Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 168-175
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141018

一类集合的 3 因子个数研究

庄婷婷

福建师范大学，数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2023年12月1日；录用日期：2023年12月15日；发布日期：2024年1月19日

摘 要

本论文研究由任意非 3 因子元素组成的集合

$$A=\{\frac{3t_1+1}{3t_2+1}:\ t_1,t_2\in D\},$$

其中 D 是一无穷整数子集，我们证明了对任意的 $k\geq 1$，存在无穷多个 $\gamma_1,\gamma_2\in A$，它们的差 $\gamma_1-\gamma_2$ 至少有 k 个 3 因子。分别讨论了集合 A 是整数集或有理数集下，利用数学归纳法以及集合之间的包含关系证得了上述结论是成立的。

关键词

3 因子，非 3 因子，因子个数

3-Factor Number Study of a Class of Sets

Tingting Zhuang

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Dec. 1^{st}, 2023; accepted: Dec. 15^{th}, 2023; published: Jan. 19^{th}, 2024

文章引用: 庄婷婷. 一类集合的 3 因子个数研究[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 168-175.
DOI: 10.12677/pm.2024.141018

Abstract

In this thesis, we study the set consisting of any non-3-factor element

$$A = \{\frac{3t_1 + 1}{3t_2 + 1} : \; t_1, t_2 \in D\},$$

where D is an infinite subset of integers. We show that there are infinitely many $\gamma_1, \gamma_2 \in A$, and their difference $\gamma_1 - \gamma_2$ has at least k factors of 3 for any $k \geq 1$. If A is set of integers or set of rational numbers, the above conclusion is proved by mathematical induction and the induction relation between sets.

Keywords

Factor 3, Non-3-Factor, Number of Factors

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1974 年, 美籍数学家 Mandelbrot [1] 创立了分形几何学 (*Fractal Geometry*). 自此之后, 分形几何迅速发展成为一门新兴的学科, 在自然科学的各个领域得到了广泛的应用 [2–5]. 分形理论的出现不仅改变了人们认识自然的方式和方法, 也为人们解决复杂问题提供了一条新的思路. 例如, Strichartz 等人在文献 [6] 中将复分析和分形几何结合, 开辟了复分析研究的新领域, 之后刘家成和董新汉也在这一方向上进行深入的研究, 得到了一系列开创性的重要成果 [7–10]. 分形几何学作为分形理论的数学基础, 研究的一个基本问题是赋予集合适当的测度. 其中测度的谱性是一个很重要的研究方向.

2000 年, Strichartz [11]将自相似测度的谱问题推广到 Moran 测度上, 利用卷积逼近思想为寻找谱测度提供了新的方向. 戴欣荣, 何兴纲和赖俊杰 [12] 对具有连续数字集的 Moran 测度进行了研究, 胡天佑和刘家成 [13] 对无穷 Bernoulli 卷积的正交集及其谱性进行了研究, 并得到了一种验证无穷 Bernoulli 卷积是否有无穷正交集的方法. 继而安丽想, 何兴纲和李海雄 [14] 结合这一方法并利用组合数学中的 Ramsey 定理等理论更系统地研究了一类 Moran 测度. 但由于一般的 Moran 测度缺少了“自相似”性, 并且其 Fourier 变换的零点集更难研究, 故关于 Moran 测度的研究仍未完善, 还有很

长的路需要我们去探索.

对于三元整数序列生成的 Moran 测度, 熊婷 [15] 证明了其谱性与 3 因子个数存在关系. 在阅读文献 [15] 的过程中, 引发一思考 : 任取集合 A, 当集合 A 是形如 $\{3z+1:\ z\in D\}$ 的子集时, 对任意的 $k\geq 1$, 存在无穷多个 $\gamma_1,\gamma_2\in A$ 使得 $\gamma_1-\gamma_2$ 至少有 k 个 3 因子. 那么当集合 A 是形如 $\{\frac{3z_1+1}{3z_2+1}:\ z_1,z_2\in D\}$ 的有理数子集时是否有相应的结论呢? 如果证得以上的思考是成立的, 那么我们可以将上述结论应用于文献 [15], 在一定程度上能够简便其证明过程. 该结论在三元字符的 Moran 测度的谱性研究上有重要的应用. 基于此, 本文主要研究在任意无穷集中任取两个非 3 因子元素作差后的 3 因子个数.

