Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2639-2647
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139270

Hans汉斯

函数域上双重酉欧拉函数的均值

李　玲

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2023年8月5日；录用日期：2023年9月7日；发布日期：2023年9月14日

摘　要

本文给出了函数域$\mathbb{F}_q(T)$中双重酉欧拉函数$\Phi^{**}(f)$的定义，研究了其可乘性，并给出了双重酉欧拉函数$\Phi^{**}(f)$的一个渐近公式。

关键词

函数域，双重酉欧拉函数，均值估计

The Average Value of Bi-Unitary Euler Function in the Function Fields

Ling Li

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Aug. 5th, 2023; accepted: Sep. 7th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

In this paper, we give the definition of bi-unitary Euler function $\Phi^{**}(f)$ in function field $\mathbb{F}_q(T)$, study its multiplicativity, and give an asymptotic formula of bi-unitary Euler function $\Phi^{**}(f)$.

Keywords

Function Field, Bi-Euler Function, Average Value Estimation

文章引用: 李玲. 函数域上双重酉欧拉函数的均值[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2639-2647.
DOI: 10.12677/pm.2023.139270

1. 引言

作为数学中一个重要的分支——数论，欧拉函数是数论中非常重要的一个算数函数，它对素数分解、公钥加密、广义费马大定理等方面都有着非常重要的应用，而欧拉函数的均值估计也具有着非常重要的研究意义。

对于任意正整数 n，我们令欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示为小于等于 n 的正整数中与 n 互素的个数。对于任意的 $\varepsilon>0$，Mentens [1]证明了

$$\sum_{n\le x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+R(x),$$

其中 $R(x)\ll x^{1+\varepsilon}$。对于 $R(x)$ 的估计，Walfisz [2]和 Carella [3]分别证明了

$$R(x)\ll x(\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3},\quad R(x)\ll x.$$

对于欧拉函数 $\varphi(n)$ 的倒数的均值估计，Carellan 还证明了

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\varphi(n)}=c_0+c_1\log x+O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

其中 c_0 和 c_1 是两个常数。

设 $n\ge1$ 为正整数，若 $d\,|\,n$ 且 $\gcd(d,n/d)=1$，则称 d 是 n 的一个酉除数，记为 $d\,\|\,n$。令 $(k,n)_*:=\max\{d\in\mathbb{N}:d\,|\,k,d\,\|\,n\}$，定义酉欧拉函数 $\varphi^*(n)$ 为

$$\varphi^*(n):=\sharp\{k\in\mathbb{N}:1\le k\le n,(k,n)_*=1\}.$$

Cohen [4]证明了酉欧拉函数 $\varphi^*(n)$ 是一个可乘函数，并且给出了 $\varphi^*(n)$ 的一个均值估计

$$\sum_{n\le x}\varphi^*(n)=\frac{\alpha x^2}{2}+O\left(x\log^2 x\right),\tag{1.1}$$

其中 $\alpha=\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)$。对于酉欧拉函数 $\varphi^*(n)$ 的其他性质可以参看文献[5] [6] [7] [8]。随后，Sitaramachandrarao 和 Suryanareynan [9]改进了(1.1)的余项，得到

$$\sum_{n\le x}\varphi^*(n)=\frac{\alpha x^2}{2}+O\left(x\log^{\frac{5}{3}}x(\log\log x)^{\frac{4}{3}}\right),$$

其中 α 与(1)一致。

令

$$(k,n)_{**}:=\max\{d\in\mathbb{N}:d\,\|\,k,d\,\|\,n\}$$

为 k 和 n 的最大酉公因式，我们定义双重酉欧拉函数 $\varphi^{**}(n)$ 为

$$\varphi^{**}(n):=\sharp\{k\in\mathbb{N}:1\le k\le n,(k,n)_{**}=1\}.$$

Haukkanen [10]证明了

$$\varphi^{**}(n)=\sum_{d\|n}\mu^{*}(d)\varphi\left(d,\frac{n}{d}\right),$$

其中

$$\varphi\left(d,\frac{n}{d}\right)=\sum_{\substack{1\le\delta\le\frac{n}{d}\\(\delta,d)=1}}1,\quad \mu^{*}(n)=(-1)^{\omega(n)},$$

