和，这些弦出现的概率对应于顶点算子代数中的 fusion rule。顶点算子代数在物理和数学中都有着很强的研究价值，特别是和李代数有着紧密的联系，学者们期望一对同构顶点算子代数及其表示是建立某类型共形场论所需要的基本对象，如 Heisenberg 顶点算子代数相应于物理中自由玻色子手性代数，Lattice 顶点算子代数相应于环面上的自由玻色子手性代数，Virasoro 顶点算子代数是相应于最小模型。

Zhu 在研究顶点算子代数的模不变性时[3]，引入了相应于顶点算子代数 V 的一类结合代数 $A(V)$，并深入讨论了结合代数 $A(V)$ 的若干性质，特别是得到关于表示理论的一些结论，其中重要的结论如：顶点算子代数 V 的不可约模范畴和结合代数 $A(V)$ 模范畴等价，因此我们可以把 VOA 的表示转化为较为熟悉的结合代数的表示来研究。结合代数 $A(V)$ 的结构比 V 简单得多，例如，一对一对应定理表明，如果 V 是有理的，那么 $A(V)$ 是半单的。结合代数 $A(V)$ 在模不变性的证明中也起着至关重要的作用[3]。由于 $A(V)$ 在研究顶点算子代数理论中的重要作用，许多学者对结合代数 $A(V)$ 进行了进一步的研究和推广[4] [5] [6]。Virasoro 顶点算子代数是一类简单且重要的顶点算子代数，起源于 Virasoro 无限维李代数的表示。许多学者进行了研究。Dong，Mason，Zhu 研究了一类 Virasoro 离散序列[7]，特别是计算了酉 Virasoro 代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 不可约模和 Zhu 代数 $A\left(L\left(\frac{1}{2},0\right)\right)$，并证明了 V 的有理性。Wang 在文章中[8]，证明了 Virasoro 顶点算子代数 $L(c,0)$ 是有理的当且仅当中心载荷 c 满足

$$c=c_{p,q}=1-\frac{6(p-q)^2}{pq},$$

这里 $p,q\in\{2,3,4,\cdots\}$ 且 p 和 q 互素，并且给出了 $L(c_{p,q},0)$ 的所有不可约模 $L(c_{p,q},h_{m,n})$，这里

$$h_{m,n}=\frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq},\quad 0<m<q,0<n<p,$$

也计算了 Zhu 代数 $A(L(c_{p,q},0))$。Kitazume，Miyamoto，Yamada 在考虑一类编码顶点算子代数[9]，得到了 $L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)$ 的顶点算子代数结构和不可约模，计算了顶点算子代数 $L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)$ 的 Zhu 代数，并证明了该顶点算子代数是有理的。对于更一般的 Virasoro 代数 $L(c,0)$ 的扩张，Lam，Yamauchi 等人考虑了酉 Virasoro 代数情形下的扩张[10]，给出了扩张顶点算子代数的结构，并分类了该顶点算子代数的不可约模。基于上述研究背景，为进一步探讨 Virasoro 顶点算子代数扩张的性质，本文将考虑一类酉 Virasoro 顶点算子代数扩张的 Zhu 代数。

主要思路是先证明 Zhu 代数 $A(V)$是两部分多项式代数商代数的直和，其次，V 的不可约模 W 分类已经知道[10]，着重考虑模 W 的最低权，并且酉 Virasoro 离散序列的融合律也已知[11]，通过融合律的计算

来决定哪些权出现在 Zhu 代数的因子中，并且出现的重数是多少。

本文结构如下。第一节是引言，给出了研究背景和研究问题。第二节是预备知识，给出相关的定义和已有的结果。第三节是主要结论，给出一些新的结果。

2. 预备知识

定义 2.1 设 $\mathbb{F}$ 是代数闭域，构造 $\mathbb{F}$ 上的无限维向量空间：$Vir=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{F}L_n\oplus\mathbb{F}C$，它有基：$L_n,C,n\in\mathbb{Z}$；定义向量空间 Vir 中的双线性，反对称运算[,]，使得

$$\left[L_m,L_n\right]=\left(m-n\right)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C,\ \left[L_n,C\right]=0,\quad m,n\in\mathbb{Z},$$

