Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2697-2703
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139277

复双曲空间中测地管道上的Sasakian磁流

王江丽，石青松

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年8月14日；录用日期：2023年9月15日；发布日期：2023年9月26日

摘 要

在复双曲空间中的测地管道上，有由结构张量诱导的Sasakian磁场。带电粒子在Sasakian磁场中运动会产生具有零结构扭转的轨道。本文研究了它们在测地管道上单位切丛上的磁流，并证明了它们是彼此光滑一致的。

关键词

Sasakian磁场，轨道，结构扭转，复双曲空间

The Sasakian Magnetic Flow on the Geodesic Pipelinesin the Complex Hyperbolic Space

Jiangli Wang, Qingsong Shi

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Aug. 14th, 2023; accepted: Sep. 15th, 2023; published: Sep. 26th, 2023

Abstract

In the geodesic pipeline in the complex hyperbolic space, there is a Sasakian magnetic field induced by the structural tensor, and the charged particles move in the Sasakian magnetic field to produce an orbit with zero structural torsion. In this paper, we study their magnetic flows on the geodesic pipeline and show that they are smooth and consistent with each other.

Keywords

Sasakian Magnetic Field, Orbit, Structural Torsion, Complex Hyperbolic Space

文章引用: 王江丽, 石青松. 复双曲空间中测地管道上的 Sasakian 磁流[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2697-2703.
DOI: 10.12677/pm.2023.139277

1. 引言

在复双曲空间中的每个测地管道上都有无数个由环境空间上的复结构诱导的几乎接触度量结构，利用这种结构诱导的正则闭 2-形，可以定义这个测地管道上的磁场，称为 Sasakian 磁场或接触磁场。正如测地线给出的测地流一样，带电粒子在磁场作用下的轨道中获得了单位切丛上的磁流。即磁场的轨道在单位切丛上诱导动力系统，为了描述这个动力系统的一些几何性质，本文考虑了具有零结构扭转的轨道并进一步将其限制在复双曲空间中的测地管道上研究了两个磁流之间的关系。在文献[1]中 T Adachi 研究了单位带电粒子在 Kähler 磁场作用下形成轨道的性质，得出了 Kähler 磁流的性质依赖于磁力的大小。由于 Kähler 流形是实偶数维的，所以找出一些实奇数维流形上的自然磁场并阐明它们的一些性质是一项有趣的研究。鉴于此本文选择了 Kähler 流形的实超曲面和一个由 Kähler 形式在环境空间上诱导的 Sasakian 磁场。

为了研究奇数维流形上的磁场，在文献[2]中 Ikawa 选择了一类齐次几乎 Sasakian 流形，并对其接触度量结构诱导的磁场进行了开创性的研究。在文献[3]中 Maeda 和 T Adachi 研究 A 形超曲面上的所有测地线并对其闭合性进行了研究。在文献[4]中 T Adachi 等人研究了非平坦复空间形的 A 型实超曲面上 Sasakian 磁场的轨道，得到了轨道为圆形的情况。它们研究的对象都是一般的轨道，本文是在 Kähler 流形的实超曲面上针对具有零结构扭转的轨道进行研究并且进一步研究了两种磁流之间的关系。本文主要是以复双曲空间中的测地管道作为载体去研究具有零结构扭转的轨道，因为通过复双曲空间中的测地管道可以实现 Sasakian 空间形，所以本文的想法是按照复空间形中研究 Kähler 磁场轨道的方法在管道上考察 Sasakian 磁场的轨道，由于复双曲空间中的测地管道是具有恒定结构扭转的流形，它可以看作是 Sasakian 空间形的一类特殊流形，所以借助此类流形去研究具有零结构扭转的轨道具有十分重要的意义。通过本文的研究不仅可以提供关于复空间形上阶为 4 的 Killing 螺旋的模空间的信息而且进一步完善了奇数维流形的理论体系，同时也为下一步研究四元 Kähler 流形提供了新的思路。