$\omega(n)$ 为 n 的不同素因子的个数。Subbarao 和 Suranarayana [11]给出了 $\varphi^{**}(n)$ 的一个均值估计

$$\sum_{n\le x}\varphi^{**}(n)=\frac{Ax^2}{2}+O\left(x\log^2 x\right),$$

其中

$$A=\prod_{p}\left(1-\frac{p-1}{p^2(p+1)}\right)=\zeta(2)\prod_{p}\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}-\frac{1}{p^4}\right).$$

受上述研究的启发，我们在函数域中考虑类似的问题。设 $\mathbb{F}_q$ 为 q 元有限域，在函数域 $\mathbb{F}_q(T)$ 中，令 $\mathcal{M}$ 为一元多项式环 $\mathcal{A}$ 中所有首一多项式构成的集合。对于任意的 $f\in\mathcal{M}$，称首一多项式 d 为 f 的酉因式，如果 $d\mid f$ 且 $(d,f/d)=1$，记为 $d\mid^{*} f$。若 d 满足 $d\mid^{*} f$ 且 $d\mid^{*} g$，则称 d 为 f 与 g 的酉因式，记 f 与 g 的次数最大的酉因式为 $(f,g)^{**}$。特别地，当 $(f,g)^{**}=1$ 时，称 f 与 g 是酉互素的。我们定义函数域上双重酉欧拉函数 $\Phi^{**}(f)$ 为 $\mathcal{M}$ 中次数小于 f 的次数且与 f 是酉互素的多项式的个数，即

$$\Phi^{**}(f)=\sharp\left\{g\in\mathbb{F}_q(T):(f,g)^{**}=1,\deg g<\deg f\right\}.$$

对于双重酉欧拉函数 $\Phi^{**}(f)$ 我们有下面的定理。

定理 1.1 对于任意的正整数 $n\ge1$，$0<\varepsilon<1/2$，设 $\mathcal{M}$ 为一元多项式环 $\mathcal{A}$ 中所有的首一多项式构成的集合，$\Phi^{**}(f)$ 为 $\mathbb{F}_q(T)$ 上的双重酉欧拉函数。我们有

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\Phi^{**}(f)=q^{2n}+O\left(q^{2n-1+\varepsilon}\right). \tag{1.2}$$

符号说明：

$\mathbb{F}_q$	具有 q 个元素的有限域
$\mathcal{A}$	有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一元多项式环
$\mathcal{M}$	$\mathcal{A}$ 中所有首一多项式构成的集合
$\mathcal{M}_n$	$\mathcal{A}$ 中所有 n 次首一多项式构成的集合
$\|f\|$	多项式 f 的范数，$\|f\|=q^{\deg f}$
$\deg f$	多项式 f 的次数
$\Re(s)$	复数 s 的实部
irr.P	不可约多项式

2. 预备知识与引理

2.1. 函数域上的 zeta 函数

为了证明定理 1，我们首先介绍函数域上的 zeta 函数的定义和性质。函数域 $\mathbb{F}_q(T)$ 上的 zeta 函数定

义为(见文献[2])

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{1}{\|f\|^{s}},\Re(s)>1. \tag{2.1}$$

其欧拉乘积为

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\prod_{\text{irr.}P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{s}}\right)^{-1},\ \Re(s)>1. \tag{2.2}$$

由(2.1)，我们有

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\frac{1}{1-q^{1-s}},\ \Re(s)>1, \tag{2.3}$$

即函数域上的 zeta 函数可解析延拓到整个复平面上除 $s=1$ 点外。

下面我们给出证明定理 1 所需的几个引理。

2.2. 预备引理

在数论中有一类非常重要的函数——乘性函数，它具有非常良好的性质即它在一个整数上的函数值等于对该整数做素幂因子分解后所有素数幂上的函数值之积。下面我们证明函数域上的双重酉欧拉函数 $\Phi^{**}(f)$ 也是一个乘性函数。

