Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 241-252
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141026

QBNs-时空非齐次开放量子游荡的量子信道表示

于媛媛*，张丽霞

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年12月16日；录用日期：2023年12月25日；发布日期：2024年1月26日

摘 要

量子 **Bernoulli** 噪声(**QBNs**) 是 **Bernoulli** 泛函空间和作用于其上的湮灭、增生算子族，满足一种等时的典则反交换关系。本文基于量子 **Bernoulli** 噪声方法，考虑了一维时空非齐次开放量子游荡，通过时空非齐次性的 **coin** 算子对序列引入 **Kraus** 算子系并进行了相关研究，利用 **Kraus** 算子系给出该游荡的量子信道表示并讨论其性质。

关键词

量子 **Bernoulli** 噪声，开放量子游荡，时空非齐次，量子信道

Quantum Channel Representation of QBNs-Space-Time Inhomogeneous Open Quantum Walk

Yuanyuan Yu*, **Lixia Zhang**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

* 通讯作者。

文章引用: 于媛媛, 张丽霞. QBNs-时空非齐次开放量子游荡的量子信道表示[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 241-252.
DOI: 10.12677/pm.2024.141026

Received: Dec. 16^{th}, 2023; accepted: Dec. 25^{th}, 2023; published: Jan. 26^{th}, 2024

Abstract

Quantum Bernoulli noises are a family of annihilation and creation operators acting on Bernoulli functionals, which satisfy a canonical anti-commutation relation in equal time. In this paper, based on the quantum Bernoulli noises method, we consider one-dimensional space-time inhomogeneous open quantum walk. The Kraus operators system is introduced and investigated by means of space-time inhomogeneous coin operator pairs. We give the quantum channel representation of the model by using the Kraus operator system and discuss its properties.

Keywords

Quantum Bernoulli Noises, Open Quantum Walk, Space-Time Inhomogeneous, Quantum Channel

1. 引言

近年来, 开放量子游荡 [1] 在各个领域中都有着重要的应用. 它们是经典 Markov 链的精确量子类似物, 被开发用于制定耗散量子计算算法和耗散量子态制备 [2]. 在开放量子游荡中, 节点之间的转移纯粹是由与环境的耗散性相互作用驱动的. 开放量子游荡不依赖于节点之间的量子干涉, 并且它存在中心极限定理 [3]. 由于局部环境的影响, 开放量子游荡的动力学是非酉的. 事实上, 开放量子游荡一步一步地描述了典型的量子行为, 但是它似乎显示了一个相当经典的渐近行为 [4,5]. 由于经典 Markov 链的方法在开放量子游荡上的应用和推广, 使得在该领域得到了许多成果 [6,7].

量子 Bernoulli 噪声 (QBNs) 是 Bernoulli 泛函空间和作用于其上的湮灭、增生算子族, 满足一种等时的典则反交换关系, 在描述环境对开放量子系统的影响方面发挥作用 [8]. 2018 年, 文 [9] 将 QBNs 应用于开放量子游荡的研究中, 利用 QBNs 构造了一维整数格上具有无穷多内部自由度的离散时间开放量子游荡, 又称为一维 QBNs 开放游荡, 并从概率分布的角度出发, 研究开放量子游荡的相关性质. 文 [9] 的研究表明 QBNs 开放游荡的演化方程受 QBNs 影响, 且其演化方程依赖于时间的变化. 同时发现 QBNs 开放游荡具有与经典随机游荡相同的极限概率分布. 在文献 [10] 中引入了一对具有时空非齐次性的 coin 算子对, 进而得到一维整数格上基于 QBNs 的时空非齐次(即时间空间均非齐次)的开放量子游荡, 其演化方程不仅与时间的变化有关, 同时还与游荡者所处的空间位置有关. 上述研究表明局部基态作为初始态时, 基于 QBNs 一维时空非齐次开放量子游荡与经典随机游荡有相同的极限概率分布.

