

一类SVEAIR周期传染病模型的动力学分析

胡绿荷, 戴乙梦, 吕贵臣*

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2023年12月8日; 录用日期: 2024年1月17日; 发布日期: 2024年2月21日

摘要

本研究构建了一类周期环境下具有疫苗接种和无症状感染的SVEAIR型传染病模型。通过计算模型的基本再生数, 我们建立了用于判定疾病是否流行的阈值理论。为了深入了解模型的全局动力学行为, 我们借助于阈值理论给出了疾病灭绝性和一致持久性条件。证明了当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 模型的无病平衡点是全局渐近稳定的; 当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 模型存在唯一的正周期解且疾病持续存在。最后通过数值模拟验证了模型的主要结果, 这一研究为理解和控制此类周期传染病的传播提供了重要的理论基础。

关键词

周期解, 疫苗接种, 基本再生数, 稳定性分析

Dynamic Analysis of a SVEAIR Periodic Infectious Disease Model

Lvhe Hu, Yimeng Dai, Guichen Lv*

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Dec. 8th, 2023; accepted: Jan. 17th, 2024; published: Feb. 21st, 2024

Abstract

This study proposes a SVEAIR-type infectious disease model in a periodic environment, incorporating both vaccine coverage and asymptomatic infections. By calculating the model's basic reproduction number, we establish a threshold theory to determine whether the disease becomes endemic. To gain a deeper understanding of the global dynamics of the model, we utilize the threshold theory to provide conditions for disease extinction and persistence. It is demonstrated that when the basic reproduction number is less than 1, the disease-free equilibrium point of the model is globally asymptotically stable; when the basic reproduction number is greater than 1, the

*通讯作者。

文章引用: 胡绿荷, 戴乙梦, 吕贵臣. 一类 SVEAIR 周期传染病模型的动力学分析[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 458-469.

DOI: 10.12677/pm.2024.142045

model exhibits a unique positive periodic solution, indicating the persistence of the disease. Finally, the main results of the model are verified by numerical simulation, which provides an important theoretical basis for understanding and controlling the spread of such periodic infectious diseases.

Keywords

Periodic Solution, Vaccination, Basic Reproduction Number, Stability Analysis

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为传染病的一种重要类型,周期传染病是指在一定时间间隔内重复爆发的传染病,如流感、麻疹、百日咳、脊髓灰质炎等[1] [2] [3]。此类传染病的出现和消退都具有一定的规律性,这种规律性往往与特定因素相关,如季节性气候变化、社会经济因素、人口流动、疫苗接种覆盖率、病毒变异等。理解周期传染病的特性,掌握其病毒的传播规律,对于预防和控制这些疾病的爆发具有重要的意义。

建立周期传染病数学模型可以对疾病传播的生物学和社会机理作清晰描述,且模型的动力学分析是此类传染病进行理论性定量研究的一种重要方法。针对周期传染病模型的基础理论, Bacaër 等[4]提出了周期环境中基本再生数的一般定义; Wang 等[5]建立了基于周期性环境的大隔间传染病模型的基本繁殖比及其计算公式;白振国等[6]给出了基于常微分方程、时滞微分方程、偏微分方程、差分方程和脉冲微分方程所描述周期模型的基本再生数的具体定义。在具体的研究应用上, Greenhalgh 等[7]基于季节性变化的传播率,建立了一类 SIRS 型传染病模型,研究了四类儿童传染病的周期性; Zhao 等[8]则建立了周期环境中一大类时滞分隔种群模型的基本再生数理论,并应用于一个具有潜伏期的周期 SEIR 模型。同样针对时滞问题, Qiang 等[9]针对一大类概周期和时滞的仓室模型建立了基本再生数理论,数值模拟表明延长潜伏期的长度有利于疾病的控制;纳仁花等[10]研究了一类具有阶段结构的时滞周期传染病模型,并讨论了忽略时滞因素对传染病传播的影响。另外,汪金燕等[11]考虑固定时刻脉冲式接种策略,建立了具有周期传染率的传染病动力学模型,并分析了疾病消除和一致持久参数阈值。