引理 2.1: 对任意 $f=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_s^{\alpha_s}\in\mathbb{F}_q[T]$，其中 $P_i^{\alpha_i}$ 是两两互素的首一的不可约多项式，$\alpha_i=1,\cdots,s$，我们有

$$\Phi^{**}(f)=\Phi^{**}\left(P_1^{\alpha_1}\right)\Phi^{**}\left(P_2^{\alpha_2}\right)\cdots\Phi^{**}\left(P_s^{\alpha_s}\right).$$

证明：首先定义如下的一些集合，

$$U_f=\{g\mid 0\le\deg g<\deg f,g\in\mathcal{M}\},$$

$$U_{P_i^{\alpha_i}}=\left\{g\mid 0\le\deg g<\deg P_i^{\alpha_i},g\in\mathcal{M}\right\},\ i=1,\cdots,s,$$

$$U=\left\{h\mid(h,f)^{**}=1,h\in U_f\right\},$$

$$U'=\left\{(h_1,\cdots,h_s)\mid\left(h_i,P_i^{\alpha_i}\right)^{**}=1,h_i\in U_{P_i^{\alpha_i}},i=1,\cdots,s\right\}.$$

令 τ 是集合 U 到集合 U' 的一个映射

$$\tau:U\to U'$$
$$h\mapsto(h_1,h_2,\cdots,h_s),\ h_i\equiv h\left(\operatorname{mod}P_i^{\alpha_i}\right),i=1,2,\cdots,s.$$

下面证明映射 τ 为一个双射。

映射 τ 为单射。设对于任意的 $h,h'\in U$，有 $\tau(h)=(h_1,h_2,\cdots,h_s)$，$\tau(h')=(h_1',h_2',\cdots,h_s')$。若 $(h_1,h_2,\cdots,h_s)=(h_1',h_2',\cdots,h_s')$，则 $h\equiv h'\left(\operatorname{mod}P_1^{\alpha_1}\right)$，$h\equiv h'\left(\operatorname{mod}P_2^{\alpha_2}\right)$，$\cdots$，$h\equiv h'\left(\operatorname{mod}P_s^{\alpha_s}\right)$。从而有 $h=h'\left(\operatorname{mod}P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_s^{\alpha_s}\right)$。因为 $\deg h<\deg f$，$\deg h'<\deg f$，所以 $h=h'$，故映射 τ 为单射。

映射 τ 为一个满射。对于集合 U' 中任意的元素 $(h_1,h_2,\cdots,h_s)$，假设满足条件 $h_1\equiv h\left(\operatorname{mod}P_1^{\alpha_1}\right)$，$h_2\equiv h\left(\operatorname{mod}P_1^{\alpha_2}\right)$，$\cdots$，$h_s\equiv h\left(\operatorname{mod}P_s^{\alpha_s}\right)$ 的 $h\notin U$。于是有 $(h,f)^{*}>1$，即存在某个 $i(1\le i\le s)$，使得 $P_i^{\alpha_i}\mid^{*}h$。又因为 h 满足 $h\equiv h_i\left(\operatorname{mod}P_i^{\alpha_i}\right)$，从而有 $h_i=P_i^{\alpha_i}$，这与 $\left(h_i,P_i^{\alpha_i}\right)^{*}=1$ 矛盾。所以 $h\in U$，从而有映射 τ 是满

射。故映射 τ 是双射。

因为集合 U 与集合 U' 之间存在一个双射，则 $\sharp\{U\}=\sharp\{U'\}$。从而由双重酉欧拉函数的定义有

$$\Phi^{**}(f)=\Phi^{**}\left(P_1^{\alpha_1}\right)\Phi^{**}\left(P_2^{\alpha_2}\right)\cdots\Phi^{**}\left(P_s^{\alpha_s}\right).$$

设 $s\in\mathbb{C}$，对于任意的 $0<\varepsilon<1/2$，定义

$$G(s):=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{2}{\|P\|^s}+\frac{1}{\|P\|^{2s-1}}\right),\Re(s)>1+\varepsilon.$$

