Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 363-371
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141037

连续时间抽象量子游荡的量子参数估计

丁瑞鹤，张丽霞

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年12月19日；录用日期：2023年12月26日；发布日期：2024年1月31日

摘 要

量子游荡作为经典随机游荡的量子类似物，广泛应用于量子信息理论。在量子参数估计中，量子系统对参数进行测量和估计，在理论和实际中都有重要的意义。本文考虑一类作用于平方可积**Bernoulli** 噪声泛函空间上的连续时间抽象量子游荡，给出了该量子游荡的演化方程。针对该类量子游荡讨论相应量子态估计问题，提出具体参数估计方案，证明了该估计方案的无偏性和相合性。

关键词

量子游荡，量子参数估计

Quantum Parameter Estimation of Continuous Time Abstract Quantum Walk

Ruihe Ding, Lixia Zhang

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 19^{th}, 2023; accepted: Dec. 26^{th}, 2023; published: Jan. 31^{st}, 2024

文章引用: 丁瑞鹤, 张丽霞. 连续时间抽象量子游荡的量子参数估计[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 363-371.
DOI: 10.12677/pm.2024.141037

Abstract

As a quantum analogue of classical random walk, quantum walk is widely used in quantum information theory. In quantum parameter estimation, the measurement and estimation of parameters by quantum systems is of great significance in both theory and practice. In this paper, we consider a class of continuous-time abstract quantum walk acting on square integrable Bernoulli noise functional space. The evolution equation of the quantum walk is given. In view of this kind of quantum walk, the corresponding quantum state estimation problem is discussed, a specific parameter estimation scheme is proposed, and the unbiased and compatible estimation scheme of the estimation scheme is proved.

Keywords

Quantum Walk, Quantum Parameter Estimation

1. 引言

量子游荡的概念最初是由 Aharonov 等人于 1993 年在文献 [1] 里首次提出. 随着量子信息理论近年来的快速发展以及其相关技术的进步, 量子游荡的重要性日益显现, 因此它成为量子信息领域研究的热点论题之一. 量子游荡的类型分为离散时间量子游荡与连续时间量子游荡. 量子系统作为量子力学理论的基本研究对象, 若其在演化过程中不与周围环境发生相互作用则可称之为封闭量子系统或保守量子系统. 但从实际出发, 保守量子系统是理想化的系统, 现实的量子系统均为开放量子系统. 在此背景下, 量子 Bernoulli 噪声可作为相应的数学框架来描述某些开放量子系统的环境. 文 [2] 于2016 年首次将量子 Bernoulli 噪声应用于量子游荡. 文 [3] 运用量子 Bernoulli 噪声方法刻画了基于连续时间量子游荡的完美态转移现象.

量子参数估计是量子统计学的一个重要应用, 它通过量子系统或量子力学的相关特性对参数进行估计, 最终目的是提高量子参数估计的准确度. Konno 于2005 年在文 [4] 中提出量子游荡系统参数对量子游荡的演化行为的影响效果显著. 2019 年, Singh 等人在文 [5] 中给出一类含参量子游荡的

估计方案且对该方案的精度上限进行评估. 基于量子游荡的估计理论因其实际意义受到越来越多学者的关注. 本文针对连续时间抽象量子游荡, 讨论其相应的量子态估计问题, 提出具体的估计方案, 并证明了此估计方案具有无偏性和相合性.

2. 预备知识

2.1. 量子 Bernoulli 噪声

本节简要回顾关于量子 Bernoulli 噪声的必要概念和事实, 详细内容可参看文 [6]及其参考文献.