则 Vir 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个无限维李代数，称为 Virasoro 代数。

给定复数 c 和 h，李代数 Vir 的 Verma 模 $M\left(c,h\right)$ 是一个由 1 生成的自由 $U\left(L_-\right)$ 模，使得 $L_+1=0,\ L_01=h\cdot 1$ 和 $C\cdot 1=c\cdot 1$。$M\left(c,h\right)$ 存在一个唯一的极大真子模称为 $J\left(c,h\right)$。用 $L\left(c,h\right)$ 表示 $M\left(c,h\right)/J\left(c,h\right)$。如果 $L_+v=0$ 且 v 是算子 L_0 的特征向量，称 $v\in M\left(c,h\right)$ 是一个极大向量。例如，$L_{-1}1$ 是 $M\left(c,0\right)$ 一个极大向量。把 $M\left(c,0\right)/\left\langle L_{-1}1\right\rangle$ 记为 M_c，这里 $\left\langle L_{-1}1\right\rangle$ 是模 $M\left(c,0\right)$ 通过极大向量 $L_{-1}1$ 生成的子模。

定理 2.2 M_c 和 $L\left(c,0\right)$ 有自然的顶点算子代数结构，其中 Virasoro 元素 $\omega=L_{-2}1$。有时会用 V_c 代替 $L\left(c,0\right)$，来强调其 VOA 结构。

令

$$c_{p,q}=1-6\frac{\left(p-q\right)}{pq},\ \ p,q\in\left\{2,3,4,\cdots\right\},$$

$$h_{m,n}=\frac{\left(np-mq\right)^2-\left(p-q\right)^2}{4pq}.$$

最高权表示 $L\left(c,h\right)$ 是酉的当且仅当或者 $\left(c,h\right)$ 满足 $c\geq 1$ 和 $h\geq 0$，或者 $\left(c,h\right)$ 满足下列条件：

$$c=c_m=1-\frac{6}{\left(m+2\right)\left(m+3\right)},\ \left(m=0,1,2,\cdots\right)$$

$$h=h_{r,s}^m=\frac{\left[\left(m+3\right)r-\left(m+2\right)s\right]^2-1}{4\left(m+2\right)\left(m+3\right)}\quad\left(r,s\in\mathbb{N},1\leq s\leq r\leq m+1\right),$$

对上面离散列中的 $\left(c_m,h_{r,s}^m\right)$ 的酉表示 $L\left(c_m,h_{r,s}^m\right)$，称为 Virasoro 代数的离散列。

定义 2.3 顶点算子代数 V 是有理的，如果 V 有有限多个不可约模并且任意 $\mathbb{N}$ 分次的 V 模是完全可约的。

定义 2.4 对于顶点算子代数 V，定义双线性运算 $*$ 如下。对任意的齐次元 $a\in V$，令

$$a*b=res_zY\left(a,z\right)\frac{\left(z+1\right)^{\deg a}}{z}b,\quad b\in V.$$

用 $O\left(V\right)$ 表示下列元素的线性张成

$$res_zY\left(a,z\right)\frac{\left(z+1\right)^{\deg a}}{z^2}b,\quad b\in V.$$

那么 $O\left(V\right)$ 关于运算*是作为 V 的双边理想，并有结合代数 $A\left(V\right)=V/O\left(V\right)$。

3. 主要结论

本节将要给出一类酉 Virasoro 代数扩张 Zhu 代数的具体结构。首先，由引理 3.1，可以得到酉 Virasoro 代数扩张 VOA 的存在性。

引理 3.1 [10]令 $U^0=L(c_m,0)$ 和 $U^1=L(c_m,h^m)$，这里 h^m 是指 $h^m_{r,s}$ 中的最大值 $h^m_{m+1,1}$，那么有