基于上述理论工作,本文主要考虑疫苗接种的时效性与季节性传染的周期性,建立一类非自治周期传染病模型。另外,模型还考虑了无症状感染者及无症状感染者转为有症状感染者等情况,将人群分为易感人群(S)、疫苗接种人群(V)、潜伏人群(E)、无症状感染者(A)、有症状感染人群(I)和康复人群(R)六个隔间。本文结构如下:在第二节中,我们建立了一类 SVEAIR 非自治系统用以刻画此类周期传染病的传播动态,并验证了系统的正不变性与解的有界性。在第三节中,首先定义了基本再生数,进而根据这一阈值建立了全局动力学的阈值理论。在第四节中,借助 Matlab 软件对模型进行数值模拟,并验证了主要理论结果。

2. SVEAIR 周期传染病动力学模型

2.1. 系统建立

将 t 时刻总人口数记为 $N(t)$,分为易感者 $S(t)$ 、疫苗接种者 $V(t)$ 、潜伏者 $E(t)$ 、无症状感染者 $A(t)$ 、

有症状感染者 $I(t)$ 及康复者 $R(t)$ 。基于疫苗接种策略与传染病的季节性，作出如下假设：

- 1) 不考虑人口迁移, t 时刻总人数为六个仓室人数之和, 即 $N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + A(t) + I(t) + R(t)$;
- 2) 考虑疫苗的时效性, 即随着时间推移, 疫苗保护力下降甚至失效, 接种者 $V(t)$ 转化为潜伏者 $E(t)$;
- 3) 考虑季节性传播, 传染病传播率随着季节的变化而波动, 即传播率表示为周期函数。

基于上述假设, 建立了一类 SVEAIR 周期传染病模型, 传染病仓室转化图如下:

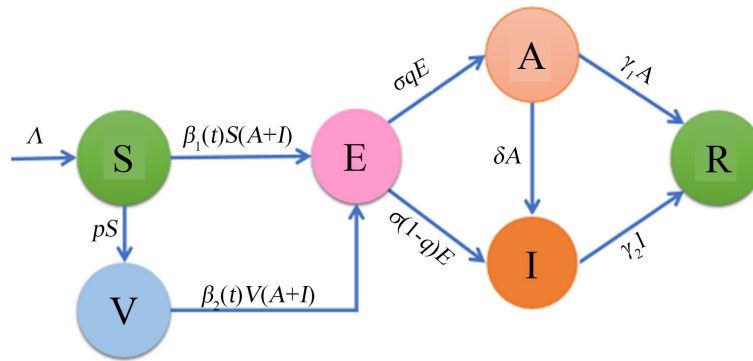


Figure 1. Warehouse diagram of SVEAIR model
图 1. SVEAIR 模型的仓室图

根据图 1, SVEAIR 周期传染病模型的微分方程形式如下:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta_1(t)S(A+I) - (p + \mu)S \\ V'(t) = pS - \beta_2(t)V(A+I) - \mu V \\ E'(t) = \beta_1(t)S(A+I) + \beta_2(t)V(A+I) - (\sigma + \mu)E \\ A'(t) = \sigma qE - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ I'(t) = \sigma(1-q)E + \delta A - (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \\ R'(t) = \gamma_1 A + \gamma_2 I - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

假设所有参数为正, 易感者与疫苗接种者的传播率系数为周期函数(周期为 ω), 分别记为 $\beta_1(t)$ 和 $\beta_2(t)$ 。另外, Λ 表示人口常数输入; p 表示易感者的疫苗接种率; μ 表示自然死亡率; σ 表示潜伏者转化为感染者比率; q 表示潜伏者经感染转化为无症状感染者的比例; δ 表示无症状转化为有症状感染者比率; α 表示染病者的因病死亡率; γ_1 表示无症状感染者的康复率, γ_2 表示有症状感染者的康复率。

2.2. 正不变性与解的有界性

由 Smith-Waltman 不变性原理[12]易证系统(1)的正不变性, 且可以推知

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t) - \alpha[A(t) + I(t)] \leq \Lambda - \mu N(t)$$