2. Sasakian 磁场

定义 1 ([5])：$\left(\tilde{M},J,\langle,\rangle\right)$ 是具有复结构的 Kähler 流形，M 是 Kähler 流形的实超曲面，在 M 上对任意的切向量 $v,w\in T_pM,\forall p\in M$，由复结构 J 诱导的接触度量结构 $\left(\phi,\xi,\eta,\langle,\rangle\right)$ 满足 $\phi^2v=-v+\eta(v)\xi$，$\phi(\xi)=0$，$\eta(\xi)=1$，$\langle\phi v,\phi w\rangle=\langle v,w\rangle-\eta(v)\eta(w)$ 时，此流形称为 contact 度量流形，这里的 $\phi,\xi,\eta,\langle,\rangle$ 分别是张量场，向量场，一阶形式和黎曼度量。进一步，当接触度量结构满足 $(\nabla_v\phi)w=\langle v,w\rangle\xi-\eta(w)v$ 时，contact 度量流形称为 Sasakian 流形。

在 Sasakian 流形上有自然的闭二形 F_ϕ，满足式子 $F_\phi(u,v)=\langle v,\phi v\rangle$，其中 $u,v\in T_pM$，在 $\forall p\in M$。

引理 1：Kähler 流形中的实超曲面上的正则 2 形式 F_ϕ 是闭 2 形

证明：通过直接计算有

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_X F_\phi\right)(Y,Z) &= X\left(F_\phi(Y,Z)\right)-F_\phi(\nabla_X Y,Z)-F_\phi(Y,\nabla_X Z)\\
&= X\langle Y,\phi Z\rangle-\langle\nabla_X Y,\phi Z\rangle-\langle Y,\phi\nabla_X Z\rangle\\
&= \langle Y,(\nabla_X\phi)Z\rangle\\
&= \eta(Z)\langle AX,Y\rangle-\eta(Y)\langle AX,Z\rangle
\end{aligned}
$$

$$\left(dF_{\phi}\right)(X,Y,Z)=\left(\nabla_{X}F_{\phi}\right)(Y,Z)-\left(\nabla_{Y}F_{\phi}\right)(X,Z)-\left(\nabla_{Z}F_{\phi}\right)(X,Y)=0$$

证毕

所以由引理 1 说明了 Kähler 流形中的实超曲面上的正则 2 形式是磁场，所以定义 $F_k=kF_{\phi}$ 为 Sasakian 磁场，在 Sasakian 流形上，以弧长为参数的曲线 γ 满足 $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=k\phi\dot{\gamma}$ 时称为 Sasakian 磁场 F_k 的轨道，这与 Kähler 磁场的轨道方程很类似，即如果 $\tilde{\gamma}$ 满足式子 $\nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}}\dot{\tilde{\gamma}}=kJ\dot{\tilde{\gamma}}$ 则称 $\tilde{\gamma}$ 为 Kähler 磁场 kB_J 的轨道([6])，有 $\left\|J\dot{\tilde{\gamma}}\right\|=1$ 且 $\nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}}\left(J\dot{\tilde{\gamma}}\right)=-k\dot{\tilde{\gamma}}$ 可知 Kähler 磁场的轨道受力均匀，Sasakian 磁场 F_k 的轨道满足式子 $\left\|\phi\dot{\gamma}\right\|=\sqrt{1-\eta(\dot{\gamma})^2}$，可知 Sasakian 磁场 F_k 的轨道不一定是圆，因为由式子 $\left\|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right\|=|k|\sqrt{1-\langle\dot{\gamma},\xi\rangle^2}$ 可知 F_k 的力不一定是均匀的。所以研究实超曲面上正则磁场的轨道并不容易。为了测量 Sasakian 流形中实超曲面上 F_k 作用在其轨迹 γ 上的力，定义 γ 的结构扭转为 $\rho_{\gamma}=\langle\dot{\gamma},\xi\rangle$，角度 $\cos^{-1}\rho_{\gamma}$ 称为 γ 的接触角，当 $\rho_{\gamma}=\pm1$ 时，它是测地线，$\rho_{\gamma}=0$ 时，称轨道 γ 是具有零结构扭转的轨道，注意到沿着 γ 的结构扭转通常不是常数，所有由 $\langle\phi v,w\rangle=-\langle v,\phi w\rangle$ 可求得其微分如下

$$\rho_{\gamma}'=\nabla_{\dot{\gamma}}\langle\dot{\gamma},\xi\rangle=\langle k\phi\dot{\gamma},\xi\rangle+\langle\dot{\gamma},\phi A\dot{\gamma}\rangle=\langle\dot{\gamma},\phi A\dot{\gamma}\rangle=\frac{1}{2}\langle\dot{\gamma},(\phi A-A\phi)\dot{\gamma}\rangle。$$