如果 $m\equiv 0或3 \bmod 4$，那么 $U^0\oplus U^1$ 具有唯一的单 VOA 结构。

如果 $m\equiv 1或2 \bmod 4$，那么 $U^0\oplus U^1$ 具有唯一的单 SVOA 结构。

令四元组 $(U,Y,1,\omega)$ 是顶点算子代数使得 $U=U^0\oplus U^1$，这里 U^0 是同构于 $L(c_m,0)$ 的顶点算子代数并且带有相同的 Virasoro 元素 ω，并且 U^1 作为 U^0 模是同构于 $L(c_m,h^m)$，这里 $m\equiv 0或3 \bmod 4$，本文中如果不特别说明，那么 m 均为此条件。

参考[9]中类似的思路，利用 Zhu 代数的基本性质。通过 $O(U^0)$ 和 $O(U^1)$ 的定义，易知 $O(U)$ 包含二者。Zhu 代数 $A(U^0)$ 是多项式代数 $\mathbb{C}[x]$ 的同态像[7]：

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\prod_h (x-h)}\cong A(U^0);\ x^n\to[\omega]^n，这里\ h\in\left\{h^m_{r,s}\middle|1\le s\le r\le m+1\right\},$$

作为 $A(U^0)$ 的双模，$A(U^1)$ 是代数 $\mathbb{C}[x,y]$ 的同态像且 $A(U^0)$ 的左作用和右作用如下给出

$$x^m y^n\to[\omega]^m*[q]**[\omega]^n,$$

这里 q 是 U^1 的最高权向量[9]。由于 $A(U^0)$ 在 $A(U^1)$ 上的左作用和右作用在模去 $O(U)$ 是等同的，且 $[\omega]$ 是 Zhu 代数 $A(U)$ 中的中心元，因此有

引理 3.2 $A(U)$ 是可交换的并且 $A(U)$ 是

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\prod_h (x-h)}\oplus\frac{\mathbb{C}[x]}{\prod_h (x-h)}$$

的同态像。

为了方便叙述，这里给出一些记号。设 $m\equiv 0或3 \bmod 4$，若 $m\equiv 0 \bmod 4$，即 $m=4k,k\ge 1$ 时，记

$$\Lambda_1=\left\{h^m_{r,s}\middle|r=(m+2)/2=2k+1,\ s=1,2,\cdots,2k+1\right\},$$

$$\Lambda_2=\left\{h^m_{r,s}\middle|r=1,3,\cdots,2k-1,1\le s\le 2k+1,r\ge s\right\}\cup\left\{h^m_{r,s}\middle|r=2k+3,\cdots,4k+1,2k+2\le s\le 4k+1,r\ge s\right\},$$

$$\Lambda_3=\left\{h^m_{m-r+2,s}\middle|r=1,3,\cdots,2k-1,1\le s\le 2k+1,r\ge s\right\}\cup\left\{h^m_{m-r+2,s}\middle|r=2k+3,\cdots,4k+1,2k+2\le s\le 4k+1,r\ge s\right\},$$

$$\Lambda=\left\{h^m_{r,s}\middle|1\le s\le r\le m+1\right\}-\Lambda_1-\Lambda_2-\Lambda_3,$$

同理若 $m\equiv 3 \bmod 4$，即 $m=4k-1,\ k\ge 1$，记

$$\Lambda_1=\left\{h^m_{r,s}\middle|s=(m+3)/2=2k+1,r=2k+1,2k+2,\cdots,4k\right\},$$

$$\Lambda_2=\left\{h^m_{r,s}\middle|1\le r\le 2k,s=1,\cdots,2k-3,2k-1且r\ge s\right\}\cup\left\{h^m_{r,s}\middle|2k+1\le r\le 4k,s=2k+3,\cdots,4k-1且r\ge s\right\},$$

$$\Lambda_3=\left\{h^m_{m-r+2,s}\middle|1\le r\le 2k,s=1,\cdots,2k-3,2k-1且r\ge s\right\}\cup\left\{h^m_{m-r+2,s}\middle|2k+1\le r\le 4k,s=2k+3,\ldots,4k-1且r\ge s\right\},$$

$$\Lambda=\left\{h^m_{r,s}\middle|1\le s\le r\le m+1\right\}-\Lambda_1-\Lambda_2-\Lambda_3.$$

