**Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 94-103**
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141011

# 形式三角矩阵环上的相对强Gorenstein投射模

**张会晶**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年12月7日；录用日期：2024年1月10日；发布日期：2024年1月18日

## 摘 要

设 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环，其中 $A,B$ 是环，$U$ 是 $(B,A)$-双模。本文描述了某些情况下，**T** 上的相对强 **Gorenstein** 投射模的结构。

## 关键词

形式三角矩阵环，相对强 **Gorenstein** 投射模

# Relative Strongly Gorenstein Projective Modules over Formal Triangular Matrix Rings

**Huijing Zhang**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. $7^{th}$, 2023; accepted: Jan. $10^{th}$, 2024; published: Jan. $18^{th}$, 2024

## Abstract

**Let** $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ **be a formal triangular matrix ring, where A and B are rings and** $U$

文章引用: 张会晶. 形式三角矩阵环上的相对强Gorenstein投射模[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 94-103.
DOI: 10.12677/pm.2024.141011

**is $(B, A)$-bimodule. In this paper, we characterize the structure of relative strongly Gorenstein projective modules over $T$ under some conditions.**

## Keywords

**Formal Triangular Matrix Ring, Relative Strongly Gorenstein Projective Module**



## 1. 引言

本文所提到的环均指有单位元的结合环, 模均指酉模.用$R$-Mod ( Mod-$R$)表示左(右)$R_$模,设$C \in R$-Mod，用$\mathrm{Add}_R(C)$表示 $C$ 的拷贝直和的直和项构成的类，用$\mathrm{Prod}_R(C)$ 表示 $C$ 的拷贝直积的直和项构成的类,三角矩阵环在代数的表示论和环论中很有用,它通常用于创建示例和反例,这使得环模理论变得具体化,很多作者从不同角度去研究了 $T$ .1990 年, Enochs 等人在文献 [1] 中引入了 Gorenstein 投射(内射,平坦)模并研究了其性质. 章璞在文献 [2] 中研究了 Gorenstein 代数 $T$ 上的 Gorenstein 投射模的结构. 2020 年,毛立新在文献 [3] 中研究了 $T$ 上的强 Gorenstein 投射(内射,平坦)模. 2021 年, Driss Bennis 等人在文献 [4] 中研究了 $T$ 上的相对 Gorenstein 维数. 本文根据文献 [3,4] 去定义和研究形式三角矩阵环上的相对强 Gorenstein 投射模.

设 $A, B$ 是环, $U$ 是 $(B, A)$-双模. 设

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B, u \in U\},$$

其乘法定义为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ua' + bu' & bb' \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ u & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ u' & b' \end{pmatrix} \in T$, 则 $T$ 关于矩阵的加法和乘法构成一个环, 并称之为形式下三角矩阵环.

左 $T$-模范畴中的对象可以用三元组 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 来表示, 其中 $M_1$ 是左 $A$-模, $M_2$ 是左 $B$-模, $\varphi^M : U \otimes_A M_1 \to M_2$ 是 $B$-模同态. 任意的两个左 $T$-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的态

射为 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, 其中 $f_1$: $M_1 \to N_1$ 是 $A$-模同态, $f_2$: $M_2 \to N_2$ 是 $B$-模同态, 并且满足如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_A M_1 & \xrightarrow{1 \otimes f_1} & U \otimes_A N_1 \\ \varphi^M \downarrow & & \downarrow \varphi^N \\ M_2 & \xrightarrow{\quad f_2 \quad} & N_2 \end{array}$$

给定 $T$-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 有 $\widetilde{\varphi^M}$: $M_1 \to \mathrm{Hom}_B(U, M_2)$, 其中 $\widetilde{\varphi^M}(x)(u) = \varphi^M(u \otimes x)$, $x \in M_1$, $u \in U$.

左 $T$-模序列 $0 \longrightarrow \begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix}_{\varphi^{M'}} \longrightarrow \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M} \longrightarrow \begin{pmatrix} M_1'' \\ M_2'' \end{pmatrix}_{\varphi^{M''}} \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 $0 \to M_1' \to M_1 \to M_1'' \to 0$ 和 $0 \to M_2' \to M_2 \to M_2'' \to 0$ 正合.

