Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 261-271
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141028

受迫摆方程周期解的存在性

于文源

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年12月6日；录用日期：2023年12月18日；发布日期：2024年1月29日

摘 要

本文运用 **Mawhin** 延拓定理确保以下具有周期边界条件的四阶受迫摆方程

$$x^{(4)} + kx'' + a(t)\sin x = e(t)$$

至少具有一个非平凡正解, 其中 k 是负常数，$a(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且在 $[0,T]$ 上不变号，$e(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且 $e(t)$ 不恒为 0。作为应用，我们给出一些例子来说明这些定理的适用性。

关键词

周期解，受迫摆方程，四阶微分方程，**Mawhin** 延拓定理

Existence of Periodic Solutions for the Fourth-Order Forced Pendulum Equation

Wenyuan Yu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 6^{th}, 2023; accepted: Dec. 18^{th}, 2023; published: Jan. 29^{th}, 2024

文章引用: 于文源. 受迫摆方程周期解的存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 261-271.
DOI: 10.12677/pm.2024.141028

Abstract

In this paper, we apply the Mawhin's continuation theorem to ensure that a fourth-order forced pendulum equation of the form

$$x^{(4)} + kx'' + a(t)\sin x = e(t)$$

with periodic boundary conditions possesses at least one nontrivial positive solution, where k is a constant, $a(t)$ is a continuous $T-$periodic function and does not change the sign on $[0, T]$, $e(t)$ is a continuous $T-$periodic function and $e(t)$ is not equal to 0. As applications, we will give some examples to illustrate the application of these theorems.

Keywords

Periodic Solution, Forced Pendulum Equation, Fourth-Order Differential Quation, Mawhin's Continuation Theorem

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

在非线性振动理论中, 摆方程是一种经典的数学物理方程, 而且是实际背景很强的一种非线性方程, 因而关于摆方程的研究很受重视, 成果也比较丰富. 关于受迫摆方程的研究最早可以追溯到 1922 年 Hamel 发表的文献 [1], 在该文献中用变分法得到周期受迫摆方程

$$x'' + a\sin y = b\sin t \tag{1.1}$$

$2\pi-$周期解的存在性, 其中 a, b 是常数.

但在实际应用中, 受迫摆方程的运动常常会受到摩擦项或者阻尼项的影响, 当加上摩擦项时, 方程 (1.1) 就变为

$$x'' + kx' + a\sin y = e(t). \tag{1.2}$$

其中 k, a 是常数, $e(t)$ 是连续的 $T-$周期函数且 $\int_0^T e(t)dt = 0$. 当 $k \neq 0$ 的时候, 变分法将不再适用于该方程的周期解. 后来许多学者用不同的方法来研究该方程周期解的存在性并得出了丰富的结论,

见文献 [2–8], 随着二阶受迫摆方程的研究更为深入, 学者们对其的研究也更加全面, 如对于二阶受迫摆方程的最小周期解问题, 非退化周期解问题和概周期解问题等的研究, 见文献 [9–15]. 受二阶受迫摆方程周期解存在性的启发, 本文运用 Mawhin 延拓定理研究以下四阶受迫摆方程

$$x^{(4)} + kx'' + a(t)\sin x = e(t) \tag{1.3}$$

周期解的存在性, 其中 k 是常数, $a(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且在 $[0,T]$ 上不变号, $e(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且 $e(t)$ 不恒为 0.

2. 预备知识

在本节中, 我们将介绍一些符号和众所周知的结果, 这些结果将在后续章节中用到. 为了得到方程 (1.3) 的主要结果, 我们假设 $a(t)$ 和 $e(t)$ 满足以下条件:

($\mathbf{F}_1$) 假设 $a(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且在 $[0,T]$ 上不变号, $e(t)$ 是一个连续的 $T-$周期函数且 $e(t)$ 不恒为零. 此外, 对于给定的连续函数 $f:[0,T]\to\mathbb{R}$, 当 $f(t)$ 在 $[0,T]$ 上不变号时, 我们定义 f^+ 和 f^-; 当 $f(t)$ 在 $[0,T]$ 上变号时, 我们定义 f^* 和 f_*, 使得

$$f^+ = \max_{t\in[0,T]} |f(t)| > 0,\ f^- = \min_{t\in[0,T]} |f(t)| > 0,$$

$$f^* = \max_{t\in[0,T]} f(t) \geq 0,\ f_* = \min_{t\in[0,T]} f(t) \leq 0.$$

为了方便, 定义 $C_T = \{x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : x(t) = x(t+T)\}$ 是一个 Banach 空间, $C_T^1 = \{x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) : x(t) = x(t+T), x'(t) = x'(t+T)\}$ 是一个 Banach 空间, 其范数为 $\|x\|_{C^1} = \max\{|x|_\infty, |x'|_\infty\}$; $C_T^2 = \{x \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) : x(t) = x(t+T), x'(t) = x'(t+T), x''(t) = x''(t+T)\}$ 是一个 Banach 空间, 其范数为 $\|x\|_{C^2} = \max\{|x|_\infty, |x'|_\infty, |x''|_\infty\}$, 其中 $|x|_\infty = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|$.

定义 2.1 [16] 设 X 和 Y 为实 Banach 空间, $L : \mathrm{Dom}L \subset X \to Y$ 是一个线性映射, 如果 L 满足:

(i) $\mathrm{Im}L$ 是 Y 的闭子空间,

(ii) $\dim \mathrm{Ker}L = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}L < +\infty$,
则称 L 是一个零指标的 Fredholm 映射.

若 L 是一个零指标的 Fredholm 映射, 则存在连续投影算子 $P : X \to X$ 和 $Q : Y \to Y$, 满足 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L = \mathrm{Im}(I-Q)$. 记 $L_P : \mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Im}L$ 是 L 在 $\mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P$ 上的限制, 则 L_P 是可逆的, 记 $K_P = L_P^{-1}$.

定义 2.2 [16] 设 Ω 为 X 的有界开子集, $N : X \to Y$ 是一个连续映射, 如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_P(I-Q)N : \overline{\Omega} \to X$ 是紧映射, 则称映射 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L-$紧的.

下面给出本文的主要工具定理 Mawhin 延拓定理.

引理 2.1 [16] **(Mawhin 延拓定理)** 设 L 是零指标的 Fredholm 映射, N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L-$紧的, 假设下列条件成立:

(1) $Lx \neq \lambda Nx$, 对 $\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Dom}L$, $\lambda \in (0,1)$,

(2) $QNx \neq 0$, 对 $\forall x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$,

(3) $\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$, 其中, $J : \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ 为同构映射,
则方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L \cap \overline{\Omega}$ 上至少存在一个解.

令 $X = Y = C_T$, 定义线性算子 $L : \mathrm{Dom}L \subset X \to Y$, 令

$$Lx = x^{(4)} + kx'',\ x \in \mathrm{Dom}L,$$

其中 $\mathrm{Dom}L = \{x | x \in X,\ x^{(4)} \in C^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. 直接计算得 $\mathrm{Ker}L = \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{Im}L = \{y | y \in Y,\ \int_0^T y(s)ds = 0\}$. 因此有 $\dim \mathrm{Ker}L = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}L = 1$, 易看出 $\mathrm{Im}L$ 是 Y 中的闭集. 因此算子 L 是零指标的 Fredholm 算子.

定义非线性算子 $N : X \to Y$

$$Nx = e(t) - a(t)\sin x.$$

定义投影算子 $P : X \to \mathrm{Ker}L$, $Q : Y \to Y$

$$Px(t) = Qx(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds,$$

因此, $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$. 则 $K_P : \mathrm{Im}L \to \mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P$ 可以表示为

$$K_P y(t) = \int_0^T G(t,s)y(s)ds,$$

其中, $G(t,s)$ 是

$$\begin{cases} x^{(4)} + kx'' = 0,\ t \in [0,T], \\ \int_0^T x(t)dt = 0,\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T),\ i = 0,1,2,3, \end{cases}$$

的格林函数, 因此 $K_P : \mathrm{Im}L \to \mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}P$ 是一个线性全连续算子且 $N : X \to Y$ 是个连续有界算子, 因此 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 $L-$紧的且具有任意有界开子集 $\Omega \in X$.