引理 3.3 和引理 3.4 来自文献[10]，我们将用新的记号重新叙述这两个引理。

引理 3.3 任取不可约 U 模，作为U^0 模，必定同构于下列之一

$$W\left(h_{r,s}^m\right) \cong L\left(c_m, h_{r,s}^m\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_1,$$

$$W\left(h_{r,s}^m\right) \cong L\left(c_m, h_{r,s}^m\right) \oplus L\left(c_m, h_{r-m+2,s}^m\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_2.$$

引理 3.4 单顶点算子代数 $U \cong L(c_m,0) \oplus L\left(c_m, h^m\right)$ 有以下的不可约模的同构类，可以表示为

$$W\left(h_{r,s}^m\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_2, \quad W\left(h_{r,s}^m,+\right), W\left(h_{r,s}^m,-\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_1,$$

如果 $m=4k-1, k\geq 1$，这些不可约模的个数为 $2k^2+4k$；如果 $m=4k, k\geq 1$ 不可约模的个数为 $2k^2+5k+2$。这些不可约 U 模，作为U^0 模同构于

$$W\left(h_{r,s}^m\right) \cong L\left(c_m, h_{r,s}^m\right) \oplus L\left(c_m, h_{m-r+2,s}^m\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_2,$$

$$W\left(h_{r,s}^m,+\right) \cong W\left(h_{r,s}^m,-\right) \cong L\left(c_m, h_{r,s}^m\right), h_{r,s}^m \in \Lambda_1.$$

所有的预备工作都已完成，接下来给出本文的主要定理，这里采用了[9]中类似的想法。

定理 3.5 顶点算子代数 U 的 Zhu 代数 $A(U)$ 同构于

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_2}\left(x-h_{r,s}^m\right)} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)},$$

U^0 在 $A(U)$ 中的像 $U^0+O(U)/O(U)$ 同构于 $\mathbb{C}[x]\Big/\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_2}\left(x-h_{r,s}^m\right)$ 并且 U^1 在 $A(U)$ 中的像 $U^1+O(U)/O(U)$ 同构于 $\mathbb{C}[x]\Big/\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)$。

证明：因为 U 的不可约模的同构类和 Zhu 代数 $A(U)$ 的不可约模的同构类是一一对应的。将通过上述引理决定 $A(U)$。事实上如果 $\varphi: A(U) \to End\,N$ 是一个结合代数的表示，那么存在一个 U 的模 M，使得模 M 的最低权为 h 的空间 M_h 等于 N，并且作用如下给出：$\varphi([v])w = o(v)w$，对于 $w \in N$ 和 $v \in U$，其中这里 $[v]$ 指的是 v 在 $A(U)=U/O(U)$ 中的像，并且 $o(v)=v_{wt\,v-1}$ 是 $z^{-wt\,v}$ 在 $Y(v,z)$ 中的系数。

令 W 是一个不可约 U 模，那么 W 中的最低权 h 属于 $\Lambda_1+\Lambda_2$。现在，我们将 W 视作 U^0 模，那么 $A\left(U^0\right)$ 在 W_h 上的作用是 $[\omega]$ 的作用，即乘以 h，因此 U^0 在 $A(U)$ 中的像为 $\mathbb{C}[x]\Big/\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_2}\left(x-h_{r,s}^m\right)$。由于 U^1 在 $A(U)$ 中的像是由 $[q]$ 作为 $U^0+O(U)/O(U)$ 模生成的，所以 U^1 在 $A(U)$ 中的像是 $U^0+O(U)/O(U)$ 的同态像。考虑 $h_{r,s}^m \in \Lambda_2$，$W=W\left(h_{r,s}^m\right)=W^1 \oplus W^2$，这里 $W^1 \cong L\left(c_m, h_{r,s}^m\right)$，并且 $W^2 \cong L\left(c_m, h_{m-r+2,s}^m\right)$，我们对融合律进行计算，有 $Y^W(v,z)W^1 \subset W^2\left[\left[z,z^{-1}\right]\right]$，对某个 $v \in U^1$。因为 W^1 和 W^2 的最低权是不同的，并且由于算子 $o(v)$ 保持权不变，这意味着 $o(v)w=0$，对所有权为 $h_{r,s}^m \in \Lambda_2$ 的齐次元素 $w \in W^1$ 成立，因此在 $U^1+O(U)/O(U)$ 中，不含有同构于 $\mathbb{C}[x]\Big/\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_2}\left(x-h_{r,s}^m\right)$ 的因子。若 $h_{r,s}^m \in \Lambda_1$，两种不可约 U 模 $W\left(h_{r,s}^m,+\right)$ 和 $W\left(h_{r,s}^m,-\right)$ 作为 U^0 模是同构的，由于 U^1 的作用方式不同，因此同构于 $\mathbb{C}[x]\Big/\prod\limits_{h_{r,s}^m \in \Lambda_1}\left(x-h_{r,s}^m\right)$ 的因子必须出现在 $U^1+O(U)/O(U)$ 之中。