在本文中, $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环,给定左 $T$-模 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ ,$B$-模 $\mathrm{Coker}\,\varphi^M$记为$\bar{M}_2$,$A$- 模 $\ker \widetilde{\varphi^M}$,记为$\underline{M_1}$, 根据 [2], 对于模范畴T-Mod 和积范畴$A-\mathrm{Mod} \times B-\mathrm{Mod}$, 我们任取$M = \binom{M_1}{M_2}_{\varphi^M} \in T-\mathrm{Mod}$, $\binom{f_1}{f_2}$是$T$-Mod 中的态射,$(M_1, M_2) \in A - \mathrm{Mod} \times B - \mathrm{Mod}$, $(f_1, f_2)$是$A - \mathrm{Mod} \times B - \mathrm{Mod}$ 则存在以下函子:

$\mathbf{p} : A-\mathrm{Mod} \times B-\mathrm{Mod} \to T-\mathrm{Mod}$, $\mathbf{p}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \oplus M_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \\ 1 \otimes_A f_1 \oplus f_2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{h} : A-\mathrm{Mod} \times B-\mathrm{Mod} \to T-\mathrm{Mod}$, $\mathbf{h}(M_1, M_2) = \binom{M_1 \oplus \mathrm{Hom}_B(U, M_2)}{M_2}$, $\mathbf{h}(f_1, f_2) = \binom{f_1 \oplus \mathrm{Hom}_B(U, f_2)}{f_2}$.

$\mathbf{q} : T-\mathrm{Mod} \to A-\mathrm{Mod} \times B-\mathrm{Mod}$, $\mathbf{q}\binom{M_1}{M_2} = (M_1, M_2)$, $\mathbf{q}\binom{f_1}{f_2} = (f_1, f_2)$.

注意到，$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$和$(\mathbf{q}, \mathbf{h})$是伴随对，显然$\mathbf{q}$是正合的,特别地，$\mathbf{p}$保持投射对象，$\mathbf{h}$保持内射对象.

## 2. 预备知识

如果不特别说明, 本文中 $T$ 总表示下三角矩阵环 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ {}_BU_A & B \end{pmatrix}$.

**定义** 2.1 [5] 称投射模的正合列$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$是一个完全投射分解,如果对任意投射R-模Q,有$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}, Q)$正合.

**定义** 2.2 [ [6],定义2.2] 给定任意$C \in R-\mathrm{Mod}$,称R-模M 为相对Gorenstein 投射(即:Gc-投射模),如果存在$\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Add}_R(C))$ 正合R- 模的正合列：

$$\mathbf{X} = \ \cdots \to P_1 \to P_0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots ,$$

其中:对任意$i \in \mathbb{N}$,$P_i$为投射模,$A^i \in \mathrm{Add}_R(C)$,使得$M \cong \mathrm{Im}\Big(P_0 \to A^0\Big)$

**定义** 2.3 [7] 称R-模M为强Gorenstein投射(即:SG-投射模),如果存在一个完全投射分解$\cdots \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$ , 使得$M \cong \ker(f)$

**定义** 2.4 [5] 称$\mathcal{X}$投射可解，如果$\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{X}$, 对任意短正合列

$$0 \quad \to \quad X' \quad \to \quad X \quad \to \quad X'' \quad \to \quad 0,$$

其中$X'' \in \mathcal{X}$，有$X' \in \mathcal{X}'$与$X \in \mathcal{X}$ 等价. 称$\mathcal{X}$内射可解，如果$\mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{X}$,对任意短正合列

$$0 \quad \to \quad X' \quad \to \quad X \quad \to \quad X'' \quad \to \quad 0,$$

其中$X' \in \mathcal{X}$，有$X \in \mathcal{X}'$ 与$X'' \in \mathcal{X}$ 等价.