显然通常而言沿轨道 γ 的结构扭转不是常数。因此为了研究零结构扭转轨道的性质，下面引进引理 2。

引理 2 ([7])：F_k 是 Kähler 流形的测地管道上的 Sasakian 磁场，则所有轨道都具有恒定的结构扭转，当且仅当形状算子 A 和结构张量 ϕ 可同时对角化。

由引理 2 可知为了研究复双曲空间中给定测地管道上的两个磁流之间的关系，因此借助测地管道为载体进一步研究其上两个磁流的关系。因为测地管道可被看作是 Sasakian 空间形的一种特殊的流形，其上的形状算子和特征向量可以同时对角化。所以对于测地管道上 Sasakian 磁场的任何轨道其结构扭转都为常数。

为了研究复双曲空间中测地管道上的具有零结构扭转的轨道，现在给出一些基本符号([8])。

$H_1^{2n+1}=\left\{z\in C^{n+1}\,\middle|\,\langle\langle z,z\rangle\rangle=-1\right\}=\left\{z\in C^{n+1}\,\middle|\,\|z\|=-1\right\}$，用单位圆 $S^1=\left\{\lambda\in C\,\middle|\,|\lambda|=1\right\}$ 作用在 H_1^{2n+1} 上即 $\lambda\cdot z=\lambda z=\left(\lambda z_0,\lambda z_1,\cdots,\lambda z_n\right)$ 用 CH^n 表示 H_1^{2n+1} 的商空间 H_1^{2n+1}/S^1，称为 n 维复双曲空间，取复空间 C^{n+1} 上的埃尔米特形 $\langle\langle,\rangle\rangle$，定义为 $\langle\langle z,w\rangle\rangle=-z_0\overline{w}_0+z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n$，这里 $z=\left(z_0,z_1,\cdots,z_n\right),w=\left(w_0,w_1,\cdots,w_n\right)\in C^{n+1}$ 定义 anti-de Sitter 空间的映射为 $\varpi:H_1^{2n+1}\to CH^n(-4)$，anti-de Sitter 空间在 z 处的切空间定义为 $T_zH_1^{2n+1}=\left\{(z,u)\in\{z\}\times C^{n+1}\,\middle|\,\mathrm{Re}\langle\langle z,u\rangle\rangle=0\right\}$ 现在将其分解为与映射 ϖ 有关的水平和垂直的子空间即 $T_zH_1^{2n+1}=\mathcal{H}_z\oplus\mathcal{V}_z$ 其中 $\mathcal{H}_z=\left\{(z,u)\in T_zH_1^{2n+1}\,\middle|\,\langle\langle z,u\rangle\rangle=0\right\}$，$\mathcal{V}_z=\left\{\left(z,\sqrt{-1}az\right)\in T_zH_1^{2n+1}\,\middle|\,a\in R\right\}$，$CH^n(-4)$ 中的管道 $B=T(r)$ 它的逆映射定义为 $\hat{B}=\varpi^{-1}\left(T(r)\right)$ 切空间定义为 $T_z\hat{B}$，定义切丛 $T^0B=\left\{v\in TB\,\middle|\,v\perp\xi\right\}$ 的水平抬升为 $T^0\hat{B}=\left\{v\in T\hat{B}\,\middle|\,v\perp\hat{\xi}\right\}$。