以下, $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集, Γ 为 $\mathbb{N}$ 的有限幂集, 即 $\Gamma = \{\sigma \mid \sigma \subset \mathbb{N}, \#\sigma < \infty\}$, 其中 $\#\sigma$ 指集合 σ 的基数. 若 T 是 Hilbert 空间中的稠定线性算子, 则 $\mathrm{Dom}\, T$ 表示其定义域, 而 T^* 表示其共轭算子.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个给定的概率空间, $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一列独立的随机变量, 满足条件:

$$\mathbb{P}\{Z_n = \varepsilon_n\} = \theta_n, \ \mathbb{P}\{Z_n = -\frac{1}{\varepsilon_n}\} = 1 - \theta_n, \quad n \geq 0,$$

其中 $(\theta_n)_{n\geq 0}$ 是一列给定的正数, 满足 $0 < \theta_n < 1$, $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{1-\theta_n}{\theta_n}}$, 特别地 $\mathcal{F} = \sigma(Z_n, n \in \mathbb{N})$, 即 $\mathcal{F}$ 是随机变量序列 $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 生成的 σ-代数. 根据文献 [2], $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ 称为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 (离散时间) Bernoulli 噪声, 而概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的复值随机变量则叫做 Bernoulli 噪声泛函. 设 $\mathfrak{h}$ 表示平方可积 Bernoulli 噪声泛函空间, 即

$$\mathfrak{h} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \tag{2.1}$$

以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间 $\mathfrak{h}$ 中的通常内积, 并约定 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一变量共轭线性, 关于第二变量线性, $\|\cdot\|$ 为相应的范数. 根据文献 [7], Z 具有混沌表示性质, 从而 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 构成 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基, 其中 $Z_\emptyset = 1$,

$$Z_\sigma = \prod_{j\in\sigma} Z_j, \quad \sigma \in \Gamma, \sigma \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

这表明 $\mathfrak{h}$ 是一个无穷维的复 Hilbert 空间. 下称 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 为 $\mathfrak{h}$ 的典则标准正交基.

根据文献 [6], 对每个非负整数 $k \geq 0$, 在空间 $\mathfrak{h}$ 上存在有界算子 $\partial_k \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, 满足 $\|\partial_k\| = 1$ 且

$$\partial_k Z_\sigma = \mathbf{1}_\sigma(k) Z_{\sigma\setminus k}, \quad \partial_k^* Z_\sigma = [1 - \mathbf{1}_\sigma(k)] Z_{\sigma\cup k}, \quad \sigma \in \Gamma, \tag{2.3}$$

其中 ∂_k^* 表示 ∂_k 的共轭算子, $\sigma \setminus k = \sigma \setminus \{k\}$, $\sigma \cup k = \sigma \cup \{k\}$, 而 $\mathbf{1}_\sigma(k)$ 表示 σ 作为集合 $\mathbb{N}$ 的子集时的示性函数.

文献中将 ∂_k^* 和 ∂_k 分别称为增生算子和湮灭算子, 而将算子族 $\{\partial_k, \partial_k^* \mid k \geq 0\}$ 称为量子 Bernoulli 噪声. 可以证明量子 Bernoulli 噪声满足一种等时典则反交换关系 (CAR), 即

$$\partial_k\partial_l = \partial_l\partial_k, \quad \partial_k^*\partial_l^* = \partial_l^*\partial_k^*, \quad \partial_k^*\partial_l = \partial_l\partial_k^* \quad (l, k \geq 0, k \neq l), \tag{2.4}$$

且

$$\partial_k\partial_k = \partial_k^*\partial_k^* = 0, \quad \partial_k\partial_k^* + \partial_k^*\partial_k = I, \tag{2.5}$$

其中 I 是 $\mathfrak{h}$ 上的单位算子.

2.2. 量子参数估计

本节简要回顾关于量子参数估计的一般理论, 详细内容可参看文 [7] 及其参考文献.

量子态估计简称态估计, 其目的在于通过一定方式的测量来确定量子系统的态. 鉴于测量结果的随机性, 只有通过多次测量才能获取所需要的信息. 但与经典测量不同, 量子测量会使量子态发生变化, 产生一个和初态完全不同的量子态, 是不可逆的, 所以需要原量子系统的一个恒同制备的系统以便于下次测量. 量子态估计中最重要的问题是制定合适的估计方案.

一个量子系统的态通常包含某些重要的未知参数, 此情形下, 把对态的估计简化为对态所包含的位置参数的估计. 这种估计问题称为量子参数估计问题.