量子力学的诞生深刻地改变了人类社会, 在20 世纪推动社会发展的核能、激光、半导体等高科技, 都源于量子力学. 最近几十年, 量子理论在提高运算速度方面突破现有的极限, 并诞生了一门新兴的交叉学科, 即量子信息学. 量子信息学是量子力学与信息科学相结合的产物. 在文献 [11] 中得到了通过量子噪声信道传输信息的许多重要结果. 运用量子源转换和传输信息具有许多优越性, 特别地, 携带信息的量子态对于能完全破坏量子信息的噪声是很敏感的. 量子信道也称为量子运算, 描述的是态集中的转化. 从算子观点看, 它是一个正规化的完全正映射, 是 Markov 映射(线性、正的、正规化映射) 在非交换概率论中的类似物, 在量子系统的范畴中起了态射的作用; 从统计技术学观点看, 它给出了与环境相互作用开放量子系统离散时间演化的一个完整描述, 即数学扩张定理的物理学对应, 由整个不同的熵量来刻画 [12] .

近年来, 由于开放量子游荡受到的特别关注使得时空非齐次开放量子游荡有丰富的应用, 数学方面研究时空非齐次开放量子游荡来精确把握其性质是量子理论研究中的重要课题. 因此, 在基于 QBNs 框架下研究时空非齐次开放量子游荡模型和它的量子信道表示等其它相关问题具有显著的理论意义.

本文旨在文献 [10] 的基础上继续研究一维时空非齐次的开放量子游荡, 并给出该游荡的量子信道表示.

2. 预备知识

2.1. 量子 Bernoulli 噪声

本节中, 简要地回顾量子 Bernoulli 噪声的一些基本概念以及结论. 详细内容见参考文献 [8].

设$\mathbb{N}$ 是非负整数集, $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ 表示所有映射$\omega : \mathbb{N} \mapsto \{-1, 1\}$ 构成的集合, $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ 表示定义在Ω 上的典则投影序列, 对每个$n \geq 0$, 有

$$\zeta_n(\omega) = \omega(n), \quad \omega \in \Omega.$$

定义$\mathcal{F} = \sigma(\zeta_n; n \geq 0)$ 是Ω 上由序列$(\zeta_n)_{n\geq 0}$ 生成的$\sigma-$域; 设$(p_n)_{n\geq 0}$ 是给定的正数序列, 其中$0 < p_n < 1, n \geq 0$. 那么在可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$ 上存在唯一的概率测度$\mathbb{P}$, 使得

$$\mathbb{P} \circ (\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \cdots \zeta_{n_k})^{-1}\{(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_k)\} = \prod_{j=1}^{k} p_{n_j}^{\frac{1+\epsilon_j}{2}} (1 - p_{n_j})^{\frac{1-\epsilon_j}{2}},$$

其中$k \geq 1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $n_j \in \mathbb{N}\,(1 \leq j \leq k)$ 满足: 当$i \neq j$ 时, $n_i \neq n_j$. 因此我们得到一个概率测度空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 称为 Bernoulli 空间, 且该空间上的复值随机变量称为 Bernoulli 泛函. 设$Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 是随机变量序列$(\zeta_n)_{n\geq 0}$ 生成的 Bernoulli 泛函, 即

$$Z_n = \frac{\zeta_n + q_n - p_n}{2\sqrt{p_n q_n}}, \quad n \geq 0,$$

其中$q_n = 1 - p_n$. 显然, $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 是概率测度空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一列独立的随机变量.

设$\mathcal{H}$ 是复值平方可积 Bernoulli 泛函空间, 即

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

用$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和$\| \cdot \|$ 表示$\mathcal{H}$ 中的内积和范数, 并约定$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 关于第一个变量共轭线性, 关于第二个变量线性. 由Z 的混沌表示性质可知$Z = \{Z_\tau \mid \tau \in \Gamma\}$ 是$\mathcal{H}$ 的一组典则标准正交基 (ONB) , 其中$Z_\emptyset = 1$, 且

$$Z_\tau = \prod_{j\in\tau} Z_j, \quad \tau \in \Gamma, \quad \tau \neq \emptyset.$$

显然$\mathcal{H}$ 是一个无穷维的复可分 Hilbert 空间. 易知, 对于每个$n \geq 0$, $Z_n = Z_{\{n\}}$ 为$\mathcal{H}$ 的典则 ONB 的一个基向量.