引理 2.2 [17] 令 $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ 是一个任意绝对连续函数且 $x(0) = x(T)$, 则

$$(\max_{t\in[0,T]} x(t) - \min_{t\in[0,T]} x(t))^2 \leq \frac{T}{4}\int_0^T |x'(t)|^2 dt$$

成立.

引理 2.3 [18] 对 $\forall u \in C_T^2$, 有 $\int_0^T |u'(t)|^2 dt \leq (\frac{T}{\pi})^2 \int_0^T |u''(t)|^2 dt$.

3. 主要结果及证明

在本节中, 我们陈述并证明本文的主要结果.

定理 3.1 假设条件 $(\mathbf{F}_1)$ 成立且周期 T 满足

$$0 < T^2 < \min\{C_1, C_2, C_3\},$$

其中 $R_1 = 2\arcsin(\frac{e^+}{a^-}+\epsilon)$, $R_2 = \max\{2\arcsin(\frac{e^*}{a^-}+\epsilon), 2\arcsin(\frac{-e_*}{a^-}+\epsilon)\}$ 是常数且 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $\frac{e^+}{a^-}+\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max\{\frac{e^*}{a^-}+\epsilon, \frac{-e_*}{a^-}+\epsilon\} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $C_1 = \frac{-kR_1+\sqrt{k^2R_1^2+4\pi^2R_1(e^++a^+\sin R_1)}}{2(e^++a^+\sin R_1)}$, $C_2 = \frac{-kR_2+\sqrt{k^2R_2^2+4\pi^2R_2(a^+\sin R_2-e_*)}}{2(a^+\sin R_2-e_*)}$, $C_3 = \frac{-kR_2+\sqrt{k^2R_2^2+4\pi^2R_2(a^+\sin R_2+e^*)}}{2(a^+\sin R_2+e^*)}$, 则方程 (1.1) 至少有一个 $T-$周期解.

证明 由条件 $(\mathbf{F}_1)$ 可知函数 $a(t)$ 存在两种情况: $a(t) > 0$ 或者 $a(t) < 0$, $e(t)$ 存在三种情况: $e(t) > 0$, $e(t) < 0$ 或者 $e(t)$ 变号. 不失一般性, 对于函数 $a(t)$, 我们只讨论 $a(t) > 0$ 的情形, $a(t) < 0$ 的情形类似. 下面对函数 $e(t)$ 的这三种情形进行分类讨论.

情形 1: 若 $a(t) > 0$, $e(t) > 0$, 易知 $0 < a^- \le a(t) \le a^+$, $0 < e^- \le e(t) \le e^+$, 令

$$\Omega_1 := \{x \in X \big| \|x\| < R_1\}, \tag{3.1}$$

易知 Ω_1 是 X 中的开集, 其中 $R_1 = 2\arcsin(\frac{e^+}{a^-}+\epsilon)$ 是一个常数且 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $\frac{e^+}{a^-}+\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

下面我们证明引理 2.1 中的条件 (1) 成立. 设 $0 < \lambda < 1$ 和 $\forall\, x \in \partial\Omega_1 \cap \mathrm{Dom}L$, 使得

$$x^{(4)} + kx'' + \lambda a(t)\sin x - \lambda e(t) = 0. \tag{3.2}$$

将 (3.2) 式两边同乘 x 并在 0 到 T 上积分得

$$\int_0^T [x^{(4)}x + kx''x + \lambda x a(t)\sin x - \lambda x e(t)]dt = 0. \tag{3.3}$$

由分部积分法易知

$$\int_0^T x^{(4)}xdt = \int_0^T (x'')^2 dt$$

和

$$\int_0^T x''xdt = -\int_0^T (x')^2 dt.$$

因此, (3.3) 式等价于

$$\int_0^T [(x'')^2 - k(x')^2 + \lambda x a(t)\sin x - \lambda x e(t)] = 0. \tag{3.4}$$

事实上, 鉴于 (3.1) 式, 如果 $\forall\, x \in \partial\Omega_1$, 则 $\|x\| = R_1$. 当 $\|x\| = R_1$ 时, 我们能得到 $|x_{\max} - x_{\min}| < \frac{R_1}{2}$ 或 $|x_{\max} - x_{\min}| \ge \frac{R_1}{2}$ 成立. 如果 $|x_{\max} - x_{\min}| < \frac{R_1}{2}$, 由于 $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|$, 我们知 $\frac{R_1}{2} < x \le R_1$ 或 $-R_1 \le x < -\frac{R_1}{2}$, 下面我们对这两种情况进行分类讨论.