设 $\mathcal{H}$ 是一个复 Hilbert 空间, 用来描述一个量子系统, 其上的密度算子 ρ 可用来表示该量子系统 $\mathcal{H}$ 的态. 设 $\{\rho_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ 为$\mathcal{H}$ 上的态, 其中 θ 未知, $\Theta \in \mathbb{R}$ 为位置参数 θ 的变化范围. 现欲对位置参数 θ 进行估计. 为此, 需要有相应的估计方案.

设 $n \geq 2$ 是一正整数, 则张量积空间 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 可认为是系统 $\mathcal{H}$ 的"n-重恒同制备系统", 则$\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上的态 $\rho^{\otimes n}$ 可视为 ρ 的"n-重恒同制备". 根据迹类算子的性质, ρ与其"n-重恒同制备" $\rho^{\otimes n}$有如下关系：

$$\mathrm{Tr}[\rho^n] = [\mathrm{Tr}\rho]^n. \tag{2.6}$$

以下 $\mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ 表示 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上的全体有界算子构成的 Banach 空间.

定义2.1. *设 $n \geq 1$, $\mathfrak{X}^n$ 是一个与 n 相联系的有限集或可数无限集, 称一个映射 $\mathcal{M}^{(n)} : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ 为 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 上的正算子值测度. 如果它满足下列要求:(1) 对 $\forall\, x \in \mathfrak{X}^n$, 有 $\mathcal{M}^{(n)}(x) \geq 0$, 即 $\mathcal{M}^{(n)}(x)$ 为正算子; (2) $\sum_{x\in\mathfrak{X}^n} \mathcal{M}^{(n)}(x) = I$. 其中 I 为 $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 中的单位算子, 如左端为无穷级数则意味着强收敛.*

正算子值测度在量子测量理论中扮演者测量工具的角色, 其定义域表示所有可能的测量值. 显然, 投影算子值测度是一类特殊的正算子值测度, 因而描述一类特殊的测量. 在文献 [7] 中, 投影算子值测度所描述的测量称为 Von Neumann 测量.

给定 $\mathcal{H}$ 上的态 ρ 及正算子值测度 $\mathcal{M}^{(n)} : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})$. 如果对 $\mathcal{H}$ 的"n-重恒同制备" $\mathcal{H}^{\otimes n}$ 实施相应的测量, 那么根据 Bohr 规则 [4], 测量结果是一个 $\mathfrak{X}_n$ 值随机变量, 测量值落入集合 $\mathcal{S}$ 的概率为

$$\mathbb{P}_{n,\rho}(\mathcal{S}) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \mathrm{Tr}[\rho^{\otimes n}\mathcal{M}^{(n)}(x)], \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{S} \subset \mathfrak{X}^n$. 特别地, 若 $x \in \mathfrak{X}^n$, 则$\mathbb{P}_{n,\rho}(x) = \mathrm{Tr}[\rho^{\otimes n}\mathcal{M}^{(n)}(x)]$ 就是测量值恰好为 x 的概率.

一个映射 $\hat{\theta}_n : \mathfrak{X}^n \to \Theta$ 为未知参数 $\theta \in \Theta$ 的一个估计量. 给定估计量 $\hat{\theta}_n$, 若在态 $\rho^{(\theta)}$ 下的测量值为 $x \in \mathfrak{X}^n$, 则可推断 $\theta = \hat{\theta}_n(x)$, 从而可推断测量前量子系统的态为 $\rho^{(\hat{\theta}_n(x))}$.

定义2.2. *称序列 $\{\mathcal{M}^{(n)}, \hat{\theta}_n\}$, $n \geq 1$ 为针对未知参数 θ 的估计方案, 其中 $\mathcal{M}^{(n)} : \mathfrak{X}^n \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})$ 为*

正算子值测度, $\hat{\theta}_n : \mathfrak{X}^n \to \Theta$ 为估计量.

一个方案 $\{\mathcal{M}^{(n)}, \hat{\theta}_n\}$, $n \geq 1$ 若满足下列关于均值的要求

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}^n} \hat{\theta}_n(x)\mathbb{P}_{n,\rho_\theta}(x) = \theta, \quad n \geq 1, \theta \in \Theta. \tag{2.8}$$

则称估计方案为无偏的. 其中 $\mathbb{P}_{n,\rho_\theta}$ 由 $\mathbb{P}_{n,\rho_\theta}(x) = \mathrm{Tr}[\rho^{\otimes n}\mathcal{M}^{(n)}(x)]$ 定义.