因此, 得到系统(1)的可行域为:

$$G := \left\{ (S, V, E, A, I, R) \mid S, V, E, A, I, R \geq 0, 0 \leq S + V + E + A + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

定理 1 G 是系统(1)的正向不变集。

证明 由系统(1)得, 总人口 $N(t)$ 满足以下方程

$$N'(t) \leq \Lambda - \mu N(t)$$

考虑方程 $\bar{N}'(t) = \Lambda - \mu\bar{N}(t)$ ，其过初值 $\bar{N}(t_0)$ 的解为

$$\bar{N}(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + \left[\bar{N}(t_0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right] e^{-\mu(t-t_0)}$$

可以推出 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{N}(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$ ，因此由比较定理[13]可得 $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ，即证 G 是系统(1)的正向不变集。

设 $Z(t)$ 是一个 $n \times n$ 阶的周期的矩阵值函数，且它是连续的、合作的、不可约的，它的周期为 $\omega > 0$ ，定义 $\Phi_Z(t)$ 为线性常微分方程

$$x' = Z(t)x \tag{2}$$

的基解矩阵，并记 $r(\Phi_Z(\omega))$ 为 $\Phi_Z(\omega)$ 谱半径。通过 Perron-Frobenius 定理知， $r(\Phi_Z(\omega))$ 为 $\Phi_Z(\omega)$ 的主特征值，且它是简单的并且只有一个严格正的特征向量。为了便于后文讨论，现给出以下引理。

引理 1 [5] 令 $\varphi = \frac{1}{\omega} \ln r(\Phi_Z(\omega))$ ，那么存在一个正 ω -周期函数 $v(t)$ ，使得 $e^{\varphi t} v(t)$ 为方程(2)的一个解。

3. 动力学分析

3.1. 基本再生数

通过简单计算，易知系统(1)始终存在无病平衡点：

$$P_0 = (S_0, V_0, E_0, A_0, I_0, R_0) = \left(\frac{\Lambda}{p + \mu}, \frac{p\Lambda}{\mu(p + \mu)}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

按照文献[5]中的分类方式，将系统仓室重排为 $x = (x_1, \dots, x_6)^T$ ，其中感染仓室为 $(x_1, x_2, x_3) = (E, A, I)$ ，未感染仓室为 $(x_4, x_5, x_6) = (S, V, R)$ 。定义 $X_S := \{x \geq 0 : x_i = 0, \forall i = 1, 2, 3\}$ 为所有无病状态集合，再令：

$\mathcal{F}_i(t, x)$ ：第 i 仓室新感染个体输入率；

$\mathcal{V}_i^+(t, x)$ ：第 i 仓室个体通过其他方式的输入率(如出生率、移民率)；

$\mathcal{V}_i^-(t, x)$ ：第 i 仓室个体输出率(如死亡率、康复率、移民率)。

因此，周期传染病模型由一个非自治常微分系统控制：

$$x'_i(t) = \mathcal{F}_i(t, x) - \mathcal{V}_i^-(t, x) \triangleq f_i(t, x), i = 1, \dots, 6$$

其中 $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$ 。系统(1)可写为：

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t)S(A+I) + \beta_2(t)V(A+I) - (\sigma + \mu)E \\ \sigma qE - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ \sigma(1-q)E + \delta A - (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \\ \Lambda - \beta_1(t)S(A+I) - (p + \mu)S \\ pS - \beta_2(t)V(A+I) - \mu V \\ \gamma_1 A + \gamma_2 I - \mu R \end{pmatrix} = \mathcal{F} - \mathcal{V}$$

其中

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta_1(t)S(A+I) + \beta_2(t)V(A+I) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\sigma + \mu)E \\ (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A - \sigma qE \\ (\gamma_2 + \alpha + \mu)I - \sigma(1-q)E - \delta A \\ \beta_1(t)S(A+I) + (p + \mu)S - \Lambda \\ \beta_2(t)V(A+I) + \mu V - pS \\ \mu R - \gamma_1 A - \gamma_2 I \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}^- = \begin{pmatrix} (\sigma + \mu)E \\ (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \\ \beta_1(t)S(A+I) + (p + \mu)S \\ \beta_2(t)V(A+I) + \mu V \\ \mu R \end{pmatrix}, \mathcal{V}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma qE \\ \sigma(1-q)E + \delta A \\ \Lambda \\ pS \\ \gamma_1 A + \gamma_2 I \end{pmatrix}$$