引理 1 [8] 对任意的$k \geq 0$, 空间$\mathcal{H}$ 上存在一个有界算子$\partial_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 使得$\| \partial_k \| = 1$ 且

$$\partial_k Z_\tau = \mathbf{1}_\tau(k) Z_{\tau\setminus k}, \quad \partial_k^* Z_\tau = [1 - \mathbf{1}_\tau(k)] Z_{\tau\cup k}, \qquad \tau \in \Gamma,$$

其中∂_k^* 为∂_k 的共轭算子, $\tau \setminus k = \tau \setminus \{k\}$, $\tau \cup k = \tau \cup \{k\}$, 且$\mathbf{1}_\tau(k)$ 是$\mathbb{N}$ 的子集τ 的示性函数.

算子∂_k 和其共轭算子∂_k^* 分别称为作用在 Bernoulli 泛函空间上的湮灭算子和增生算子.

定义 1 [8] Bernoulli 泛函空间和作用于其上的湮灭、增生算子族$\{\partial_k, \partial_k^*\}_{k\geq 0}$ 称为量子 Bernoulli 噪声.

下个引理表明量子 Bernoulli 噪声满足等时典则反交换关系 (CAR).

引理 2 [8] 设k, $l \in \mathbb{N}$, 则下列等式成立

$$\partial_k \partial_l = \partial_l \partial_k, \quad \partial_k^* \partial_l^* = \partial_l^* \partial_k^*, \quad \partial_k^* \partial_l = \partial_l \partial_k^*, \quad k \neq l$$

且

$$\partial_k\partial_k = \partial_k^*\partial_k^* = 0, \quad \partial_k\partial_k^* + \partial_k^*\partial_k = I_{\mathcal{H}}.$$

其中$I_{\mathcal{H}}$ 是空间$\mathcal{H}$ 上的单位算子.

2.2. 时空非齐次开放量子游荡

本节中我们回顾基于量子 Bernoulli 噪声的一维时空非齐次开放量子游荡(以下简称为 QBNs-时空非齐次开放量子游荡) 的一些基本概念. 详细内容见参考文献 [10].

对于$\mathcal{H}$ 上的有界算子A 及所有的$\xi \in \mathcal{H}$, 如果$\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0$, 那么称$A$ 是正的, 记作$A \geq 0$. 设$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 是空间$\mathcal{H}$ 上的全体迹类算子构成的 Banach 空间, $\mathfrak{S}_+(\mathcal{H})$ 中的元素称为$\mathcal{H}$ 上的正迹类算子. 若$T \in \mathfrak{S}_+(\mathcal{H})$ 且$\mathrm{Tr}\, T = 1$, 则称其为$\mathcal{H}$ 上的密度算子.

定义 2 [10] 若映射$\rho : \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_+(\mathcal{H})$ 满足$\sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}\, \rho(x) = 1$, 则称$\rho$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个组核(nucleus). 空间$\mathcal{H}$ 上的全体组核构成的集合记作$\mathscr{G}(\mathcal{H})$.

对于映射$\Phi : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ 且$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \| \Phi_0(x) \|^2 = 1$, 通过以下自然的方式定义$\mathscr{G}(\mathcal{H})$ 中的一个组核ρ :

$$\rho(x) = |\Phi(x)\rangle \langle \Phi(x)|, \quad x \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

其中$|\Phi(x)\rangle \langle \Phi(x)|$ 表示与$\mathcal{H}$ 上的向量$\Phi(x)$ 有关的 Dirac 算子.

考虑张量积空间$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$, 这里$l^2(\mathbb{Z})$ 是$\mathbb{Z}$ 上平方可和复值函数空间. 下面定义$l^2(\mathbb{Z})$ 上的典则标准正交基$\{\phi_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, 其中

$$\phi_x(z) = \begin{cases} 1, & z = x,\ z \in \mathbb{Z}; \\ 0, & z \neq x,\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

引理 3 [10] 设$\rho \in \mathscr{G}(\mathcal{H})$, 则对于$x \in \mathbb{Z}$, $|\phi_x\rangle \langle \phi_x| \otimes \rho(x)$ 为$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 上的正迹类算子, 同时, 算子级数

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |\phi_x\rangle \langle \phi_x| \otimes \rho(x) \tag{3}$$

在迹算子范数意义下收敛, 且其和是$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 上的密度算子.

下面定义提供了基于量子 Bernoulli 噪声的一维时空非齐次开放量子游荡的具体定义.