**定义** 2.5 [5] 对任意R-模类$\mathcal{X}$，定义左正交类

$${}^{\perp}\mathscr{X} = \{M \in \mathscr{M}(R) \mid \mathrm{Ext}^i_R(M, X) = 0?X \in \mathscr{X}, 9?i > 0\},$$

右正交类

$$\mathscr{X}^{\perp} = \{N \in \mathscr{M}(R) \mid \mathrm{Ext}^i_R(X, N) = 0?X \in \mathscr{X}, 9?i > 0\},$$

**定义** 2.6 [5] 称正合列$\mathbf{X} = 0 \to M \to X^0 \to X^1 \to \cdots$是任意模M的右$\mathcal{X}$分解,其中对任意$n \geqslant 0, X^n \in \mathcal{X}$. 如果序列满足对任意$Y \in \mathcal{X}$,有$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, Y)$正合，则称$\mathbf{X}$ 是M 的余真右$\mathcal{X}$分解.

**定义** 2.7 [ [8],定义3.2] 设$(C_1, C_2) \in A\text{-}Mod \times B\text{-}Mod$,$C = \mathbf{p}\,(C_1, C_2)$,称双模${}_BU_A$为C-相容的，如果以下两个条件成立:

(a)对任意$A\text{-}Mod$中的正合列$\mathbf{X}_1 : \cdots \to P_1^1 \to P_1^0 \to C_1^0 \to C_1^1 \to \cdots$,其中对任意$i \in \mathbb{N}$,$P_1^i \in \mathcal{P}(A)$,$C_1^i \in \mathrm{Add}_A(C_1)$, 复形$U \otimes_A \mathbf{X}_1$ 是正合的.

(b)对任意$B\text{-}Mod$中$\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Add}_B(C_2))$正合的正合列$\mathbf{X}_2 : \cdots \to P_2^1 \to P_2^0 \to C_2^0 \to C_2^1 \to \cdots$, 其中对任意$i \in \mathbb{N}$,$P_2^i \in \mathcal{P}(B)$,$C_2^i \in \mathrm{Add}_B(C_2)$, 复形$\mathrm{Hom}_B\left(\mathbf{X}_2, U \otimes_A Add_A\left(C_1\right)\right)$ 是正合的.

进一步,如果满足(b),(c),称双模${}_BU_A$为弱C-相容的.

(c)对任意$A\text{-}Mod$中$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Add}_A(C_1))$的正合列$\mathbf{X}_1 : \cdots \to P_1^1 \to P_1^0 \to C_1^0 \to C_1^1 \to \cdots$,其中对任意$i \in \mathbb{N}$,$P_1^i \in \mathcal{P}(A)$,$C_1^i \in \mathrm{Add}_A(C_1)$, 复形$U \otimes_A \mathbf{X}_1$ 是正合的.

**引理** 2.8 [ [4],引理2.6] 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$,$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}_{\varphi N}$是两个T-模,$n \geq 1$是整数,则有以下自然同构:

1) 如果$\mathrm{Tor}^A_{1 \leq i \leq n}(U, M_1) = 0$,那么:$\mathrm{Ext}^n_T(\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix}, N) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M_1, N_1)$;

2) $\mathrm{Ext}_T^n(\begin{pmatrix} 0 \\ M2 \end{pmatrix}, N) \cong \mathrm{Ext}_B^n(M_2, N_2)$;

3) $\mathrm{Ext}_T^n(M, \begin{pmatrix} N_1 \\ 0 \end{pmatrix}) \cong \mathrm{Ext}_A^n(M_1, N_1)$;

4) 如果$\mathrm{Ext}_B^{1\le i\le n}(U, N_2) = 0$,那么:$\mathrm{Ext}_T^n(M, \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(U, N_2) \\ N_2 \end{pmatrix}) \cong \mathrm{Ext}_B^n(M_2, N_2)$.

**引理** 2.9 [ [4],引理4] 设$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_{\varphi^X} \in T\text{-}Mod$ ,$(C_1, C_2) \in A\text{-}Mod \times B\text{-}Mod$, 则

$X \in \mathrm{Add}_T(\mathbf{p}(C_1, C_2))$当且仅当1) $X \cong \mathbf{p}\left(X_1, \overline{X_2}\right)$; 2) $X_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$ , $\overline{X_2} \in \mathrm{Add}_B(C_2)$. 此时有$\varphi^X$是单射.

