Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2633-2638
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139269

一类非线性四阶抛物型方程解的存在性

李　彬，朱永政

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年8月5日；录用日期：2023年9月7日；发布日期：2023年9月14日

摘　要

以一般的线性抛物型方程为背景，引入了一类非线性的四阶抛物型方程。本文主要研究该方程弱解的存在性问题。在方法上，结合Galerkin理论和能量估计方法。通过构造逼近解、对逼近解作估计、对逼近解取极限得到这类方程弱解的存在性。

关键词

非线性抛物型方程，Galerkin理论，存在性

Existence of Solutions for a Class of Nonlinear Fourth-Order Parabolic Equations

Bin Li, Yongzheng Zhu

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 5th, 2023; accepted: Sep. 7th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

Taking the general linear parabolic equations as background, a class of nonlinear fourth-order parabolic equations is introduced. In this paper, we mainly study the existence of weak solutions to this equation. In the method, Galerkin theory and energy estimation method are combined. The existence of the weak solution of this kind of equation is obtained by constructing the approximation solution, estimating the approximation solution and taking the limit of the approximation solution.

Keywords

Nonlinear Parabolic Equations, Galerkin Theory, Existence

文章引用: 李彬, 朱永政. 一类非线性四阶抛物型方程解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2633-2638.
DOI: 10.12677/pm.2023.139269

1. 引言

偏微分方程(PDE)诞生于 18 世纪，发展于 19 世纪，从其兴起至今已经有两百多年的历史了。偏微分方程最早的研究由物理和几何问题发源而来，最早的二阶偏微分方程模型是 Euler 提出的弦振动模型。后来随着物理学研究在深度和广度上的发展，微分方程在数量和类型上增加了，并且逐渐发展为一个独立的数学分支。偏微分方程研究内容复杂，研究方法多样，其讨论的问题不仅仅来源于物理、化学、生物等学科的经典问题。此外，在研究这些问题时，应用了许多现代数学的工具。近些年来，其领域的研究工作，特别是有关非线性偏微分方程理论，应用和计算方法的研究取得了较大的进展。而热传导方程是偏微分方程发展史上最早的方程之一，它是抛物型方程的典型代表，同样具有丰富的物理学背景。

众所众知，以下形式的四阶抛物性方程

$$\omega_t+\Delta^2\omega-\nabla\left(f\left(\nabla\omega\right)\right)=g\left(x,t,u\right),\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times\left(0,T\right),$$

可以用来描述一些物理过程：相变，薄膜理论等。特别地，当我们用它来描述纳米尺度薄膜外延伸生长的演变时，f 的具体形式如下[1] [2]

$$f\left(\nabla\omega\right)=A_1\nabla\omega+A_2\left|\nabla\omega\right|^2\nabla\omega+A_3\nabla\left|\nabla\omega\right|^2.$$

近些年来，上述方程在不同初边值条件下的解的性质得到了深入研究。当 $f\left(s\right)=s^{p-2}s$ 时，King，Stein，和 Winkler 在[3]中证明了在适当的函数空间中上述方程解的存在性、唯一性以及正则性。在空间维数 $N\geq 1$ 的前期条件下，徐润章等[4]研究了如下四阶半线性抛物型方程的初边值问题

$$\omega_t+\Delta^2\omega-q\Delta\omega+f\left(\omega\right)=0,\quad \left(x,t\right)\in Q_T=\Omega\times\left(0,+\infty\right),$$

$$\omega\left(x,t\right)=\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=0,\quad \left(x,t\right)\in\Gamma=\partial\Omega\times\left[0,+\infty\right),$$

$$\omega\left(x,0\right)=\omega_0\left(x\right),\quad x\in\Omega,$$

其中 Ω 是 $R^N\left(N\geq 1\right)$ 上的有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 是充分光滑的，ν 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量，f 满足是适当的结构性条件。在这篇文章中，徐润章等证明了当初值满足的条件不同时，上述问题的解具有整体存在和有限时刻爆破的性质。此外，通过利用迭代技术，他们还证明了问题在 $H^k\left(\Omega\right)\left(k\geq 0\right)$ 中有整体吸引子。Liu 在[5]中研究了以下方程

$$\omega_t+\operatorname{div}\left(m\left(\omega\right)k\nabla\Delta\omega-\left|\nabla\omega\right|^{p-2}\nabla\omega\right)=0,\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times\left(0,T\right),$$