我们首先给出整数和分式的 3 因子的定义. 对任意的 $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 我们记

$$\nu_3(n):=\max\{\, t\in D:\ 3^t\mid n\}$$

为 n 中的 3 因子个数. 对任意整数 $p,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 我们定义分式 $\frac{q}{p}$ 的 3 因子个数为

$$\nu_3(\frac{q}{p})=\nu_3(q)-\nu_3(p).$$

基于上面记号, 我们给出本文主要研究结论.

定理1.1. *设集合 $A=\{\frac{3t_1+1}{3t_2+1}:\ t_1,t_2\in D\}$. 如果集合 $D\subset\mathbb{Z}$, 则对于任意的 $k\geq 1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in A$, 使得 $\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\geq k$.*

该结论可以分为两种情况去讨论 :

(1) 当 $0\in D$ 时;

(2) 当 $0\notin D$ 时.

对于第 (1) 种情况, 我们令 $t_2=0$, 此时显然有

$$\{3t+1:\ t\in D\}\subset\{\frac{3t_1+1}{3t_2+1}:\ t_1,t_2\in D\}.$$

如果对任意 $k\geq 1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in\{3t+1:\ t\in D\}$, 使得 $\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\geq k$, 则定理 1.1 也会成立. 方便起见, 当 $0\in D$ 时, 我们把定理 1.1 改写为定理 2.1; 当 $0\notin D$ 时, 我们把定理 1.1 改写为定理 2.2.

本文的主要框架如下. 在第二节中, 我们首先研究非零整数形式的非 3 因子作差后的 3 因子个数. 其次, 我们研究分式形式的非 3 因子作差后的 3 因子个数.

2. 主要证明过程

首先, 我们使用数学归纳法研究非零整数形式的非 3 因子作差后的 3 因子个数. 其次, 我们研究分式形式的非 3 因子作差后的 3 因子个数, 令 $t_2=h$, 引入一个新的集合

$$\bar{A}=\{\frac{3t+1}{3h+1}:\ t\in D\},\ D\subset\mathbb{Z},$$

利用集合之间的包含关系并结合数学归纳法证之, 从而得到研究结果. 接下来我们先看定理 2.1 的证明.

定理2.1. 设集合 $A = \{3t + 1 : t \in D\}$. 如果集合 $D \subset \mathbb{Z}$ 且 $0 \in D$, 则对于任意的 $k \geq 1$, 有无穷多对 $\gamma_1, \gamma_2 \in A$, 使得 $\nu_3(\gamma_1 - \gamma_2) \geq k$.

证明: 我们用数学归纳法证之. 当 $k = 1$ 时, 任取 $\beta_1, \beta_2 \in A$ 且 $\beta_1 \neq \beta_2$, 不妨设

$$\beta_1 = 3t_1 + 1,\ \beta_2 = 3t_2 + 1,$$

其中 $t_1, t_2 \in D$ 且 $t_1 \neq t_2$, 可得 $\beta_1 - \beta_2 = 3(t_1 - t_2)$. 又因为 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 所以 $\beta_1 - \beta_2 \in 3\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. 从而

$$\nu_3(\beta_1 - \beta_2) \geq 1.$$

由 β_1, β_2 的任意性可知, 当 $k = 1$ 时, 有无穷多对 $\gamma_1, \gamma_2 \in A$, 使得 $\gamma_1 - \gamma_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 且

$$\nu_3(\gamma_1 - \gamma_2) \geq 1.$$

假设当 $k = N - 1$ 时, 有无穷多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in A$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') \geq N - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots. \tag{2.1}$$

当 $k = N$ 时, 如果只有有限多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in A$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

则根据前面的 (2.1) 可知, 定理成立. 否则有无穷多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in A$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