3. 测地管道

半径为 r 的围绕全测地线 $M^{n-1}(c;C)$ 周围的管道 $T(r)$ 称为测地管道，它是 A_1 型其中 r 满足 $r<\pi/\sqrt{c}$，注意当 $c>0$ 时，在 $CP^n(c)$ 中围绕在 $CP^{n-1}(c)$ 的管道与测地球一致，A 型超曲面要么是 A_1 型要么是 A_0 型否则为 A_2 型，而 A_1 或 A_0 型又称作 ϕ-截面曲率为常数 K 的单连通完备 Sasakian 空间形，A 型超曲面是 Hopf 超曲面，其形状算子与特征张量可同时对角化，所以由引理 2 可知测地管道是研究 Sasakian 磁场最自然的超曲面，在测地管道上 Sasakian 磁场中所有的轨道都具有恒定的结构扭转，所以研究结构扭转是一个非常重要的特征([8])。

测地管道上带电粒子在 Sasakian 磁场作用下会形成无数条轨道，为了研究它们之间的关系引进引理 3。

引理 3 ([9])：γ_i 是复双曲空间形中测地管道上的正则磁场 F_{k_i} 的轨道，两个轨道 γ_i 彼此一致当且仅当以下条件成立。

$$\left|\rho_{\gamma_1}\right| = \left|\rho_{\gamma_2}\right| = 1,$$

$$\rho_{\gamma_1} = \rho_{\gamma_2} = 0 \text{ 且 } |k_1| = |k_2|,$$

$$0 < \left|\rho_{\gamma_1}\right| = \left|\rho_{\gamma_2}\right| < 1 \text{ 且 } k_1\rho_{\gamma_1} = k_2\rho_{\gamma_2}。$$

证明：因为 M 的等距映射 φ 在 $M^n(c;C)$ 里是等变的，可发现 $d\varphi(\xi_x) = \pm\xi_{\varphi(x)}$，因此等距映射 φ 保留了轨道的结构扭转的绝对值。另一方面，分别取正交于 ξ_x 和 ξ_y 的单位切向量 $u \in T_xM$ 和 $v \in T_yM$，M 上的等距映射 $\varphi_\pm$ 满足等式 $\varphi_\pm(x) = y$，$d\varphi_\pm(u) = v$，且 $d\varphi_+(\xi_x) = \xi_y$，$d\varphi_-(\xi_x) = -\xi_y$，这表明如果 $\left|\rho_{\gamma_1}\right| = \left|\rho_{\gamma_2}\right|$ 则会有满足式子 $\varphi(\gamma_1(0)) = \gamma_2(0)$ 和 $d\varphi(\dot{\gamma}_1(0)) = \dot{\gamma}_2(0)$ 的等距映射 φ 存在，注意到当 $\rho_\gamma = \pm 1$ 时，磁场 F_k 的轨道为测地线，如果 γ 为磁场 F_k 的轨道，则曲线 $\sigma(t) = \gamma(-t)$ 为 F_{-k} 的轨道，通过常微分方程解的唯一性可得出此结论。

证毕。

4. 复双曲空间中测地管道上具有零结构扭转的轨道

在研究给定测地管道上的 Sasakian 磁流之间的关系时，这一节先给出带电粒子在 Sasakian 磁场作用下产生具有零结构扭转的轨道的表达式。现在先给出具有零结构扭转的轨道应该满足的条件。