定义 3 [10] QBNs-时空非齐次开放量子游荡是指定义在整数格$\mathbb{Z}$ 上且满足以下条件的离散时间开放量子游荡.

(1) 该游荡的态空间为$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$, 它的态是$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 上的密度算子;

(2) 该游荡的 coin 算子表示如下:

$$L_n(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\xi(x)}(\partial_n^* + \partial_n - I_{\mathcal{H}}), \quad R_n(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\xi(x)}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}}), \quad n \geq 0,$$

其中$\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ 是一个定义在$\mathbb{Z}$ 上的非负实值函数, $I_{\mathcal{H}}$ 是空间$\mathcal{H}$ 上的单位算子, $L_n(x)$ 和$R_n(x)$ 是非自伴算子, 且对 $\forall\, k, l \geq 0$ 有如下性质:

$$R_n{}^*(x)R_n(x) + L_n{}^*(x)L_n(x) = I_{\mathcal{H}}; \tag{4}$$

(3) 设在$n \geq 0$ 时刻游荡的态是$\widetilde{\rho^{(n)}}$, 且有如下表示:

$$\widetilde{\rho^{(n)}} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} |\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes \rho^{(n)}(x), \tag{5}$$

这里$\rho^{(n)} \in \mathscr{G}(\mathcal{H})$, 我们称其为态$\widetilde{\rho^{(n)}}$ 的纽核;

(4) 该量子游荡态序列的纽核的时间演化方程为

$$\rho^{(n+1)}(x) = R_n(x-1)\rho^{(n)}(x-1)R_n^*(x-1) + L_n(x+1)\rho^{(n)}(x+1)L_n^*(x+1), \quad x \in \mathbb{Z}, \; n \geq 0. \tag{6}$$

其中$\rho^{(n)} \in \mathscr{G}(\mathcal{H})$ 表示在$n \geq 0$ 时刻, 游荡的态$\widetilde{\rho^{(n)}}$ 的纽核. 在$n \geq 0$ 时刻, 整数格$\mathbb{Z}$ 上的函数$x \to \mathrm{Tr}[\rho^{(n)}(x)]$ 确定 QBNs-时空非齐次开放量子游荡的概率分布.

注 1 在量子游荡中, 描述内部自由度的空间常被称为 coin 空间, coin 空间上具体作用于确定游荡方向的算子被称为 coin 算子. 在通常的一维两态量子游荡模型中, coin 算子具体表现为二阶方阵.

注 2 由于$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 是 QBNs-时空非齐次开放量子游荡的态空间, $l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H} \cong l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$. 所以$l^2(\mathbb{Z})$ 描述该游荡的位置, $\mathcal{H}$ 描述游荡的内部自由度. 又由于$\mathcal{H}$ 是无穷维的, 所以 QBNs-时空非齐次开放量子游荡具有无穷多个内部自由度.

上述表明该开放量子游荡的演化方程依赖于时间的变化, 同时还依赖于游荡者所处的空间位置, 故该游荡为时空非齐次的开放量子游荡.

引理 4 [10] 对任意的$n \geq 0, x \in \mathbb{Z}$, 则$R_n(x) + L_n(x)$ 是空间$\mathcal{H}$ 上的酉算子, 且满足如下关系:

$$R_n^*(x)L_n(x) = R_n(x)L_n^*(x) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

3. 主要结果

本节中, 我们在平方可和函数空间$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 中构造一个 QBNs-时空非齐次开放量子游荡的量

子信道表示.

以$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H})$ 表示张量积空间$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上的全体迹类算子构成的 Banach 空间, $\mathfrak{S}_+(l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H})=\{\widetilde{\rho}\in\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H})\mid\widetilde{\rho}\geq 0\}$ 中的元素称为$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上的正迹类算子. 若$\widetilde{\rho}\in\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H})$ 且$\mathrm{Tr}\,\widetilde{\rho}=1$, 则称$\widetilde{\rho}$ 为空间$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上的密度算子.

定义 4 设A,B 为空间$\mathcal{H}$ 上的两个有界算子. 如果它们的和算子$A+B$ 为$\mathcal{H}$ 上的酉算子, 并且满足关系

$$A^*B=AB^*=0,$$

则称$\{A,B\}$ 是$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对.