对于 $G(s)$ 我们有下面的一个引理。

引理 2.2 对于任意的 $0<\varepsilon<1/2$，当 $\Re(s)>1+\varepsilon$ 时，存在与 ε 有关的常数 $C(\varepsilon)$，使得

$$|G(s)|\le|C(\varepsilon)|.$$

证明：当 $\Re(s)>1+\varepsilon$ 时，由 $G(s)$ 的定义有

$$G(s)=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{2}{\|P\|^s}+\frac{1}{\|P\|^{2s-1}}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}_n}\left(1-\frac{2}{\|P\|^s}+\frac{1}{\|P\|^{2s-1}}\right).$$

由于 $\|P\|^s=q^{ns},P\in\mathcal{M}_n$，于是

$$G(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}_n}\left(1-\frac{2}{q^{ns}}+\frac{1}{q^{n(2s-1)}}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{q^{ns}}+\frac{1}{q^{n(2s-1)}}\right)^{a_n},$$

其中 a_n 表示 $\mathcal{M}_n$ 中首一的不可约多项式的个数，从而有

$$|G(s)|=\prod_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{2}{q^{ns}}+\frac{1}{q^{n(2s-1)}}\right|^{a_n}\le\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{q^{n\Re(s)}}\right)^{a_n}.$$

因为存在常数 $C_1>\varepsilon$，使得 $a<\frac{C_1q^n}{n}$ (见文献[12])，所以对 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{q^{n\Re(s)}}\right)^{a_n}$ 取对数并且进行泰勒展开有

$$|G(s)|\le\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1q^n}{n}\log\left(1+\frac{3}{q^{n\Re(s)}}\right)\right)\le\exp\left(O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq^{n(\Re(s)-1)}}\right)\right).$$

而当 $\Re(s)>1+\varepsilon$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq^{n(Re(s)-1)}}$ 是收敛的，所以存在 $C(\varepsilon)>0$，使得

$$|G(s)|\le C(\varepsilon).$$

当 $\Re(s)>1+\varepsilon$ 时，$|G(s)|$ 是收敛的。考虑将 $G(s)$ 可以写成 Dirichlet 级数的形式

$$G(s)=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{h(f)}{\|f\|^s},\ \Re(s)>1+\varepsilon,$$

$$G(s)=\sum_{f\in M}\frac{h(f)}{\|f\|^s},$$

其中 $h(f)$ 是由 $G(s)$ 所确定的可乘函数。由 $\|f\|^s=q^{ls},f\in\mathcal{M}_l$，则有

$$G(s)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{f\in\mathcal{M}_l}h(f)q^{-ls}. \tag{2.4}$$

在(2.3)中，令 $u=q^{-s}$，我们有

$$\hat{G}(u):=\sum_{l=0}^{\infty}h_l u^l,\ |u|\le q^{-(1+\varepsilon)}. \tag{2.5}$$

其中 $h_l=\sum_{f\in\mathcal{M}_l}h(f)$，特别地，$h_0=1$。下面我们给出 h_l 的一个界。

引理 2.3 对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$|h_l|\le C(\varepsilon)q^{l(1+\varepsilon)}.$$

其中常数 $C(\varepsilon)$ 与引理 2.2 中的常数一致。

证明：由 Laurent 定理[13]有

$$h_l=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\hat{G}(u)}{u^{l+1}}\mathrm{d}u,$$

其中围道取为 $\Gamma:|u|=q^{-(1+\varepsilon)}$，从而我们有

$$\begin{aligned}|h_l|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\hat{G}(u)}{u^{l+1}}\mathrm{d}u\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\frac{|\hat{G}(u)|}{|u^{l+1}|}|\mathrm{d}u|\le\frac{1}{2\pi}C(\varepsilon)q^{(1+\varepsilon)(l+1)}\oint_\Gamma|\mathrm{d}u|\\&=\frac{1}{2\pi}C(\varepsilon)q^{(1+\varepsilon)(l+1)}2\pi q^{-(1+\varepsilon)}=C(\varepsilon)q^{l(1+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

为了证明定理 1.1，我们定义

$$F(s):=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\Phi^{**}(f)}{\|f\|^s},\ \Re(s)>1. \tag{2.6}$$