**定理** 2.10 [ [9],定理3.1] 设$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi M} \in T\text{-}Mod$ ,$M \in \mathcal{P}(T)$ 当且仅当$M_1 \in \mathcal{P}(A)$,$\overline{M_2} \in \mathcal{P}(B)$,以及$\varphi^M$ 是单射.

## 3. 形式三角矩阵环上的相对强 Gorenstein 投射模

首先给出相对强Gorenstein投射模的定义,再给出相关的几个定理.

**定义** 3.1 设C为左R-模，称左R-模M为SGc-投射模，如果存在$\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Add}_R(C))$ 正合R-模的正合列：$\mathbf{X} = \quad \cdots \to P \to P \to Q \to Q \to \cdots$ 其中:P为投射模，$Q \in \mathrm{Add}_R(C)$，使得$M \cong \mathrm{Im}(P \to Q)$.

我们用$\boldsymbol{SG}_{\mathrm{C}}P(R)$表示所有SGc-投射左R-模的类.

特别地，当C=R时，$\boldsymbol{SG}_{\mathrm{C}}P(R)$=$\boldsymbol{SG}P(R)$.

**引理** 3.21 每个投射模是SGc-投射模,所有相对强Gorenstein投射R- 模的类$\boldsymbol{SG}_{\mathrm{C}}P(R)$是投射可解的..

**引理** 3.3 R-模M是SGc-投射模，则M有一个余真右$\mathrm{Add}_R(C)$- 分解.

**引理** 3.4 若$M \in^{\perp} Add_R(C)$, 并且M有一个余真右$\mathrm{Add}_R(C)$- 分解,则$M \in SG_CP(R)$.

**引理** 3.5 假设${}_AC_1$ , ${}_BC_2$是半对偶的,$C = \mathbf{p}(C_1, C_2)$ 是左T-模,${}_BU_A$ 是弱C- 相容的,则有:

1.如果$M_1 \in SG_{C_1}P(A)$，那么$\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

2.如果$M_2 \in SG_{C_2}P(B)$，那么$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

**证明** 1.假设$M_1 \in SG_{C_1}P(A)$, 则存在$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Add}_A(C_1))$ 正合的正合列

$$\mathbf{X}_1 : \cdots \to P_1 \to P_1 \to Q_1 \to Q_1 \to \cdots,$$

使得$M_1 \cong \mathrm{Im}\Big(P_1 \to Q_1\Big)$，其中:$P_1 \in \mathcal{P}(A)$，$Q_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$. 由于U是弱C-相容的，则有复形$U \otimes_A \underline{X}_1$在B-Mod中正合，所以有如下复形正合列

$$\mathbf{p}(\mathbf{X}_1, 0){:}\cdots \to \begin{pmatrix} P_1 \\ U \otimes_A P_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P_1 \\ U \otimes_A P_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q_1 \\ U \otimes_A Q_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q_1 \\ U \otimes_A Q_1 \end{pmatrix} \to \cdots$$

其中

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix} \cong \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} P_1 \\ U \otimes_A P_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q_1 \\ U \otimes_A Q_1 \end{pmatrix}\right)$$

显然，由引理2.9，2.10 $\mathbf{p}\Big(P_1, 0\Big) = \begin{pmatrix} P_1 \\ U \otimes_A P_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(T)$，

$$\mathbf{p}(Q_1, 0) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ U \otimes_A Q_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_T(C)$$

设$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_{\varphi^X} \in \mathrm{Add}_T(C)$, 由引理2.9, 有$X_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$.

用伴随性,得到$\mathrm{Hom}_T(\mathbf{p}(\mathbf{X}_1, 0), X) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathbf{X}_1, X_1)$ 是正合的.

因此$\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

2.假设$M_2 \in SG_{C_2}P(B)$, 则存在$\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Add}_B(C_2))$ 正合的正合列

$$\mathbf{X}_2 : \cdots \to P_2 \to P_2 \to Q_2 \to Q_2 \to \cdots,$$

使得$M_2 \cong \mathrm{Im}\Big(P_2 \to Q_2\Big)$，其中:$P_2 \in \mathcal{P}(B)$，$Q_2 \in \mathrm{Add}_B(C_2)$. 显然,有复形正合列

$$\mathbf{p}(0, \underline{\boldsymbol{X}}_2){:}\ \cdots \to \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \end{pmatrix} \to \cdots$$

其中$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \cong \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \end{pmatrix}\right)$

显然，由引理2.9，2.10 $\mathbf{p}\Big(0, P_2\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}(T)$，$\mathbf{p}(0, Q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_T(C)$

设$Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}_{\varphi^X} \in \mathrm{Add}_T(C)$，由引理2.9，有 $Y \cong \mathbf{P}\left(Y_1, \overline{Y}_2\right)$，$Y_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$，$\overline{Y}_2 \in \mathrm{Add}_B(C_2)$ .