不妨设

$$\gamma_i = \sum_{l=0}^{N-2} a_{il} 3^l + \sum_{l=N-1}^{M_i} a_{il} 3^l,\quad \gamma_i' = \sum_{l=0}^{N-2} a_{il}' 3^l + \sum_{l=N-1}^{M_i'} a_{il}' 3^l,$$

其中 $a_{il} \in \{0, 1, 2\}$, 正整数 $M_i < \infty$, $0 \leq l \leq M_i - 1$, $a_{iM_i} \in \{1, 2\}$ 和 $a_{il}' \in \{0, 1, 2\}$, 正整数 $M_i' < \infty$, $0 \leq l \leq M_i' - 1$, $a_{iM_i'}' \in \{1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

因为

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

所以

$$a_{i,N-1} \neq a_{i,N-1}',\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

这意味着对任意 $i=1,2,\ldots,n,\ldots$, 有

$$(a_{i,N-1},a'_{i,N-1})\in\{(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}.$$

因此, 有无穷多个 $a_{i,N-1}=0$ 或 1 或 2. 不妨设有无穷多个 $a_{i,N-1}=1$, 记集合

$$E=\{\gamma_i\in A:\ a_{i,N-1}=1\}.$$

显然集合 E 中有无穷多个元素. 对任意 $\alpha_i\in E$, 将 α_i 按三进制展开, 记为

$$\alpha_i=\sum_{l=0}^{N-2}a_{il}3^l+3^{N-1}+\sum_{l=N}^{M_i}a_{il}3^l,\ i=1,2,\ldots,n,\ldots.$$

从而

$$(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})\in\{(a_0,a_1,\ldots,a_{N-2}):\ a_j\in\{0,1,2\},\ 0\le j\le N-2\},\ i=1,2,\ldots,n,\ldots.$$

注意 N 已经取定. 因此, 有无穷多个 $(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})=(0,0,\ldots,0)$ 或…或 $(2,2,\ldots,2)$. 不妨设有无穷多个

$$(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})=(2,2,\ldots,2).$$

记集合

$$F=\{\alpha_i\in E:\ a_{il}=2,\ 0\le l\le N-2\},\ i=1,2,\ldots,n,\ldots.$$

显然集合 F 中有无穷多个元素. 对任意 $\alpha_1=\sum\limits_{l=0}^{N-2}a_{1l}3^l+3^{N-1}+\sum\limits_{l=N}^{M_1}a_{1l}3^l\in F$, $\alpha_2=\sum\limits_{l=0}^{N-2}a_{2l}3^l+3^{N-1}+\sum\limits_{l=N}^{M_2}a_{2l}3^l\in F$, 因为 $a_{1l}=a_{2l}=2(0\le l\le N-2)$ 且 $a_{1,N-1}=a_{2,N-1}=1$, 从而 $\alpha_1-\alpha_2=3^N(\sum\limits_{l=N}^{M_1}a_{1l}3^{l-N}-\sum\limits_{l=N}^{M_2}a_{2l}3^{l-N})\in 3^N\mathbb{Z}$, 进而可知

$$\nu_3(\alpha_1-\alpha_2)\ge N.$$

由集合 E,F 的无穷性和 α_1,α_2 的任意性可知定理成立.

综上所述, 对于任意的 $k\ge1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in A$, 使得

$$\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\ge k.$$

□

其次, 我们引入一个新的集合, 利用集合之间的包含关系来证明定理 2.2.

定理2.2. 设集合 $A=\{\frac{3t_1+1}{3t_2+1}:\ t_1,t_2\in D\}$. 如果集合 $D\subset\mathbb{Z}$ 且 $0\notin D$, 则对于任意的 $k\ge1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in A$, 使得 $\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\ge k$.

证明: 任取 $h\in D$, 固定 $t_2=h$. 令集合

$$\bar{A}=\{\frac{3t+1}{3h+1}:\ t\in D\},\ D\subset\mathbb{Z}.$$

显然 $\bar{A} \subset A$ 且集合 $\bar{A}$ 有无穷多个元素.