对于 $F(s)$ 我们有如下的引理。

引理 2.4 对于 $\Re(s)>1$，有

$$F(s)=\zeta_{\mathcal{A}}(s)\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)G(s).$$

证明：根据 $\|f\|=q^{\deg f}$ 和引理 2.1，可得 $F(s)$ 的欧拉乘积为

$$\begin{aligned}F(s)&=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1+\frac{\Phi^{**}(P)}{\|P\|^s}+\frac{\Phi^{**}(P^2)}{\|P\|^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1+\frac{\|P\|-1}{\|P\|^s}+\frac{\|P\|^2-1}{\|P\|^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(\frac{\|P\|^{s-1}}{\|P\|^{s-1}-1}-\frac{1}{\|P\|^s-1}\right).\end{aligned}$$

当 $\Re(s)>1$ 时，根据函数域上的 zeta 函数的欧拉乘积(2.2)，有

$$\zeta_A(s)=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^s}\right)^{-1},$$

$$\zeta_A(s-1)=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{s-1}}\right)^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}&F(s)\zeta_A^{-1}(s)\zeta_A^{-1}(s-1)\\&=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(\frac{\|P\|^{s-1}}{\|P\|^{s-1}-1}-\frac{1}{\|P\|^{s}-1}\right)\left(1-\frac{1}{\|P\|^{s}}\right)\left(1-\frac{1}{\|P\|^{s-1}}\right)\\&=\prod_{\mathrm{irr}.P\in\mathcal{M}}\left(1-\frac{2}{\|P\|^{s}}+\frac{1}{\|P\|^{2s-1}}\right)=G(s).\end{aligned}$$

3. 定理 1.1 的证明

令 $u=q^{-s}$，由(2.5)有

$$\hat{F}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\Phi^{**}(f)u^n. \tag{3.1}$$

由(2.3)有

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)=\frac{1}{1-q^{2-s}}. \tag{3.2}$$

于是，在(2.3)和(3.2)中令 $u=q^{-s}$ 并分别进行泰勒展开，我们得到

$$\hat{\zeta}_{\mathcal{A}}(u)=\sum_{r=0}^{\infty}q^r u^r, \tag{3.3}$$

$$\hat{\zeta}_{\mathcal{A}}(u-1)=\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m}u^m. \tag{3.4}$$

根据引理 2.4，合并(2.4)，(3.3)和(3.4)我们有

$$\hat{F}(u)=\hat{\zeta}_{\mathcal{A}}(u)\hat{\zeta}_{\mathcal{A}}(u-1)\hat{G}(u)=\left(\sum_{r=0}^{\infty}q^r u^r\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m}u^m\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}h_l u^l\right). \tag{3.5}$$

对于 $\hat{\zeta}_A(u-1)\hat{G}(u)$，我们有

$$\hat{\zeta}_{\mathcal{A}}(u-1)\hat{G}(u)=\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m}u^m\sum_{l=0}^{\infty}h_l u^l=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{m+l=t}q^{2m}h_l u^t. \tag{3.6}$$

于是令 $T_t=\sum_{m+l=t}q^{2m}h_l$，则有

$$T_t=\sum_{m+l=t}q^{2m}h_l=\sum_{m+l=t}q^{2(t-l)}h_l=q^{2t}\sum_{l=0}^{t}\frac{h_l}{q^{2l}}=q^{2t}\left(1+\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{2l}}\right).$$

其中

$$\begin{aligned}\left|\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{2l}}\right|&\le\sum_{l=1}^{t}C(\varepsilon)q^{l(\varepsilon-1)}=C(\varepsilon)q^{\varepsilon-1}\sum_{l=0}^{t-1}q^{l(\varepsilon-1)}\\&\le C(\varepsilon)q^{\varepsilon-1}\sum_{l=0}^{\infty}q^{l(\varepsilon-1)}=C(\varepsilon)q^{\varepsilon-1}\frac{1}{1-q^{\varepsilon-1}}.\end{aligned}$$

而当 $0<\varepsilon<1/2$ 时，

$$\frac{1}{1-q^{\varepsilon-1}}\le\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{2}}},$$

从而

$$\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{2l}}=O\left(q^{\varepsilon-1}\right).$$