估计方案 $\{\mathcal{M}^{(n)}, \hat{\theta}_n\}$, $n \geq 1$ 称为相合的. 即对每个 $\theta \in \Theta$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in \mathfrak{X}^n} e^{it\hat{\theta}_n(x)}\mathbb{P}_{n,\rho_\theta}(x) = e^{it\theta}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

其中 i 为虚数单位.

3. 主要结果

本节利用量子 Bernoulli 噪声方法研究了一类连续时间抽象量子游荡, 讨论了其相应特征. 此外, 对其量子态估计问题进行了探究, 提出具体的参数估计方案, 最后证明了此估计方案具有无偏性和相合性.

3.1. 连续时间抽象量子游荡

设 $L \geq 0$, 我们有

$$\mathfrak{h}_L = \mathrm{Span}\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_L\}, \tag{3.1}$$

其中$\mathfrak{h}_L$ 是 2^{L+1} 维复 Hilbert 空间, 集合 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_L\}$ 是 $\mathfrak{h}_L$ 的一个标准正交基, 考虑含有未知参数 $\theta \subset [0, 2\pi]$ 的算子 ${A_L}^{(\theta)}$. 其在 $\mathfrak{h}_L$ 上保持不变, 因此 ${A_L}^{(\theta)}$ 可以看作 $\mathfrak{h}_L$ 上的一个算子, 其中

$${A_L}^{(\theta)} = \sum_{k=0}^{L}(e^{-i\theta k}\partial_k^* + e^{i\theta k}\partial_k). \tag{3.2}$$

显然, ${A_L}^{(\theta)}$ 是 $\mathfrak{h}_L$ 上的一个有界自伴算子.

连续时间量子游荡的态由系统空间中的单位向量表示, 满足如下 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{d}{dt}\xi_t = {A_L}^{(\theta)}\xi_t, \tag{3.3}$$

其中 i 是虚单位, ${A_L}^{(\theta)}$ 是系统的 Hamiltonian, $\hbar$ 是 Planck 常数(通常取 $\hbar = 1$), ξ_t 是 t 时刻的态. 因而上述方程的解为

$$\xi_t = e^{-it{A_L}^{(\theta)}}\xi_0. \tag{3.4}$$

这里 ξ_0 表示量子游荡的初始态, 它是系统空间中的单位向量.

由于算子 ${A_L}^{(\theta)}$ 可视为量子系统的 Hamiltonian , 因此可以生成连续时间抽象量子游荡. 下面给出了这类量子游荡的具体定义.

定义3.1. [8] 由 A_L 生成的连续时间抽象量子游荡有以下特征:

(1)游荡的态空间是 $\mathfrak{h}_L$ 且其态由 $\mathfrak{h}_L$ 中的单位向量表示;

(2)游荡的演化方程为

$$\xi_t{}^{(\theta)} = e^{itA_L{}^{(\theta)}}\xi_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

其中 $\xi_t{}^{(\theta)}$表示 t 时刻的态, ξ_0 是它的初始态.

(3)游荡在 t 时刻位于节点 σ 处的概率为

$$\mathbb{P}_t(\sigma) = |\langle Z_\sigma, \xi_t{}^{(\theta)}\rangle|^2, \quad t \in \mathbb{R}, \sigma \in \Gamma_L. \tag{3.6}$$

在这种情况下, 集合 $\{\xi_t{}^{(\theta)}|t \in \mathbb{R}\}$ 称为初始态 ξ_0 的游荡轨迹, 此时对 $t \in \mathbb{R}$, Γ_L 上的函数 $\sigma \longmapsto \mathbb{P}_t(\sigma)$ 称为 t 时刻在 σ 处游荡的概率分布.

3.2. 连续时间抽象量子游荡的参数估计

问题的提法: 运用量子参数估计的一般原理, 建立针对由上述算子 $A_L{}^{(\theta)} = \sum_{k=0}^{L}(e^{-i\theta k}\partial_k^* + e^{i\theta k}\partial_k)$ 驱动的连续时间抽象量子游荡 (下称待估计游荡) 的态 $\xi_t{}^{(\theta)}$ 中未知参数 θ 的估计方案, 并证明该估计方案的无偏性和相合性. 为此, 我们先做一些准备.