断言：对于任意的 $k \geq 1$, 有无穷多对 $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{A}$, 使得 $\nu_3(\gamma_1 - \gamma_2) \geq k$.

证明断言：我们用数学归纳法证之. 当 $k = 1$ 时, 任取 $\beta_1, \beta_2 \in \bar{A}$ 且 $\beta_1 \neq \beta_2$, 不妨设

$$\beta_1 = \frac{3t_1 + 1}{3h + 1}, \ \beta_2 = \frac{3t_2 + 1}{3h + 1},$$

其中 $t_1, t_2 \in D$ 且 $t_1 \neq t_2$, 可得 $\beta_1 - \beta_2 = \frac{3(t_1 - t_2)}{3h+1}$. 因为 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $\nu_3(3h + 1) = 0$, 所以 $\nu_3(\beta_1 - \beta_2) = \nu_3(3(t_1 - t_2)) - \nu_3(3h + 1) = \nu_3(3(t_1 - t_2))$, 因此

$$\nu_3(\beta_1 - \beta_2) \geq 1.$$

由 β_1, β_2 的任意性可知, 当 $k = 1$ 时, 有无穷多对 $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{A}$, 使得

$$\nu_3(\gamma_1 - \gamma_2) \geq 1.$$

假设当 $k = N - 1$ 时, 有无穷多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in \bar{A}$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') \geq N - 1, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots. \tag{2.2}$$

当 $k = N$ 时, 如果只有有限多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in \bar{A}$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

则根据前面的 (2.2) 可知, 断言成立. 否则有无穷多对 $\gamma_i, \gamma_i' \in \bar{A}$, 使得

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

不妨设

$$\gamma_i = b_0 + \sum_{l=0}^{N-2} a_{il} 3^l + \sum_{l=N-1}^{M_i} a_{il} 3^l, \quad \gamma_i' = b_0' + \sum_{l=0}^{N-2} a_{il}' 3^l + \sum_{l=N-1}^{M_i'} a_{il}' 3^l,$$

其中 b_0, b_0' 在一个有限集合里取的, $0 \leq b_0, b_0' < 1$, $a_{il} \in \{0, 1, 2\}$, 正整数 $M_i < \infty$, $0 \leq l \leq M_i - 1$, $a_{iM_i} \in \{1, 2\}$ 和 $a_{il}' \in \{0, 1, 2\}$, 正整数 $M_i' < \infty$, $0 \leq l \leq M_i' - 1$, $a_{iM_i'}' \in \{1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

因为

$$\nu_3(\gamma_i - \gamma_i') = N - 1, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

所以

$$a_{i,N-1} \neq a_{i,N-1}', \ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

这意味着对任意 $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, 有

$$(a_{i,N-1}, a_{i,N-1}') \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}.$$

因此, 有无穷多个 $a_{i,N-1}=0$ 或 1 或 2. 不妨设有无穷多个 $a_{i,N-1}=1$, 记集合

$$E=\{\gamma_i\in\bar{A}:\ a_{i,N-1}=1\}.$$

显然集合 E 中有无穷多个元素. 对任意 $\alpha_i\in E$, 将 α_i 按三进制展开, 记为

$$\alpha_i=b_0+\sum_{l=0}^{N-2}a_{il}3^l+3^{N-1}+\sum_{l=N}^{M_i}a_{il}3^l,\ i=1,2,\ldots,n,\ldots,$$

从而

$$(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})\in\{(a_0,a_1,\ldots,a_{N-2}):\ a_j\in\{0,1,2\},\ 0\le j\le N-2\},\ i=1,2,\ldots,n,\ldots.$$