由引理4 可知, 定义3 (2) 中的$R_n(x),L_n(x)$ 满足上述定义, 则有$\{R_n(x),L_n(x)\}_{n\geq 0,x\in\mathbb{Z}}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列.

为了进一步讨论 QBNs-时空非齐次开放量子游荡的量子信道表示, 我们首先考虑张量积空间$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上与 coin 算子$R_n(x),L_n(x)$ 相关的有界算子系, 这在后面证明量子信道表示方面起着关键作用.

定义 5 设$\{R_n(x),L_n(x)\}_{n\geq 0,x\in\mathbb{Z}}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列, 其中

$$R_n(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\xi(x)}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}}),\quad L_n(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\xi(x)}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}}),$$

若$\{K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\mid(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 满足

$$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}=\begin{cases}|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes R_n(x), & (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ y=x-1;\\ |\phi_x\rangle\langle\phi_{x+1}|\otimes L_n(x), & (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ y=x+1;\\ 0, & (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ y\neq x+1, y\neq x-1,\end{cases}\tag{7}$$

其中$I_{\mathcal{H}}$ 表示空间$\mathcal{H}$ 上的单位算子, 0 表示$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上的零算子. 则称上述所构造的算子系$\{K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\mid(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 为 coin 算子对序列$\{R_n(x),L_n(x)\}_{n\geq 0,x\in\mathbb{Z}}$ 在$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上生成的 Kraus 算子系, 其元素称为$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 生成的 Kraus 算子.

易见, coin 算子对序列$\{R_n(x),L_n(x)\}_{n\geq 0,x\in\mathbb{Z}}$ 在$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上生成的 Kraus 算子系有如下表达:

$$K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))}=|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes R_n(x),$$

$$K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))}=|\phi_x\rangle\langle\phi_{x+1}|\otimes L_n(x),$$

$$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}=0\ (\ |\ x-y\ |\neq 1\ ),$$

其中$x\in\mathbb{Z}$. 下一个命题给出了 Kraus 算子系的一个性质.

命题 1 设$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列, 则$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 在$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上生成的 Kraus 算子系$\{K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} \mid (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$ 满足下列关系

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} = I, \tag{8}$$

其中$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*}$ 为$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}$ 的共轭算子, 且I 表示$l^2(\mathbb{Z})\otimes\mathcal{H}$ 上的单位算子.

证明. 对每个$x\in\mathbb{Z}$, 当$y\in\mathbb{Z}$ 且$\mid x-y\mid\neq 1$ 时, 显然有$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} = 0$;

其次，通过计算有

$$\begin{aligned}
&K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))}\\
&= (|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes R_n(x))^*(|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes R_n(x))\\
&= [|\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x|\otimes\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\xi(x)}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})][|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\xi(x)}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})]\\
&= |\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes[\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})],
\end{aligned}$$

同理可得$K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))} = |\phi_{x+1}\rangle\langle\phi_{x+1}|\otimes[-\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}})]$. 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}[K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))} + K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))}]\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}[|\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes(\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})) + |\phi_{x+1}\rangle\langle\phi_{x+1}|\otimes(-\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}}))]\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_{x-1}|\otimes(\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})) + \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_{x+1}\rangle\langle\phi_{x+1}|\otimes(-\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}}))\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_x\rangle\langle\phi_x|\otimes(\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}})) + \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_x\rangle\langle\phi_x|\otimes(-\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}}))\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_x\rangle\langle\phi_x|\otimes[\frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n+I_{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2}(\partial_n^*+\partial_n-I_{\mathcal{H}})]\\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_x\rangle\langle\phi_x|\otimes I_{\mathcal{H}}\\
&= I,
\end{aligned}$$

其中$I_{\mathcal{H}}$ 表示空间$\mathcal{H}$ 上的单位算子. □

在上述命题条件下, 对每个迹类算子$\varrho \in \mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$, 算子级数

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} \varrho K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}$$

按迹类算子空间$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 的范数收敛且其和算子仍属于$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$. 由此，可引入下列定义

定义 6 设$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列, 定义迹类算子空间$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 上的映射$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$ 如下

$$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\varrho) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} \varrho K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*}, \quad \varrho \in \mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}), \tag{9}$$

其中$K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}$ 为$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 生成的 kraus 算子, $K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*}$ 为其共轭算子. 则称映射$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$ 为 coin 算子对序列$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 在$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 上生成的量子信道.