注记 3.6 定理 3.5 是本文的主要结果，顶点算子代数的 Zhu 代数本是一个相对复杂的构造，而定理 3。5 说明顶点算子代数 U 的 Zhu 代数不过是一个多项式代数商代数的直和，并且商掉的理想也是被 U 清楚

的所决定，因此对 U 模 W 的研究，可以转化为该多项式代数商代数的直和去研究，把问题进行了简化。

例 3.7 术语如上，当 $m=3$ 时，有 $U^0 \cong L\left(\frac{4}{5},0\right)$，$U^1 \cong L\left(\frac{4}{5},3\right)$，因此，$U^0 \oplus U^1 \cong L\left(\frac{4}{5},0\right) \oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)$。这时 $k=1$，根据记号中的描述有 $\Lambda_1=\left\{\frac{1}{15},\frac{2}{3}\right\}$ 和 $\Lambda_2=\left\{0,\frac{2}{5}\right\}$ 根据定理 3.6 有

$$A\left(L\left(\frac{4}{5},0\right)\oplus L\left(\frac{4}{5},3\right)\right)\cong \frac{\mathbb{C}[x]}{\left(x\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{15}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)}\oplus\frac{\mathbb{C}[x]}{\left(\left(x-\frac{1}{15}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)},$$

这与文献[9]中计算的特例一致。

参考文献

[1] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1989) Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York.

[2] Borcherds, R.E. (1986) Vertex Algebras, Kac-Moody Algebras, and the Monster. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **83**, 3068-3071. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[3] Zhu, Y.C. (1996) Modular Invariance of Characters of Vertex Operator Algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, **9**, 237-302. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00182-8

[4] Dong, C.Y. and Li, H.S. ((1998) Mason, Vertex Operator Algebras and Associative Algebras. *Journal of Algebra*, **206**, 67-96. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7425

[5] Dong, C.Y. and Li, H.S. (1998) Mason, Twisted Representations of Vertex Operator Algebras. *Mathematische Annalen*, **310**, 571-600. https://doi.org/10.1007/s002080050161

[6] Dong, C.Y. and Yang, C. (2022) G-Twisted Associative Algebras of Vertex Operator Superalgebras. *Journal of Algebra*, **606**, 323-340. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.04.040

[7] Dong, C., Mason, G. and Zhu, Y. (1994) Discrete Series of the Virasoro Algebra and the Moonshine Module. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **56**, 295-316.

[8] Wang, W. (1993) Rational of Virasoro Vertex Operator Algebras. *Duke Mathematical Journal*, **71**, 197-211.

[9] Kitazume, M., Miyamoto, M. and Yamada, H. (2000) Ternary Codes and Vertex Operator Algebras. *Journal of Algebra*, **223**, 379-395. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8058

[10] Lam, H.C., Lam, N. and Yamauchi, H. (2003) Extension of Unitary Virasoro Vertex Operator Algebras by a Simple Module. *International Mathematics Research Notices*, **2003**, 577-611. https://doi.org/10.1155/S1073792803205092

[11] Höhn, G., Lam, C.H. and Yamauchi, H. (2012) McKay's E_7 Observation on the Baby Monster. *International Mathematics Research Notices*, **2012**, 166-212. https://doi.org/10.1093/imrn/rnr009