当 $\frac{R_1}{2} < x \le R_1$ 时, 鉴于 $\frac{e^+}{a^-}+\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可知 $0 < \sin\frac{R_1}{2} < \sin x \le \sin R_1$, 则 (3.2) 式从 0 到 T 积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T [\lambda a(t)\sin x - \lambda e(t)]dt \\ &> \int_0^T (a^-\sin\frac{R_1}{2} - e^+)dt \\ &> 0. \end{aligned}$$

当 $-R_1 \le x < -\frac{R_1}{2}$ 时, 鉴于 $\frac{e^+}{a^-} + \epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可知 $\sin(-R_1) \le \sin x < \sin(-\frac{R_1}{2}) < 0$, 则 (3.2) 式从 0 到 T 积分得

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T [\lambda a(t)\sin x - \lambda e(t)]dt \\ &< \int_0^T (a^- \sin(-\frac{R_1}{2}) - e^-)dt \\ &< 0.\end{aligned}$$

如果 $|x_{\max} - x_{\min}| \ge \frac{R_1}{2}$, 由 (3.4) 式, $\sin x \le \sin R_1$, 引理 2.2 和引理 2.3, 我们得到

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T [x^{(4)}x + kx''x + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &= \int_0^T [(x'')^2 - k(x')^2 + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &\ge \frac{4\pi^2}{T^3}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \frac{4k}{T}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \int_0^T [xe(t) - xa(t)\sin x]dt \\ &\ge \frac{\pi^2 R_1^2}{T^3} - \frac{R_1^2 k}{T} - T(e^+ R_1 + R_1 a^+ \sin R_1) \\ &= R_1 T\left[\frac{\pi^2 R_1}{T^4} - \frac{R_1 k}{T^2} - (e^+ + a^+ \sin R_1)\right] \\ &> 0.\end{aligned}$$

上述情况与事实相矛盾, 因此引理 2.1 的条件 (1) 成立.

接下来我们证明引理 2.1 的条件 (2) 成立, 通过简单的计算, 我们得到

$$e(t) - a(t)\sin(-R_1) = e(t) + a(t)\sin R_1 \ge e^- + a^- \sin R_1 > 0,$$

$$e(t) - a(t)\sin R_1 \le e^+ - a^- \sin R_1 < 0.$$

因此,

$$e(t) - a(t)\sin(-R_1) > 0,\ e(t) - a(t)\sin R_1 < 0. \tag{3.5}$$

若 $x \in \partial\Omega_1 \cap \mathrm{Ker}L$, 则 $x = -R_1$ 或者 $x = R_1$. 根据 (3.5) 式可得

$$(QNx)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T (e(t) - a(t)\sin x)dt \ne 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega_1 \cap \mathrm{Ker}L.$$

因此, 引理 2.1 的条件 (2) 成立.

下证引理 2.1 的条件 (3) 成立. 定义一个连续函数

$$G(x,\mu) = -(1-\mu)x + \mu\frac{1}{T}\int_0^T (e(t) - a(t)\sin x)dt, \qquad \mu \in [0,1].$$

显然, 对于 $\forall\, x \in \partial\Omega_1 \cap \mathrm{Ker}L$, 有

$$H(x,\mu) \ne 0.$$

通过应用同伦不变性定理, 易知

$$\begin{aligned}\deg(QN,\Omega_1\cap \mathrm{Ker}L,0)&=\deg(H(x,1),\Omega_1\cap \mathrm{Ker}L,0)\\&=\deg(H(x,0),\Omega_1\cap \mathrm{Ker}L,0)\\&=-1\neq 0.\end{aligned}$$

因此, 引理 2.1 的条件 (3) 成立.

故由引理 2.1 可知方程 (1.3) 在 $\overline{\Omega_1}$ 上至少有一个 $T-$周期解.