用伴随性,有

$$\mathrm{Hom}_T\left(\mathbf{p}(0, X_2), Y\right) = \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ (U \otimes_A Y_1) \oplus \overline{Y}_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ (U \otimes_A Y_1) \end{pmatrix}\right) \oplus \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{Y}_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\cong \mathrm{Hom}_B\left(\boldsymbol{X}_2, U \otimes_A Y_1\right) \oplus \mathrm{Hom}_B\left(\boldsymbol{X}_2, \overline{Y}_2\right)$ 是正合的. 从而$\mathrm{Hom}_T\left(\mathbf{p}(0, X_2), Y\right)$是正合的，因此$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

**引理** 3.6 假设${}_AC_1$，${}_BC_2$是半对偶的, $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$,$C=\mathbf{p}\left(C_1, C_2\right)$是左T-模,如果${}_BU_A$ 是C-相容的，则以下两条等价:

1) M是相对强Gorenstein投射的.

2) $\varphi^M$是单射,$M_1 \in SG_{C_1}P(A)$,$\bar{M}_2 := \mathrm{Coker}\varphi^M \in SG_{C_2}P(B)$.

**证明** (2) $\Rightarrow$ 1):因为$\varphi^M$是单射,所以有正合列:$0 \to U \otimes_A M_1 \xrightarrow{\varphi^M} M_2 \to \bar{M}_2 \to 0$. 从而有$T-$Mod中的正合列:$0 \to \begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix} \to M \to \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{M}_2 \end{pmatrix} \to 0$.

又$M_1 \in SG_{C_1}P(A)$，由引理3.5知,$\begin{pmatrix} M_1 \\ U \otimes_A M_1 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

$\bar{M}_2 \in SG_{C_2}P(B)$，由引理3.5知,那么$\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix} \in SG_CP(T)$.

因为$SG_CP(T)$投射可解，所以$M \in SG_CP(T)$.

(1) $\Rightarrow$ (2):$M \in SG_CP(T)$,由定义,存在$\mathrm{Hom}_T(-, \mathrm{Add}_T(C))$正合T-模的正合列:

$$\boldsymbol{X} = \cdots \to \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}_{\phi^P} \to \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}_{\phi^P} \to \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_{\phi^{C'}} \to \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_{\phi^{C'}} \to \cdots,$$

其中$C'=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_{\varphi^{C'}} \in \mathrm{Add}_T(C)$,$P=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}_{\varphi^p} \in \mathcal{P}(T)$, 使得$M \cong \mathrm{Im}\left(P \to C'\right)$

DOI: 10.12677/pm.2024.141011

由2.9,2.10,那么有正合列:

$$\boldsymbol{X}_1 : \cdots \to P_1 \to P_1 \to C_1 \to C_1 \to \cdots,$$

其中$P_1 \in \mathcal{P}(A)$,$C_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$,使得$M_1 \cong \mathrm{Im}\Big(P_1 \to C_1\Big)$.

因为${}_BU_A$ 是C-相容的，复形$U \otimes_A X_1$是正合的，且有$U \otimes_A M_1 \cong \mathrm{Im}\Big(U \otimes_A P_1 \to U \otimes_A C_1\Big)$.