命题 1：在具有恒定 ϕ 截面曲率 K 的完全单连通 Sasakian 空间形式上，磁场 F_k 的具有零结构扭转的轨道应该满足以下条件。

当 $K=1$，它是长度为 $2\pi/\sqrt{k^2+1}$ 的闭曲线

当 $K>-3$ 且 $K \neq 1$，它是闭合曲线当且仅当 $|k| = (p-q)\sqrt{K+3}/(2\sqrt{pq})$

当 $K=-3$，它是无界的

$K<-3$ 时分两种情况

它是闭曲线当且仅当 $|k| = (p+q)\sqrt{|K|-3}/(2\sqrt{pq})$。

它是无边界当且仅当 $|k| \le \sqrt{|K|-3}$ 特别地，Legendre 测地线是无界的。

我简要说明一下此定理的证明，结合引理 5 和黎曼连接的关系来证明，分为两种情况讨论，当 $k=0$ 时，具有零结构扭转的轨道的外在形状是圆，因此它是长度为 $4\pi/\sqrt{c+4}$ 的闭合曲线，然后当 $k \neq 0$ 取标准球上的 Hopf 映射 $S^{2n+1} \to CP^n$ 或者是 anti-de Sitter 空间的 Hopf 映射 $H_1^{2n+1} \to CH^n(-4)$，考虑外在形状的水平抬升，将其视为 C^{n+1} 里的曲线，进一步得到了它的常微分方程，接下来根据微分方程的特征方程的解中所包含的 ϕ-截面曲率 K，对 K 做分类讨论得到特征方程的解，所以进一步可得出具有零结构扭转的轨道的闭合性。

接下来根据文献[7]给出复双曲空间 $CH^n(c)$ 中测地管道上 F_k 的具有零结构轨道的具体表达式。

当 $|k| > 2/\cosh r$ 时，可知道具有零结构扭转轨道的表达式为

$$\hat{\gamma}(t) = A\exp\left(\sqrt{-1}\left(k+\sqrt{k^2-\left(4/\cosh^2 r\right)}\right)t/2\right) + B\exp\left(\sqrt{-1}\left(k-\sqrt{k^2-\left(4/\cosh^2 r\right)}\right)t/2\right) + C$$

取 $\hat{\gamma}(0) = z \in C^{n+1}$，$\dot{\hat{\gamma}}(0) = (z,v) \in \{z\} \times C^{n+1}$ 且 $N_{\varpi(z)} = (z,u) \in \{z\} \times C^{n+1}$，

向量 $A,B,C \in C^{n+1}$ 形式为

$$A=-\frac{\cosh r}{2\sqrt{k^2\cosh^2 r-4}}\left\{\left(k\cosh r-\sqrt{k^2\cosh^2 r-4}\right)\left(\cosh rz+\sinh ru\right)+2\sqrt{-1}v\right\}$$

$$B=\frac{\cosh r}{2\sqrt{k^2\cosh^2 r-4}}\left\{\left(k\cosh r+\sqrt{k^2\cosh^2 r-4}\right)\left(\cosh rz+\sinh ru\right)+2\sqrt{-1}v\right\}$$

$$C=-\sinh^2 rz-\left(\sinh r\cosh r\right)u$$

当 $|k|<2/\cosh r$ 时，具有零结构扭转轨道的表达式为

$$\hat{\gamma}(t)=A\exp\left(\sqrt{-1}kt/2\right)\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(4/\cosh^2 r\right)-k^2}t\right)+B\exp\left(\sqrt{-1}kt/2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\left(4/\cosh^2 r\right)-k^2}t\right)+C$$

其中 $A,B,C\in C^{n+1}$ 可以给出如下形式

$$A=\frac{\cosh r}{2\sqrt{4-k^2\cosh^2 r}}\left\{\left(\sqrt{4-k^2\cosh^2 r}-\sqrt{-1}k\cosh r\right)\left(\cosh rz+\sinh ru\right)+2v\right\}$$

$$B=\frac{\cosh r}{2\sqrt{4-k^2\cosh^2 r}}\left\{\left(\sqrt{4-k^2\cosh^2 r}+\sqrt{-1}k\cosh r\right)\left(\cosh rz+\sinh ru\right)-2v\right\}$$

$$C=-\sinh^2 rz-\left(\sinh r\cosh r\right)u$$

5. 测地管道上的 Sasakian 磁流

在这一节，研究了复双曲空间中测地管道上 Sasakian 磁场 F_k 的 Sasakian 磁流。求得了使得具有零结构扭转的轨道流与具有零结构扭转的测地流达到同值的测地线的速度。在研究之前对 Sasakian 磁流进行定义。

定义 2：单位切丛束 UM 上的磁流定义为 $F_k\varphi_t(v):UM\to UM$，$F_k\varphi_t(v)=\dot{\gamma}_u(t)$，$\forall v\in UM$，这里 γ_u 表示 F_k 的法向轨道且满足 $\dot{\gamma}_u(0)=v$。