故

$$T_t=q^{2t}\left(1+\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{2l}}\right)=q^{2t}\left(1+O\left(q^{\varepsilon-1}\right)\right)=q^{2t}+O\left(q^{2t+\varepsilon-1}\right). \tag{3.7}$$

由(3.5)和(3.6)，有

$$\hat{F}(u)=\sum_{r=0}^{\infty}q^r u^r\sum_{t=0}^{\infty}T_t u^t=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r+t=n}q^r T_t u^n. \tag{3.8}$$

对比(3.1)和(3.8)，我们得到

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\Phi^{**}(f)=\sum_{r+t=n}q^r T_t=\sum_{r+t=n}q^{n-t}T_t=q^n\sum_{t=0}^{n}\frac{T_t}{q^t}.$$

根据(3.7)，有

$$\sum_{t=0}^{n}\frac{T_t}{q^t}=\sum_{t=0}^{n}q^t+O\left(\sum_{t=0}^{n}q^{t+\varepsilon-1}\right)=\frac{q^{n+1}}{q-1}+O\left(q^{\varepsilon-1}\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right),$$

其中

$$O\left(q^{\varepsilon-1}\frac{q^{n+1}}{q-1}\right)=O\left(q^{\varepsilon-1}\left(\frac{q}{q-1}q^n-\frac{1}{q-1}\right)\right)=O\left(q^{n-1+\varepsilon}\right).$$

因此

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\Phi^{**}(f)=q^n\left(\frac{q}{q-1}q^n+O\left(q^{n-1+\varepsilon}\right)\right)=q^n\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q}}q^n+O\left(q^{n-1+\varepsilon}\right)\right).$$

最后由$\frac{1}{1-\frac{1}{q}}$的泰勒展开

$$\frac{1}{1-\frac{1}{q}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=1+O\left(\frac{1}{q}\right).$$

有

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\Phi^{**}(f)=q^n\left(q^n+O\left(q^{n-1}\right)+O\left(q^{n-1+\varepsilon}\right)\right)=q^{2n}+O\left(q^{2n-1+\varepsilon}\right).$$

参考文献

[1] Mentens, F. (1874) Uber einige asymptotische Gesstze der Zahlentheorie. *Crelle's Journal*, **77**, 289-338. https://doi.org/10.1515/crll.1874.77.289

[2] Walfisz, A. (1963) Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, **231**, 607.

[3] Carella, N.A. (2017) The Error Term of the Summatory Euler Phi Function. arViv: 1206.2792v5.

[4] Cohen, E. (1960) Arithmetical Function Associated with the Unitary Divisors of an Integer. *Mathematische Zeitschrift*, **74**, 66-80. https://doi.org/10.1007/BF01180473

[5] Lal, M. (1974) Iterates of the Unitary Totient Function. *Mathematics of Computation*, **28**, 301-302. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1974-0335419-3

[6] Sitaramaiah, V. and Subbarao, M.V. (2007) Unitary Analogues of Some Formulae of Ingham. *Ars Combinatoria*, **84**, 33-49.

[7] Siva Rama Prasad, V. and Dixit, U. (2006) Inequalities Related to the Unitary Analogue of Lehmer Problem. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **7**, Article 142.

[8] Skonieczna, M. (2008) Some Results on the Unitary Analogue of the Lehmer Problem. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **9**, Article 55.

[9] Sitaramachandrarao, R. and Suryanayana, D. (1973) On $\sum_{n\le x}\sigma^*(n)$ and $\sum_{n\le x}\phi^*(n)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **41**, 61-66. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0319922-9

[10] Haukkanen, P. (1998) Basic Properties of the Bi-Unitary Conxolution and Semi-Unitary Convolution. *Indian Journal of Mathematics*, **40**, 305-315.

[11] Suryanarayana, D. and Subbarao, M.V. (1980) Arithmetical Functions Associated with the Bi-Unitary Kary Divisors of an Integer. *Indian Journal of Mathematics*, **22**, 281-298.

[12] Resen, M. (2022) Number Theory in Function Fields. Springer-Verlag, New York, 1-49.

[13] 钟玉泉. 复变函数[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 185-188.