下个命题说明量子信道$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$ 具有保迹性.

命题 2 对于 coin 算子对序列$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 在$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 上生成的量子信道$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$，下式成立.

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\varrho)] = \mathrm{Tr}\,\varrho, \quad \varrho \in \mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}). \tag{10}$$

特别地, 若$\widetilde{\varrho}$ 为$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 上的密度算子, 则$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\widetilde{\varrho})$ 也是$l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ 上的密度算子.

证明. 设$n \geq 0$. 对每个$x \in \mathbb{Z}$, $\varrho \in \mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$, 根据迹类算子的运算性质和命题1, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\varrho)] &= \mathrm{Tr}[\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} \varrho K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*}] \\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}[K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))} \varrho K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*}] \\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tr}[\varrho K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}] \\
&= \mathrm{Tr}[\varrho \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}] \\
&= \mathrm{Tr}[\varrho I] \\
&= \mathrm{Tr}\,\varrho.
\end{aligned}$$

结合ϱ 是密度算子, 可知$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\varrho)$ 也是密度算子. 得证. □

定理 1 设$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列, 则此算子对驱动的

QBNs-时空非齐次开放量子游荡的态序列$\widetilde{\rho^{(n)}}, n \geq 0$，满足下列演化关系

$$\widetilde{\rho^{(n+1)}} = \mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}(\widetilde{\rho^{(n)}}), \quad n \geq 0, \tag{11}$$

其中$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$ 为 coin 算子对序列$\{R_n(x), L_n(x)\}_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}}$ 在$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 上生成的量子信道.

证明. 设$n \geq 0$. 对每个$x \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}
&K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))*} \\
&= (|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes R_n(x))\widetilde{\rho^{(n)}}(|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes R_n(x))^* \\
&= (|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes R_n(x))(\sum_{z\in\mathbb{Z}}|\phi_z\rangle\langle\phi_z| \otimes \rho^{(n)}(z))(|\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes R_n^*(x)) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}|\sum_{z\in\mathbb{Z}}|\phi_z\rangle\langle\phi_z||\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes R_n(x)\rho^{(n)}(z))R_n^*(x) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}||\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes R_n(x)\rho^{(n)}(x-1)R_n^*(x) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}||\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\xi(x)}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}})\rho^{(n)}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\xi(x)}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}}) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}||\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes \frac{1}{2}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}})\rho^{(n)}(x-1)\frac{1}{2}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}}) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}||\phi_{x-1}\rangle\langle\phi_x| \otimes \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\xi(x-1)}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}})\rho^{(n)}(x-1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\xi(x-1)}(\partial_n^* + \partial_n + I_{\mathcal{H}}) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes R_n(x-1)\rho^{(n)}(x-1)R_n^*(x-1),
\end{aligned}$$

同理可得$K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))*} = |\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes L_n(x+1)\rho^{(n)}(x+1)L_n^*(x+1)$, 从而有

$$\begin{aligned}
&\sum_{y\in\mathbb{Z}}K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} \\
&= K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,x-1}^{(R_n(x),L_n(x))*} + K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,x+1}^{(R_n(x),L_n(x))*} \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes R_n(x-1)\rho^{(n)}(x-1)R_n^*(x-1) + |\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes L_n(x+1)\rho^{(n)}(x+1)L_n^*(x+1) \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes [R_n(x-1)\rho^{(n)}(x-1)R_n^*(x-1) + L_n(x+1)\rho^{(n)}(x+1)L_n^*(x+1)] \\
&= |\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes \rho^{(n+1)}(x).
\end{aligned}$$

于是, 由量子信道$\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}$的定义便得

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}} &= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}}K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))}\widetilde{\rho^{(n)}}K_{x,y}^{(R_n(x),L_n(x))*} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}|\phi_x\rangle\langle\phi_{x-1}| \otimes \rho^{(n+1)}(x). \\
&= \widetilde{\rho^{(n+1)}}
\end{aligned}$$

得证. □

从分类的角度来看, 上述 coin 算子对序列驱动的 QBNs-时空非齐次开放量子游荡的量子信道表示属于时空非齐次的范畴. 下面的命题给出由 coin 算子对序列$\{R_n, L_n\}_{n\geq 0}$ 驱动的 QBNs-时间非齐次的开放量子游荡的演化方程及量子信道表示.