现在说明黎曼流形 M 两个磁流共轭需要的条件。

定义 3 ([8])：黎曼流形 N 上两个流 φ_t,ψ_t 称为光滑共轭，如果存在微分同胚 f 与常数 α，使得对 $\forall t$ 有 $\psi_t=f^{-1}\circ\varphi_{\alpha t}\circ f$。

本篇论文的研究结果如下：

定理 1：设 $T(r)$ 是复双曲空间中围绕全测地线 $CH^{n-1}\in CH^n(c)$ 的管道，F_k 为 $T(r)$ 上的 sasakian 磁场，则 sasakian 磁流 $F_k^0\varphi_t$ 的特点取决于磁力的绝对值 $|k|$。

1) 当磁力 $|k|>2/\cosh r$ 时，则具有零结构扭转的轨道流 $F_k^0\varphi_t$ 与具有零结构扭转的测地流 φ_t^0 彼此光滑共轭，即存在微分同胚 f_k，使得

$$F_k^0\varphi_t=f_k^{-1}\cdot\varphi^0_{\sqrt{k^2\cosh^2 r-4t}}\cdot f_k。$$

2) 当磁力 $|k|<2/\cosh r$ 时，则具有零结构扭转的轨道流 $F_k^0\varphi_t$ 与具有零结构扭转的测地流 φ_t^0 彼此光滑共轭，即存在微分同胚 f_k，使得

$$F_k^0\varphi_t=f_k^{-1}\cdot\varphi^0_{\sqrt{4-k^2\cosh^2 rt}}\cdot f_k。$$

证明：分两种情况，首先当磁力 $|k|>2/\cosh r$ 时，首先注意到在 $UCH^n(-4)$ 上的具有零结构扭转的测地流 φ_t 可以用矩阵表示为

$$\varphi_t\left(d\pi\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=d\pi\left(A_0(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right),$$

其中

$$A_0(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{\cosh r}\cdot I & \sin\frac{t}{\cosh r}\cdot I\\ -\sin\frac{t}{\cosh r}\cdot I & \cos\frac{t}{\cosh r}\cdot I\end{pmatrix}\in Mat(2(n+1);C)$$

这里$\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}$表示$(z\quad u)$的转置，$I\in Mat(n+1,C)$表示单位矩阵，这里

$A_k(t)\in Mat(2(n+1),C)$定义两个函数

$$\mathcal{G}(t)=\cos\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{4}{\cosh^2 r}}t,\ \mathcal{H}(t)=\sin\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{4}{\cosh^2 r}}t\ ,$$

$$A_k(t)=\mathcal{G}(t)\cdot\begin{pmatrix}I & O\\ O & I\end{pmatrix}+\mathcal{H}(t)\cdot\frac{\cosh r}{\sqrt{k^2\cosh^2 r+4t}}\cdot\begin{pmatrix}-kiI & 2I\\ 2I & kiI\end{pmatrix}$$

这里$O\in Mat(n+1,C)$表示零矩阵，因为磁场 Sasakian 的具有零结构扭转的轨道流$F_k^0\varphi_t$可以表示为

$F_k^0\varphi_t\left(d\pi\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=d\pi\left(\mathrm{e}^{-ikt/2}\cdot A_k(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)=d\pi\left(A_k(t)\begin{pmatrix}z\\u\end{pmatrix}\right)$，$I_n$表示$n\times n$阶单位矩阵

设矩阵$P_k(t)=\begin{pmatrix}p_{11}^{(k)}I_n & p_{12}^{(k)}I_n\\ p_{21}^{(k)}I_n & p_{22}^{(k)}I_n\end{pmatrix}$其中$P_{11}^{(k)},P_{12}^{(k)},P_{21}^{(k)},P_{22}^{(k)}$向量取值如下

$$P_{11}^{(k)}=\left(-2i\Big/\sqrt{-4+\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}+k\cosh r\right)^2}\right),$$

$$P_{12}^{(k)}=\left(2i\Big/\sqrt{-4+\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}-k\cosh r\right)^2}\right),$$

$$P_{21}^{(k)}=\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}+k\cosh r\Big/\sqrt{-4+\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}+k\cosh r\right)^2}\right),$$

$$P_{22}^{(k)}=\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}-k\cosh r\Big/\sqrt{-4+\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}-k\cosh r\right)^2}\right).$$