命题3.1. 以 $\mathfrak{B}(\mathfrak{h}_L)$ 表示 $\mathfrak{h}_L$ 上的全体有界算子构成的集合, $\mathbb{N}_L$ 为非负整数. 定义映射 $\pi : \mathbb{N}_L \to \mathfrak{B}(\mathfrak{h}_L)$ 如下

$$\pi(k) = \sum_{\sharp(\sigma)=k} |Z_\sigma\rangle\langle Z_\sigma|, \quad k \in \mathbb{N}_L,\ \sigma \in \Gamma, \tag{3.7}$$

则 π 是一个投影算子值测度.

证明. 对每个 $\sigma \in \Gamma$, 由于 Z_σ 是 $\mathfrak{h}_L$ 中的标准正交基的基向量, 所以 $|Z_\sigma\rangle\langle Z_\sigma|$ 是 $\mathfrak{h}_L$ 中的投影算子. 于是, 对于任意 $k \in \mathbb{N}_L$, $\pi(k)$ 是 $\mathfrak{h}_L$ 中的投影算子. 设 $\xi \in \mathfrak{h}_L$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的基数都为 k, 则

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_L} \pi(k)\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}_L}\sum_{\sharp(\sigma)=k} |Z_\sigma\rangle\langle Z_\sigma|\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}_L} |\langle Z_{\sigma_1},\xi\rangle Z_{\sigma_1} + \langle Z_{\sigma_2},\xi\rangle Z_{\sigma_2} + \cdots + \langle Z_{\sigma_n},\xi\rangle Z_{\sigma_n}| = \xi.$$

这说明在强收敛意义下成立

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_L} \pi(k) = I,$$

其中 I 为 $\mathfrak{h}_L$ 上的单位算子. 综上, π 是一个投影算子值测度.

命题3.2. 待估计游荡在 t 时刻的态 $\xi_t^{(\theta)}$ 与投影算子值测度 π 满足下列关系

$$\mathrm{Tr}[|\xi_t{}^{(\theta)}\rangle\langle\xi_t{}^{(\theta)}|\pi(k)] = \langle\xi_t{}^{(\theta)}, \pi(k)\xi_t{}^{(\theta)}\rangle = \sum_{\sharp(\sigma)=k} |\langle Z_\sigma, \xi_t{}^{(\theta)}\rangle|^2 = \sum_{\sharp(\sigma)=k} \mathbb{P}_t(\sigma), \quad k \in \mathbb{N}_L, \tag{3.8}$$

其中 $|\xi_t{}^{(\theta)}\rangle\langle\xi_t{}^{(\theta)}|$ 是与 ξ_t 相关的 Dirac 算子.

证明. 设 $k\in\mathbb{N}_L$, 由迹类算子的迹的运算性质可知第一个等式成立, 利用投影算子 $\pi(k)$ 的定义和公式 *(3.6)*直接计算得

$$\langle {\xi_t}^{(\theta)},\pi(k){\xi_t}^{(\theta)}\rangle=\langle {\xi_t}^{(\theta)},\sum_{\sharp(\sigma)=k}|Z_\sigma\rangle\langle Z_\sigma|{\xi_t}^{(\theta)}\rangle=\sum_{\sharp(\sigma)=k}|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2=\sum_{\sharp(\sigma)=k}\mathbb{P}_t(\sigma),\quad k\in\mathbb{N}_L,$$

因此命题成立.

定理3.1. 设 $n\geq 1$, $\mathfrak{B}({\mathfrak{h}_L}^{\otimes n})$ 表示张量积空间 ${\mathfrak{h}_L}^{\otimes n}$ 上全体有界算子构成的代数, 定义映射 $\mathcal{M}_n:\mathbb{N}_L^n\to\mathfrak{B}({\mathfrak{h}_L}^{\otimes n})$ 如下

$$\mathcal{M}_n(k)=\pi(k_1)\otimes\pi(k_2)\otimes\cdots\otimes\pi(k_n),\quad k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbb{N}_L^n, \tag{3.9}$$

则 $\mathcal{M}_n$ 是一个投影算子值测度.