情形 2: 若 $a(t)>0, e(t)<0$, 易知 $0<a^-\le a(t)\le a^+$, $-e^+\le e(t)\le -e^-<0$, 令 $\widetilde{e}(t)=-e(t)$, 那么, 我们可以看到

$$0<a^-\le a(t)\le a^+,\ 0<e^-\le \widetilde{e}(t)\le e^+.$$

显然, 方程 (1.3) 等价于

$$x^{(4)}+kx''+a(t)\sin x+\widetilde{e}(t)=0. \tag{3.6}$$

剩下的证明类似于情形 1 的证明, 所以我们省略它. 因此, 由引理 2.1 可知方程 (3.6) 在 $\overline{\Omega_1}$ 上至少有一个 $T-$周期解.

情形 3: 若 $a(t)>0$, $e(t)$ 在 $[0,T]$ 上改变符号, 易知 $0<a^-\le a(t)\le a^+$, $e_*\le e(t)\le e^*$, 显然 $e_*\le 0$, $e^*\ge 0$, 且 e_*, e^* 不同时为 0. 令

$$\Omega_2:=\{x\in X\big|\|x\|<R_2\}, \tag{3.7}$$

易知 Ω_2 是 X 中的开集, 其中 $R_2=\max\{2\arcsin(\frac{e^*}{a^-}+\epsilon), 2\arcsin(\frac{-e_*}{a^-}+\epsilon)\}$ 是一个常数且 $\epsilon>0$ 足够小使得 $\max\{\frac{e^*}{a^-}+\epsilon, \frac{-e_*}{a^-}+\epsilon\}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

下面我们证明引理 2.1 的条件 (1) 成立. 设 $0<\lambda<1$ 和 $\forall\, x\in\partial\Omega_2\cap \mathrm{Dom}L$ 使得

$$x^{(4)}+kx''+\lambda a(t)\sin x-\lambda e(t)=0. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 式两边同乘 x 并在 0 到 T 上积分得

$$\int_0^T[(x'')^2-k(x')^2+\lambda xa(t)\sin x-\lambda xe(t)]=0. \tag{3.9}$$

事实上, 鉴于 (3.7) 式, 如果 $\forall x\in\partial\Omega_2$, 则 $\|x\|=R_2$. 当 $\|x\|=R_2$ 时, 我们能得到 $|x_{\max}-x_{\min}|<\frac{R_2}{2}$ 或 $|x_{\max}-x_{\min}|\ge\frac{R_2}{2}$ 成立. 若 $|x_{\max}-x_{\min}|<\frac{R_2}{2}$, 由于 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$, 我们知 $\frac{R_2}{2}<x\le R_2$ 或 $-R_2\le x<-\frac{R_2}{2}$, 下面我们对这两种情况进行分类讨论.

当 $\frac{R_2}{2}<x\le R_2$ 时, 鉴于 $0<\max\{\frac{e^*}{a^-}+\epsilon, \frac{-e_*}{a^-}+\epsilon\}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, 知 $0<\sin\frac{R_2}{2}<\sin x\le\sin R_2$, 则 (3.8) 式从 0 到 T 积分得

$$\begin{aligned}0&=\int_0^T[\lambda a(t)\sin x-\lambda e(t)]dt\\&>\int_0^T(a^-\sin\frac{R_2}{2}-e^*)dt\\&>0.\end{aligned}$$

当 $-R_2 \le x < -\frac{R_2}{2}$ 时, 鉴于 $0 < \max\{\frac{e^*}{a^-} + \epsilon, \frac{-e_*}{a^-} + \epsilon\} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 知 $\sin(-R_2) \le \sin x < \sin(-\frac{R_2}{2}) < 0$, 则 (3.8) 式从 0 到 T 积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T [\lambda a(t)\sin x - \lambda e(t)]dt \\ &< \int_0^T (a^- \sin(-\frac{R_2}{2}) - e_*)dt \\ &< 0. \end{aligned}$$