得到$P_k^{-1}\cdot A_k(t)\cdot P_k=\begin{pmatrix}\mathcal{G}_k+i\mathcal{H}_k & O\\ O & \mathcal{G}_k-i\mathcal{H}_k\end{pmatrix}$。

所以有$Q_k^{-1}\cdot A_k(t)\cdot Q_k=A_0\left(\sqrt{k^2\cosh^2 r+4}\,t/2\right)$，$Q_k=P_k\cdot P_0^{-1}$由于$A_0(t)$对应于复双曲空间中 Legendre 测地流$\varphi_t$且$Q_k$作用于水平子束$\mathcal{H}_Z$上且与$S^1$-*fiber* 作用可交换，所以它在$UCH^n(-4)$上诱导了一个微分同胚映射$f_k$使得

$$F_k^0\varphi_t=f_k^{-1}\cdot\varphi^0_{\sqrt{k^2\cosh^2 r-4t}}\cdot f_k\text{。}$$

同理，当磁力$|k|<2/\cosh r$时，也存在一个微分同胚映射f_k使得

$$f_k^{-1}\cdot\varphi^0_{\sqrt{4-k^2\cosh^2 rt}}\cdot f_k\text{。}$$

6. 总结

本文通过建立轨道在 Kähler 磁场与 Sasakian 磁场下运动所获得的磁流之间的对应关系，根据研究带电粒子在 Kähler 磁场运动下得到的轨道性质，从而想到研究带电粒子在 Sasakian 磁场运动下得到的轨道性质并进一步建立了轨道流与测地流之间的合同关系。方法是将轨道流表示为复欧氏空间的子集的矩阵，

利用矩阵的性质来刻画轨道流与测地流的合同关系，通过本文的研究不仅可以提供关于复空间形上阶为 4 的 Killing 螺旋的模空间的信息而且进一步完善了奇数维流形的理论体系，同时也为下一步研究四元 Kähler 流形提供了新的思路。

参考文献

[1] Adachi, T. (1995) Kähler Magnetic Flows on a Manifold of Constant Holomorphicsectional Curvature. *Tokyo Journal of Mathematics*, **18**, 473-483. https://doi.org/10.3836/tjm/1270043477

[2] Ikawa, O. (2004) Motion of Electric Charged Particles in Homogeneous Kähler Manifolds and Homogeneous Sasakian Manifolds. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **14**, 283-302.

[3] Adachi, T. and Maeda, S. (2020) Length Spectrum of Complete Simply Connected Sasakian Space Forms. *Differential Geometry and Its Applications*, **70**, Article 10162513. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2020.101625

[4] Bao, T. and Adachi, T. (2009) Circlular Trajectories on Real Hypersurfaces in a Nonflat Complex Space. *Journal of Geometry*, **96**, 41-55. https://doi.org/10.1007/s00022-010-0032-4

[5] Cabrerizo, J.L., Fernandez, M. and Gomez, J.S. (2009) The Contact Magnetic Flow in 3D Sasakian Manifolds. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, **42**, 195-201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/19/195201

[6] Druta-Romaniuc, S.L., Inoguchi, J., Munteanun, M.I. and Nistor, A.I. (2015) Magnetic Curves in Sasakian Manifolds. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **22**, 428-447. https://doi.org/10.1080/14029251.2015.1079426

[7] Adachi, T. (2008) Trajectories on Geodesic Sphere in a Non-Flat Complex Space. *Journal of Geometry*, **90**, 1-29. https://doi.org/10.1007/s00022-008-1941-3

[8] Sunada, T. (1993) Magnetic Flows on a Riemann Surface. *Proceedings of KAIST Mathematics Workshop*, **8**, 93-108.

[9] 丘成桐, 孙理察. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.