证明. 对每个 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbb{N}_L^n$, 由命题 3.1 及投影算子张量积的性质可知, $\mathcal{M}_n$ 是张量积空间 $\mathfrak{B}({\mathfrak{h}_L}^{\otimes n})$ 中的一个投影算子. 设 $k^{(1)},k^{(2)}\in\mathbb{N}_L^n$ 且 $k^{(1)}\neq k^{(2)}$. 则有指标 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $k_j^{(1)}\neq k_j^{(2)}$, 从而 $\pi(k_j^{(1)})\pi(k_j^{(2)})=0$. 故

$$\mathcal{M}_n(k^{(1)})\mathcal{M}_n(k^{(2)})=\pi(k_1^{(1)})\pi(k_1^{(2)})\otimes\cdots\otimes\pi(k_j^{(1)})\pi(k_j^{(2)})\otimes\cdots\otimes\pi(k_n^{(1)})\pi(k_n^{(2)})=0.$$

设 ${\xi_j}^{(\theta)}\in\mathfrak{h}_L$, $1\leq j\leq n$. 则

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}\mathcal{M}_n(k)(\bigotimes_{j=1}^n{\xi_j}^{(\theta)})=\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}\bigotimes_{j=1}^n[\pi(k_j){\xi_j}^{(\theta)}]=\bigotimes_{j=1}^n\sum_{k_j\in\mathbb{N}_L}\pi(k_j){\xi_j}^{(\theta)}=\bigotimes_{j=1}^n{\xi_j}^{(\theta)},$$

由于 $\{\bigotimes_{j=1}^n{\xi_j}^{(\theta)}\mid{\xi_j}^{(\theta)}\in\mathfrak{h}_L,\,1\leq j\leq n\}$ 是 $\mathfrak{h}_L^{\otimes n}$ 的完全集, 并且投影算子级数部分和序列是一致有界的. 从而在强收敛意义下有 $\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}\mathcal{M}_n(k)=I$, 其中 I 为 $\mathfrak{h}_L^{\otimes n}$ 上的单位算子. 综上, $\mathcal{M}_n$ 是一个投影算子值测度.

平方可积 Bernoulli 泛函空间上由 ${A_L}^{(\theta)}$ 驱动的连续时间抽象量子游荡在 $t\geq 0$ 时刻的概率分布为 $\mathbb{P}_t:\sigma\mapsto|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2$. 对于 $n\in\mathbb{N}_L$, 其相应的均值为

$$\gamma=\sum_{k\in\mathbb{N}_L}k\sum_{\sharp\sigma=k}|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2. \tag{3.10}$$

这表明, 待估计游荡在 t 时刻概率分布的均值是未知参数 θ 的函数. 于是, 对未知参数 θ 的估计可转化为对其函数 $\gamma=\sum_{k\in\mathbb{N}_L}k\sum_{\sharp\sigma=k}|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2$ 的估计.

估计方案: 估计未知参数 θ 的函数 $\gamma=\sum_{k\in\mathbb{N}_L}k\sum_{\sharp\sigma=k}|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2$. 考虑待估计游荡在 $t=1$ 时刻密度算子意义下恒同制备后的态 $\rho_\gamma=|{\xi_1}^{(\theta)}\rangle\langle{\xi_1}^{(\theta)}|$. 对每个正整数 $n\geq 1$, 在态 ${\rho_\gamma}^{\otimes n}$ 下实施投影算子值测度 $\mathcal{M}_n$ 所描述的量子测量, 测量结果为 $\mathbb{N}_L^n$–值随机向量. 对应于上述测量, 选取针对 γ 的估计量 $\hat{\gamma}_n(k)$ 如下

$$\hat{\gamma}_n(k)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n k_j, \tag{3.11}$$

其中 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为 $\hat{\gamma}_n(k)$ 的测量结果.

定理3.2. 估计方案 $\{\mathcal{M}_n,\ \hat{\gamma}_n(k)\}$, $n\geq 1$ 是无偏的, 也是相合的.