如果$l_1 : M_1 \to \mathbb{C}_1$，$l_2 : M_2 \to \mathbb{C}_2$是包含映射，那么$1_U \otimes l_1$ 是单的，且有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_A M_1 \arrow[r, "1_U \otimes l_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U \otimes_A C_1 \arrow[d, "\varphi^{C'}"] \\
M_2 \arrow[r, "l_2"] & C_2
\end{tikzcd}$$

由2.9,2.10$\varphi^{C'}$,$\varphi^P$是单的,从而$\varphi^M$是单的,则有以下列正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & U \otimes P_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes P_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes C_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes C_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \overline{P_2} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{P_2} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{C_2} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{C_2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为第一行,第二行正合,所以有$B-\mathrm{Mod}$中的正合列:

$$\bar{\boldsymbol{X}}_2 : \cdots \to \overline{P_2} \to \overline{P_2} \to \overline{C_2} \to \overline{C_2} \to \cdot\cdot,$$

其中$\overline{P_2} \in \mathcal{P}(B)$,$\overline{C_2} \in \mathrm{Add}_B(C_2)$, 使得$\bar{\boldsymbol{X}}_2 \cong \mathrm{Im}\left(\overline{P_2} \to \overline{C_2}\right)$.

$\boldsymbol{X}_1$是$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Add}_A(C_1))$-正合,$\bar{\boldsymbol{X}}_2$ 是$\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Add}_B(C_2))$-正合.

设$X_1 \in \mathrm{Add}_A(C_1)$,$X_2 \in \mathrm{Add}_B(C_2)$, 那么$\mathbf{p}(X_1, 0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_T(C)$,$\mathbf{p}(0, X_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Add}_T(C)$.

所以由伴随同构:$\mathrm{Hom}_B\left(\bar{X}_2, X_2\right) \cong \mathrm{Hom}_T(X, \mathbf{p}(0, X_2))$ 是正合,所以$\bar{M}_2 \in SG_{C_2}P(B)$.

由2.9,注意到$C^{'} \cong \mathbf{p}\left(C_1, \overline{C_2}\right)$.

由2.10及${}_BU_A$ 是C-相容,则$\mathrm{Ext}_T^1\left(C', \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Ext}_B^1\left(\overline{C_2}, U \otimes_A X_1\right) = 0$

用$\mathrm{Hom}_T(\boldsymbol{X}, -)$作用可裂正合列:$0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$, 得到复形正合列:

$$0 \to \mathrm{Hom}_T\left(X, \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{Hom}_T\left(X, \begin{pmatrix} X_1 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{Hom}_T\left(X, \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \to 0.$$

由伴随同构:$\mathrm{Hom}_T\left(X, \begin{pmatrix} 0 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(\bar{\boldsymbol{X}}_2, U \otimes_A X_1\right)$,$\mathrm{Hom}_T\left(X, \binom{X_1}{0}\right) \cong \mathrm{Hom}_A\left(X_1, X_1\right)$.

注意到$\mathrm{Hom}_T\left(X, \begin{pmatrix} X_1 \\ U \otimes_A X_1 \end{pmatrix}\right)$是正合的，

又因为${}_BU_A$ 是C-相容的，所以$\mathrm{Hom}_B\left(\bar{\boldsymbol{X}}_2, U \otimes_A X_1\right)$ 是正合的, 从而$\mathrm{Hom}_A\left(\boldsymbol{X}_1, X_1\right)$是正合的.因此$M_1 \in SG_{C_1}P(A)$.

## 参考文献


[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[2] Zhang, P. (2013) Gorenstein Projective Modules and Symmetric Recollements. *Journal of Algebra*, **388**, 65-80. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.008

[3] Mao, L.X. (2020) Cotorsion Pairs and Approximation Class over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**, 106271-106292. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106271

[4] Bennis, D., Maaouy, R.E., Rozas, J.R.G. and Oyonarte, L. (2021) Relative Gorenstein Dimensions over Triangular Matrix Rings. *Mathematics*, **9**, Article 2676. https://doi.org/10.3390/math9212676

[5] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-194. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[6] Bennis, D., Rozas, J.R.G. and Oyonarte, L. (2016) Relative Gorenstein Dimensions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**, 65-91. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0489-8

[7] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[8] Bennis, D., Maaouy, R.E., Garca Rozas, J.R. and Oyonarte, L. (2021) Relative Gorenstein Dimensions over Triangular Matrix Rings. *Mathematics*, **9**, Article 2676.
https://doi.org/10.3390/math9212676

[9] Haghany, A. and Varadarajan, K. (2000) Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **147**, 41-58.
https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00129-7