设$R_n = \frac{1}{2}(\partial_n^* + \partial_n + I), L_n = \frac{1}{2}(\partial_n^* + \partial_n - I)$, 易证$\{R_n, L_n\}_{n\geq 0}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列. 则该算子对序列驱动的 QBNs-时间非齐次开放量子游荡的态序列的纽核满足下列演化方程

$$\rho^{(n+1)}(x) = R_n\rho^{(n)}(x-1)R_n + L_n\rho^{(n)}(x+1)L_n, \quad x \in \mathbb{Z}, \ \ n \geq 0,$$

其中$\rho^{(n)} \in \mathscr{G}(\mathcal{H})$ 表示在$n \geq 0$ 时刻, 游荡的态$\widetilde{\rho^{(n)}}$ 的纽核.

推论 1 设$\{R_n, L_n\}_{n\geq 0}$ 为空间$\mathcal{H}$ 上的一个 coin 算子对序列, 则该算子对驱动的 QBNs-时间非齐次开放量子游荡的态序列为$\widetilde{\rho^{(n)}}, n \geq 0$,满足下列演化关系

$$\widetilde{\rho^{(n+1)}} = \mathcal{M}_{(R_n,L_n)}(\widetilde{\rho^{(n)}}), \quad n \geq 0. \tag{12}$$

其中$\mathcal{M}_{(R_n,L_n)}$ 为 coin 算子对序列$\{R_n, L_n\}$ 在$\mathfrak{S}(l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H})$ 上生成的量子信道.

参考文献

[1] Attal, S., Petruccione, F., Sabot, C., *et al.* (2012) Open Quantum Random Walks. *Journal of Statistical Physics*, **147**, 832-852. https://doi.org/10.1007/s10955-012-0491-0

[2] Ko, C.K., Konno, N., Segawa, E., *et al.* (2019) Central Limit Theorems for Open Quantum Random Walks on the Crystal Lattices. *Journal of Statistical Physics*, **176**, 710-735. https://doi.org/10.1007/s10955-019-02318-z

[3] Sinayskiy, I. and Petruccione, F. (2019) Open Quantum Walks: A Mini Review of the Field and Recent Developments. *The European Physical Journal Special Topics*, **227**, 1869-1883. https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800119-5

[4] Konno, N. and Yoo, H.J. (2013) Limit Theorems for Open Quantum Random Walks. *Journal of Statistical Physics*, **150**, 299-319. https://doi.org/10.1007/s10955-012-0668-6

[5] Xiong, S. and Yang, W.S. (2013) Open Quantum Random Walks with Decoherence on Coins with n Degrees of Freedom. *Journal of Statistical Physics*, **152**, 473-492. https://doi.org/10.1007/s10955-013-0772-2

[6] Dhahri, A., Ko, C.K. and Yoo, H.J. (2019) Quantum Markov Chains Associated with Open Quantum Random Walks. *Journal of Statistical Physics*, **176**, 1272-1295. https://doi.org/10.1007/s10955-019-02342-z

[7] Dhahri, A. and Mukhamedov, F. (2019) Open Quantum Random Walks and Quantum Markov Chains. *Functional Analysis and Its Applications*, **53**, 137-142. https://doi.org/10.1134/S0016266319020084

[8] Wang, C.S., Chai, H.F. and Lu, Y.C. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Mathematical Physics*, **51**, Article 053528. https://doi.org/10.1063/1.3431028

[9] Wang, C.S., Wang C., Ren, S.L., *et al.* (2018) Open Quantum Random Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noise. *Quantum Information Processing*, **17**, Article No. 46. https://doi.org/10.1007/s11128-018-1820-2

[10] 于媛媛, 王才士, 范楠. 基于量子Bernoulli噪声的一维时空非齐次开放量子游荡[J]. 吉林大学学报理学版, 2024, 62(1): 20-0028.

[11] Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. (2000) Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Ohya, M. and Petz, D. (1993) Quantum Entropy and Its Use. Sprinder-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57997-4