在一维和二维空间中解的性质。利用 schauder 估计方法和 campanato 空间理论，Liu 证明了古典解的整体存在性。此外，Liang 在[6]中还研究了多维情形下的相关问题

$$\omega_t+\nabla\cdot\left(\omega^n\nabla\Delta\omega\right)=0,\quad \left(x,t\right)\in\Omega\times\left(0,T\right),$$

其中初始函数在拉普拉斯方程的正稳态解附近。

受上述文献的启发，本文主要研究如下的非线性四阶抛物型 p-Laplace 方程的初边值问题：

$$\omega_t+\Delta\left(a\left(x\right)^{\alpha}\left|\Delta\omega\right|^{p-2}\Delta\omega\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g_i\left(\omega\right)}{\partial x_i},\quad \left(x,t\right)\in Q_T=\Omega\times\left(0,T\right),\tag{1}$$

$$\omega=\Delta\omega=0\text{，}\quad (x,t)\in\Gamma=\partial\Omega\times(0,T)\text{，} \tag{2}$$

$$\omega(x,0)=\omega_0(x)\text{，}\quad x\in\Omega\,. \tag{3}$$

不失一般性，我们假设Ω是$R^N(N\le 2)$上的有界开区域，其边界$\partial\Omega$是充分光滑的。此外，我们还要求Ω具有本文所需要的一些简单的拓扑性质。$\alpha>0$，$p>1$，$T>0$都是常数。并且，限制$g_i(\omega)$及其导数的增长阶满足：对于任意的$i\in\{1,2,3,\cdots,N\}$，$g_i(\omega)$是C^1函数，且存在C使得$|g_i(\omega)|\le C\omega$，$|g_i'(\omega)|\le C$。

定义：我们称$\omega=\omega(x,t)$是问题(1)~(3)在$Q_T=\Omega\times(0,T)$上的一个弱解，如果满足下列条件：

1) $\omega\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega))$，且$\omega_t\in L^2(Q_T)$；

2) 对于任意的$\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$，有

$$\iint_{Q_T}\omega_t\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}a(x)|\Delta\omega|^{p-2}\Delta\omega\Delta\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\sum_{i=1}^N g_i(\omega)\varphi_{x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\,.$$

定理：令$\omega_0\in W_0^2(\Omega)$，则问题(1)~(3)在$Q_T=\Omega\times(0,T)$上存在唯一弱解$\omega=\omega(x,t)$。其中空间$W_0^2(\Omega)$具有如下定义：

$$W_0^2(\Omega)=W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

本文将结合 Galerkin 逼近与先验估计证明其弱解的存在性。文中C表示一般常数，可以逐行变化。

2. 弱解的存在性

研究一般线性抛物型方程弱解的存在性，通常有以下几种基本的方法：能量方法、Rothe 方法以及 Galerkin 方法。本文采用 Galerkin 方法证明弱解的存在性。

2.1. 构造基底和逼近解

令$\{\phi_i(x)\}_{i=1}^\infty$是$W_0^2(\Omega)$中的标准正交基底，构造问题(1)~(3)的近似解：

$$\omega^n(x,t)=\sum_{i=1}^n c_i^n(t)\phi_i(x)\text{，}\quad n=1,2,\cdots$$

使其满足下面的方程：

$$\left(\omega_t^n,\phi_i\right)+\left(a(x)|\Delta\omega^n|^{p\text{-}2}\Delta\omega^n,\Delta\phi_i\right)+\left(\sum_{i=1}^N g_i(\omega^n),(\phi_i)_{x_i}\right)=0\text{，} \tag{4}$$

$$\omega^n(x,0)=\sum_{i=1}^n d_i^n(t)\phi_i(x)\to\omega_0\text{ 在 }W_0^2(\Omega)\text{ 中强收敛，当 }n\to+\infty\text{ 时，} \tag{5}$$