注意 N 已经取定. 因此, 有无穷多个 $(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})=(0,0,\ldots,0)$ 或…或 $(2,2,\ldots,2)$. 不妨设有无穷多个

$$(a_{i0},a_{i1},\ldots,a_{i,N-2})=(2,2,\ldots,2).$$

记集合

$$F=\{\alpha_i\in E:\ a_{il}=2,\ 0\le l\le N-2\},\ i=1,2,\ldots,n,\ldots.$$

显然集合 F 中有无穷多个元素. 对任意 $\alpha_1=b_0+\sum\limits_{l=0}^{N-2}a_{1l}3^l+3^{N-1}+\sum\limits_{l=N}^{M_1}a_{1l}3^l\in F$, $\alpha_2=b_0+\sum\limits_{l=0}^{N-2}a_{2l}3^l+3^{N-1}+\sum\limits_{l=N}^{M_2}a_{2l}3^l\in F$, 因为 $a_{1l}=a_{2l}=2(0\le l\le N-2)$ 且 $a_{1,N-1}=a_{2,N-1}=1$, 从而 $\alpha_1-\alpha_2=3^N(\sum\limits_{l=N}^{M_1}a_{1l}3^{l-N}-\sum\limits_{l=N}^{M_2}a_{2l}3^{l-N})\in 3^N\mathbb{Z}$, 进而可知

$$\nu_3(\alpha_1-\alpha_2)\ge N.$$

由集合 E,F 的无穷性和 α_1,α_2 的任意性可知断言成立. 综上, 断言得证. 即对于任意的 $k\ge 1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in\bar{A}$, 使得 $\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\ge k$.

又由于 $\bar{A}\subset A$, 则综上所述, 对于任意的 $k\ge 1$, 有无穷多对 $\gamma_1,\gamma_2\in A$, 使得

$$\nu_3(\gamma_1-\gamma_2)\ge k.$$

□

参考文献

[1] Mandelbrot, B.B. (1975) Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Flammarion, Paris.

[2] Matilla, P. (1995) Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. In: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Vol. 44, Cambridge University Press,

Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511623813

[3] Kigami, J. (2001) Analysis on Fractals. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511470943

[4] Falconer, K. (2004) Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications. 2nd Edition, John Wiley, New York. https://doi.org/10.1002/0470013850

[5] Strichartz, R. (2006) Differential Equations on Fractals. Princeton University Press, Princeton and Oxford. https://doi.org/10.1515/9780691186832

[6] Lund, J.P., Strichartz, R.S. and Vinson, J.P. (1998) Cauchy Transforms of Self-Similar Measures. *Experimental Mathematics*, **7**, 177-190. https://doi.org/10.1080/10586458.1998.10504368

[7] Dong, X.H. and Lau, K.S. (2003) Cauchy Transforms of Self-Similar Measures: The Laurent Coefficients. *Journal of Functional Analysis*, **202**, 67-97. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(02)00069-1

[8] Dong, X.H. and Lau, K.S. (2004) An Integral Related to the Cauchy Transform on the Sierpinski Gasket. *Experimental Mathematics*, **13**, 415-419. https://doi.org/10.1080/10586458.2004.10504549

[9] Dong, X.H., Lau, K.S. and Liu, J.C. (2013) Cantor Boundary Behavior of Analytic Functions. *Advances in Mathematics*, **232**, 543-570. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.09.021

[10] Dong, X.H., Lau, K.S. and Wu, H.H. (2017) Cauchy Transforms of Self-Similar Measures: Starlikeness and Univalence. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 4817-4842. https://doi.org/10.1090/tran/6819

[11] Strichartz, R.S. (2000) Mock Fourier Series and Transforms Associated with Certain Cantor Measures. *Journal d'Analyse Mathématique*, **81**, 209-238. https://doi.org/10.1007/BF02788990

[12] Dai, X.R., He, X.G. and Lai, C.K. (2013) Spectral Property of Cantor Measures with Consecutive Digits. vAdvances in Mathematics, **242**, 187-208. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.016

[13] Hu, T.Y. and Lau, K.S. (2008) Spectral Property of the Bernoulli Convolutions. *Advances in Mathematics*, **219**, 554-567. https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.05.004

[14] An, L.X., He, X.G. and Li, H.X. (2015) Spectrality of Infinite Bernoulli Convolutions. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 1571-1590. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.05.008

[15] Ting, X. (2023) Spectrality of Moran Measures with Three-Element Digit Sets. *Acta Mathematica Scientia*, **43A**, 1-17.