如果 $|x_{\max} - x_{\min}| \ge \frac{R_2}{2}$ 且 $e^* < |e_*|$, 由 (3.9) 式, $\sin x \le \sin R_2$, 引理 2.2 和引理 2.3, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T [x^{(4)}x + kx''x + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &= \int_0^T [(x'')^2 - k(x')^2 + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &\ge \frac{4\pi^2}{T^3}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \frac{4k}{T}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \int_0^T [xe(t) - xa(t)\sin x]dt \\ &\ge \frac{\pi^2 R_2^2}{T^3} - \frac{R_2^2 k}{T} - T(a^+ R_2 \sin R_2 - e_* R_2) \\ &= R_2 T\left[\frac{\pi^2 R_2}{T^4} - \frac{R_2 k}{T^2} - (a^+ \sin R_2 - e_*)\right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

如果 $|x_{\max} - x_{\min}| \ge \frac{R_2}{2}$ 且 $e^* \ge |e_*|$, 由 (3.9) 式, $\sin x \le \sin R_2$, 引理 2.2 和引理 2.3, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T [x^{(4)}x + kx''x + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &= \int_0^T [(x'')^2 - k(x')^2 + \lambda xa(t)\sin x - \lambda xe(t)]dt \\ &\ge \frac{4\pi^2}{T^3}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \frac{4k}{T}(x_{\max} - x_{\min})^2 - \int_0^T [xe(t) - xa(t)\sin x]dt \\ &\ge \frac{\pi^2 R_2^2}{T^3} - \frac{R_2^2 k}{T} - T(a^+ R_2 \sin R_2 + e^* R_2) \\ &= R_2 T\left[\frac{\pi^2 R_2}{T^4} - \frac{R_2 k}{T^2} - (a^+ \sin R_2 + e^*)\right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

上述情况与事实相矛盾, 因此引理 2.1 的条件 (1) 成立.

接下来我们证明引理 2.1 的条件 (2) 成立, 通过简单的计算, 我们得到

$$e(t)-a(t)\sin(-\mathbb{R}_2)>0, e(t)-a(t)\sin\mathbb{R}_2<0. \tag{3.10}$$

若 $x\in\partial\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L$, 则 $x=-R_2$ 或者 $x=R_2$. 根据 (3.10) 式可得

$$(QNx)(t)=\frac{1}{T}\int_0^T(e(t)-a(t)\sin x)dt\neq 0,\qquad \forall\, x\in\partial\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L.$$

因此, 引理 2.1 的条件 (2) 成立.

下证引理 2.1 的条件 (3) 成立. 定义一个连续函数

$$G(x,\mu)=-(1-\mu)x+\mu\frac{1}{T}\int_0^T(e(t)-a(t)\sin x)dt,\qquad \mu\in[0,1].$$

显然, 对于 $\forall\, x\in\partial\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L$, 有

$$H(x,\mu)\neq 0.$$

通过应用同伦不变性定理, 易知

$$\begin{aligned}\deg(QN,\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L,0)&=\deg(H(x,1),\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L,0)\\&=\deg(H(x,0),\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L,0)\\&=-1\neq 0.\end{aligned}$$

因此, 引理 2.1 的条件 (3) 成立.

因此, 我们从引理 2.1 可知方程 (1.3) 在 $\overline{\Omega_2}$ 上至少有一个 $T-$周期解.

4. 例子

例 4.1 考虑下面的受迫摆方程

$$x^{(4)}-4x''+(\cos(15\pi t)+8)\sin x=\cos(15\pi t)+3 \tag{4.1}$$

对比 (4.1) 和 (1.3), 易看出 $k=-4$, $a(t)=\cos(15\pi t)+8$, $e(t)=\cos(15\pi t)+3$. 显然, 我们能得到 $a(t)>0$, $e(t)>0$ 且 $a^-=7$, $a^+=9$, $e^-=2$, $e^+=4$, 则函数 $a(t)$, $e(t)$ 满足 $(\mathbf{F}_1)$. 令 $\epsilon=\frac{1}{14}$, 我们得到

$$0<T^2<0.8405$$

因此, 由定理 3.1 我们就能得到方程 (4.1) 在 $\overline{\Omega}_1$ 中至少具有一个 $T-$周期解, 其中 $\overline{\Omega_1}=\{x\in X|\|x\|<1.3964\}$.