其中$(\cdot,\cdot)$为$L^2(\Omega)$空间中的内积，则问题(4)~(5)的解的存在性可以由 Peano 定理来保证。

2.2. 对逼近解做估计

为了能够通过抽子列的方法得到所需的解，我们需要对逼近解做一些估计。首先，类似于对方程两端乘ω的办法，将(4)的左右两端同时乘以$c_i^n(t)$，对i从 1 到n求和得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega a(x)|\Delta\omega^n|^p\,\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega\sum_{i=1}^N g_i(\omega^n)\omega_{x_i}^n\mathrm{d}x\\&=-\sum_{i=1}^N\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{\omega^n}g_i(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\&=0,\end{aligned}$$

对其在$(0,T)$上积分，得

$$\left\|\omega^n(\cdot,T)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\iint_{Q_T}a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\left\|\omega_0^n(x)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

由此可知

$$\iint_{Q_T}a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C. \tag{6}$$

接下来，将(4)的左右两端同时乘以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_i^n(t)$，对$i$从1到$n$求和，然后对其在$(0,t)$上积分，得

$$\iint_{Q_t}\left(\omega_\tau^n\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\iint_{Q_t}a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^{p-2}\Delta\omega^n\Delta\omega_\tau^n\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\iint_{Q_t}\sum_{i=1}^N\frac{\partial g_i(\omega^n)}{\partial x_i}\omega_\tau^n\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=0, \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_t}a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^{p-2}\Delta\omega^n\Delta\omega_\tau^n\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\iint_{Q_t}a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\Delta\omega^n\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\iint_{Q_t}a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\int_0^{\left|\Delta\omega^n\right|^2}s^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{p}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_\Omega a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{p}\left\|a(x)^{\frac{1}{p}}\Delta\omega^n(\cdot,t)\right\|_{L^p(\Omega)}^p-\frac{1}{p}\left\|a(x)^{\frac{1}{p}}\Delta\omega_\eta^n(\cdot,0)\right\|_{L^p(\Omega)}^p,\end{aligned} \tag{8}$$

由g_i的假定条件可得

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_t}\sum_{i=1}^N\frac{\partial g_i(\omega^n)}{\partial x_i}\omega_t^n\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&\le\sum_{i=1}^N\iint_{Q_t}\left|g'(\omega^n)\right|\left|\omega_{x_i}^n\right|\left|\omega_t^n\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{1}{2}\iint_{Q_t}\left(\omega_\tau^n\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C\iint_{Q_t}\left|\nabla\omega^n\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

由 Sobolve 嵌入定理[7]可得

$$\left\|\omega^n\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le C\left\|\omega^n\right\|_{W^{2,p}(\Omega)},$$

其中$C>0$是$W^{2,p}$到$W^{1,p}$的最佳嵌入常数，仅依赖于N，p，Ω。因此，再结合(6)可以得到

$$\iint_{Q_t}\left|\nabla\omega^n\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\le C. \tag{10}$$

结合(7)~(10)可以得到

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_t}\left(\omega_\tau^n\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\frac{1}{p}\left\|a(x)^{\frac{1}{p}}\Delta\omega^n(\cdot,t)\right\|_{L^p(\Omega)}^p\le\frac{1}{p}\left\|a(x)^{\frac{1}{p}}\Delta\omega^n(\cdot,0)\right\|_{L^p(\Omega)}^p+C,$$

然后，可以得到

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\left(\omega_t^n\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{p}\left\|a(x)^{\frac{1}{p}}\Delta\omega^n(\cdot,t)\right\|_{L^p(\Omega)}^p\le C, \tag{11}$$

由(11)可以得到如下估计：

$$\left\|\omega_t^n\right\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} \le C \text{，} \tag{12}$$

$$\left\|\omega^n\right\|_{L^\infty\left(0,T;W_0^2(\Omega)\right)} \le C \text{.} \tag{13}$$

此外结合 g_i 的假定条件和(13)可以得到

$$\int_\Omega \left|g_i\left(\omega^n\right)\right|^p \mathrm{d}x \le C\int_\Omega \left|\omega^n\right|^p \mathrm{d}x \le C \text{，}$$