证明. 由迹的运算性质, 命题 3.2 和公式 (3.9) 得

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}\hat{\gamma}_n(k)\mathrm{Tr}[\rho_\gamma^{\otimes n}\mathcal{M}_n(k)] &= \sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n k_j)\mathrm{Tr}[\bigotimes_{j=1}^n(\rho_\gamma\pi(k_j))]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}k_j\prod_{j=1}^n\mathrm{Tr}(\rho_\gamma\pi(k_j))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}k_j\prod_{j=1}^n\sum_{\sharp\sigma=k_j}|\langle Z_\sigma,{\xi_1}^{(\theta)}\rangle|^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{k_j\in\mathbb{N}_L}k_j\sum_{\sharp\sigma=k_j}|\langle Z_\sigma,{\xi_1}^{(\theta)}\rangle|^2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\gamma\\ &= \gamma\end{aligned}$$

故上述估计方案是无偏的, 下证其相合性. 考虑 n-维随机向量 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, 其分布为

$$\mathbb{P}\{\eta_1=k_1,\eta_2=k_2,\cdots,\eta_n=k_n\}=\prod_{j=1}^n\sum_{\sharp\sigma=k_j}|\langle Z_\sigma,{\xi_t}^{(\theta)}\rangle|^2,\quad (k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbb{N}_L^n.$$

易见, 随机变量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是独立同分布的. 此外, 可算得 η_1 的期望和方差分别为 $E\eta_1=\gamma$ 和

$$\mathrm{Var}\ \eta_1=\mathrm{E}\eta_1^2-(\mathrm{E}\eta_1)^2=1-\gamma^2.$$

由大数定理知, 在依概率收敛意义下有 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\eta_j\to\gamma$, 进一步可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}e^{it\hat{\gamma}_n(k)}\mathrm{Tr}[\rho_\gamma^{\otimes n}\mathcal{M}_n(k)] &= \sum_{k\in\mathbb{N}_L^n}e^{\frac{it}{n}\sum_{i=1}^n k_i}\prod_{j=1}^n\sum_{\sharp\sigma=k_j}|\langle Z_\sigma,{\xi_1}^{(\theta)}\rangle|^2\\ &= Ee^{\frac{it}{n}\sum_{j=1}^n\eta_j}\to e^{it\gamma},\quad\forall\ t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

故上述估计方案具有相合性.

上述估计方案实际上是针对未知参数 θ 的函数 $\gamma=\sum_{k\in\mathbb{N}_L}k\sum_{\sharp\sigma=k}|\langle Z_\sigma,{\xi_1}^{(\theta)}\rangle|^2$ 的估计方案. 但是由于 θ 与 γ 的函数关系, 所以上述估计可视为对 θ 的间接估计.

参考文献

[1] Aharonov, Y., Davidovich, L. and Zagury, N. (1993) Quantum Random Walks. *Physical Review A*, **48**, 1687-1690. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.1687

[2] Wang, C.S. and Ye, X.J. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Quantum Information Processing*, **15**, 1897-1908. https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2

[3] Wang, C. (2023) Abstract Model of Continuous-Time Quantum Walk Based on Bernoulli Functionals and Perfect State Transfer. *International Journal of Quantum Information*, **21**, Article 2350015. https://doi.org/10.1142/S0219749923500156

[4] Konno, N. (2005) Limit Theorem for Continuous-Time Quantum Walk on the Lin. *Physical Review E*, **72**, Article 026113. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.026113

[5] Singh, S., Chandrashekar, M.C. and Paris, A.G.M. (2019) Quantum Walker as a Probe for Its Coin Parameter. *Physical Review A*, **99**, Article 052117. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.052117

[6] Wang, C.S., Chai, H.F. and Lu, Y.C. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article 053528. https://doi.org/10.1063/1.3431028

[7] Petz, D. (2008) Quantum Information Theory and Quantum Statistics. Springer, Berlin, Heidelberg.

[8] Wang, C. (2023) Abstract Model of Continuous-Time Quantum Walk Based on Bernoulli Functionals and Perfect State Transfer. *International Journal of Quantum Information*, **21**, Article 2350015. https://doi.org/10.1142/S0219749923500156