例 4.2 考虑下面的受迫摆方程

$$x^{(4)}-5x''+(\cos(4\pi t)+6)\sin x=\sin(8\pi t) \tag{4.2}$$

对比 (4.2) 和 (1.3), 易看出 $k=-5$, $a(t)=\cos(4\pi t)+6$, $e(t)=\sin(8\pi t)$. 显然, 我们能得到

$a^- = 5,\ a^+ = 7,\ e_* = -1,\ e^* = 1$, 则函数 $a(t),\ e(t)$ 满足 $(\mathbf{F}_1)$. 令 $\epsilon = \frac{1}{100}$, 我们得到

$$0 < T^2 < 0.8005$$

因此, 由定理 3.1 我们就能得到方程 (4.2) 在 $\overline{\Omega_2}$ 中至少具有一个 $T-$周期解, 其中 $\overline{\Omega_2} = \{x \in X | \|x\| < 0.4231\}$.

参考文献

[1] Hamel, G. (1922) Ueber erzwungene Schingungen bei endlischen Amplituden. *Mathematische Annalen*, **86**, 1-13. https://doi.org/10.1007/BF01458566

[2] Mawhin, J. and Willem, M. (1984) Multiple Solutions of the Periodic Boundary Value Problem for Some Forced Pendulum-Type Equations. *Journal of Differential Equations*, **52**, 264-287. https://doi.org/10.1016/0022-0396(84)90180-3

[3] Fournier, G. and Mawhin, J. (1985) On Periodic Solutions of Forced Pendulum-Like Equations. *Journal of Differential Equations*, **60**, 381-395. https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90131-7

[4] Mawhin, J. (1987) Recent Results on Periodic Solutions of the Forced Pendulum Equation. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, **19**, 119-129.

[5] Belley, J.-M., Fournier, G. and Saadi Drissi, K. (1992) Almost Periodic Weak Solutions to Forced Pendulum Type Equations without Friction. *Aequationes Mathematicae*, **44**, 100-108. https://doi.org/10.1007/BF01834208

[6] Andres, J. (1995) Large-Period Forced Oscillations to Higher-Order Pendulum-Type Equations. *Differential Equations and Dynamical Systems*, **3**, 407-421.

[7] Ortega, R. (1997) A Forced Pendulum Equation with Many Periodic Solutions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **27**, 861-876. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181071898

[8] Ortega, R. (2000) Counting Periodic Solutions of the Forced Pendulum Equation. *Nonlinear Analysis*, **42**, 1055-1062. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00169-8

[9] Shi, B. (2001) The Solutions of Forced Pendulums Equation with Small Damping. *Annals of Differential Equations*, **17**, 343-351.

[10] Amster, P. and Mariani, M.C. (2003) Periodic Solutions of the Forced Pendulum Equation with Friction. *Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences. 6e Série*, **14**, 311-320. https://doi.org/10.3406/barb.2003.28380

[11] Yu, J. (2009) The Minimal Period Problem for the Classical Forced Pendulum Equation. *Journal of Differential Equations*, **247**, 672-684. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.03.031

[12] Meghea, I. and Stanciu, V. (2009) Existence of the Solutions of Forced Pendulum Equation by Variational Methods. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, **71**, 115-124.

[13] Ortega, R. (2013) Prevalence of Non-Degenerate Periodic Solutions in the Forced Pendulum Equation. *Advanced Nonlinear Studies*, **13**, 219-229. https://doi.org/10.1515/ans-2013-0113

[14] Ortega, R. (2013) Stable Periodic Solutions in the Forced Pendulum Equation. *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**, 585-599. https://doi.org/10.1134/S1560354713060026

[15] Ortega, R. (2014) A Forced Pendulum Equation without Stable Periodic Solutions of a Fixed Period. *Portugaliae Mathematica*, **71**, 193-216. https://doi.org/10.4171/PM/1950

[16] Lui, W. and Yang, N. (2008) Adaptive Finite Element Method for Optimal Control Governed by PDEs. Science Press, Beijing.

[17] Hakl, R., Torres, P.J. and Zamora M. (2012) Periodic Solutions of Singular Second Order Differential Equations: The Repulsive Case. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **39**, 199-220.

[18] Zhao, C., Chen, W. and Zhou, J. (2010) Periodic Solutions for a Class of Fourth-Order Nonlinear Differential Equations. *Nonlinear Analysis*, **72**, 1221-1226. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.08.006