即

$$\left\|g_i\left(\omega^n\right)\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^p(\Omega)\right)} \le C \text{.} \tag{14}$$

2.3. 对逼近解取极限

结合先验估计(12)~(13)，应用 Aubin-Lions 紧致性定理[8]可以知道存函数 ω 和 $\left\{\omega^n\right\}_{n=1}^\infty$ 的一个子列(不妨仍然记为其本身)使得

$$\text{弱收敛为 } \omega_t \text{ 于 } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\text{，} \tag{15}$$

$$\omega^n \text{ 弱}*\text{收敛为 } \omega \text{ 于 } L^\infty\left(0,T;W_0^2(\Omega)\right) \text{ 在，} \tag{16}$$

$$\omega^n \text{ 强收敛为 } \omega \text{ 于 } L^2\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)\text{，} \tag{17}$$

$$\omega^n \text{ 收敛为 } \omega \text{ 几乎处处于 } \Omega\times(0,T)\text{，} \tag{18}$$

$$g_i\left(\omega^n\right) \text{ 收敛为 } g_i(\omega) \text{ 几乎处处于 } \Omega\times(0,T)\text{，} \tag{19}$$

$$g_i\left(\omega^n\right) \text{ 弱收敛为 } g_i(\omega) \text{ 于 } L^\infty\left(0,T;L^p(\Omega)\right)\text{，} \tag{20}$$

其中(17)成立意味着(18)成立，结合 $g_i(\omega)\in C^1\left(Q_T\right)$ 和(18)可以得到(19)，结合(14)和(19)可以得到(20)。

(4)两侧关于 t 在 $(0,T)$ 上积分可得

$$\iint_{Q_T} \omega_t^n \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T} a(x)\left|\Delta\omega^n\right|^{p-2}\Delta\omega^n\Delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T}\sum_{i=1}^N g_i\left(\omega^n\right)\varphi_{x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \text{，} \tag{21}$$

结合(15)~(20)，在(21)中令 $n\to+\infty$ 可得

$$\iint_{Q_T} \omega_t \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T} a(x)\left|\Delta\omega\right|^{p-2}\Delta\omega\Delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T}\sum_{i=1}^N g_i(\omega)\varphi_{x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \text{，}$$

对任意的 $\varphi\in C_0^\infty\left(Q_T\right)$ 都成立。非退化情形下弱解的存在性证明完毕。此外结合 $\omega\in L^\infty\left(0,T;W_0^2(\Omega)\right)$ 和 $\omega_t\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$，应用 Aubin-Lions 紧致性定理[8]可以得到 $\omega\in C\left([0,T];W^{1,p}(\Omega)\right)$。

基金项目

辽宁省教育高校科研项目资助(LJKMZ20220832)。

参考文献

[1] Zangwill, A. (1996) Some Causes and a Consequence of Epitaxial Roughening. *Journal of Crystal Growth*, **163**, 8-21. https://doi.org/10.1016/0022-0248(95)01048-3

[2] Ortiz, M., Repetto, E.A. and Si, H. (1999) A Continuum Model of Kinetic Roughening and Coarsening in Thin Films.

Journal of the Mechanics & Physics of Solids, **47**, 697-730. https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00102-1

[3] Bb, K., Stein, O. and Winkler, M. (2003) A Fourth-Order Parabolic Equation Modeling Epitaxial Thin Film Growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 459-490. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00474-8

[4] Xu, R., Chen, T., Liu, C., *et al.* (2015) Global Well-Posedness and Global Attractor of Fourth Order Semilinear Parabolic Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 1515-1529. https://doi.org/10.1002/mma.3165

[5] Liu, C. (2008) A Fourth Order Parabolic Equation with Nonlinear Principal Part. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **68**, 393-401. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.005

[6] Liang, B., Ji, R. and Zhu, Y. (2012) Positive Solutions to a Nonlinear Fourth-Order Partial Differential Equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 2853-2862. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.04.013

[7] Adams, R.A. (1975) Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

[8] Simon, J. (1986) Compact Sets in the Space L p (0, T; B). *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata*, **146**, 65-96. https://doi.org/10.1007/BF01762360