定义

$$D_x \mathcal{F}(t, x^0(t)) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_x \mathcal{V}(t, x^0(t)) = \begin{pmatrix} V(t) & 0 \\ J(t) & -M(t) \end{pmatrix}$$

其中

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(t)S_0 + \beta_2(t)V_0 & \beta_1(t)S_0 + \beta_2(t)V_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V(t) = \begin{pmatrix} \sigma + \mu & 0 & 0 \\ -\sigma q & \gamma_1 + \alpha + \mu + \delta & 0 \\ -\sigma(1-q) & -\delta & \gamma_2 + \alpha + \mu \end{pmatrix}$$

$$J(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(t)S_0 & \beta_1(t)S_0 \\ 0 & \beta_2(t)V_0 & \beta_2(t)V_0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{pmatrix}, M(t) = \begin{pmatrix} -(p + \mu) & 0 & 0 \\ p & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

令 $Y(t, s), t \geq s$ 为线性 ω -周期系统 $y'(t) = -V(t)y$ 的矩阵解, 也即对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 3×3 的矩阵 $Y(t, s)$ 都满足

$$Y'(t, s) = -V(t)Y(t, s), \forall t \geq s, Y(s, s) = I$$

其中 I 是 3×3 阶的单位矩阵。为了描述基本再生数, 引入线性 ω -周期系统

$$\omega'(t) = \left[-V(t) + \frac{F(t)}{\lambda} \right] \omega, t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 。令 $W(t, s, \lambda), t \geq s, s \in \mathbb{R}$ 为系统(3)在 \mathbb{R}^3 上的演化算子, 显然 $\Phi_{F-V}(t) = W(t, 0, 1), \forall t \geq 0$ 。

令 C_ω 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R}^3 范围内的所有 ω -周期函数的有序 Banach 空间, 该空间具有最大范数 $\|\cdot\|$ 和正锥 $C_\omega^+ := \{\phi \in C_\omega : \phi(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ 。由文献[5], 定义线性算子 $L: C_\omega \rightarrow C_\omega$

$$(L\phi)(t) = \int_0^\infty Y(t, t-a)F(t-a)\phi(t-a)da, \forall t \in \mathbb{R}, \phi \in C_\omega$$

其中, L 称为下一代感染算子, 定义基本再生数为: $R_0 = r(L)$, 即 L 的谱半径。

显然系统(1)满足文献[5]中的条件(A1)~(A5), 现证明(A6)与(A7)。

先证 $r(\Phi_{-V}(\omega)) < 1$ 。令 Ψ_{-V} 为 $\frac{dz}{dt} = -V(t)z$ 的基解矩阵, 单值矩阵 $\Phi_{-V}(\omega) = \Psi_{-V}^{-1}(0)\Psi_{-V}(\omega)$ 。矩阵 $-V$ 的特征值为 $\lambda_1 = -(\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)$, $\lambda_2 = -(\gamma_2 + \alpha + \mu)$, $\lambda_3 = -(\sigma + \mu)$, 对应的特征向量为:

$$\xi_1 = \left(0, \frac{\gamma_2 - \gamma_1 - \delta}{\delta}, 1 \right)^T, \xi_2 = (0, 0, 1)^T, \xi_3 = \left(\frac{\gamma_1 + \alpha + \delta - \sigma}{\sigma q}, 1, \frac{\sigma q + \alpha + \delta + \gamma_1 - \sigma - \alpha q - \gamma_1 q}{q(\alpha + \gamma_2 - \sigma)} \right)^T$$

因此,

$$z = c_1 \xi_1 e^{-(\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)t} + c_2 \xi_2 e^{-(\gamma_2 + \alpha + \mu)t} + c_3 \xi_3 e^{-(\sigma + \mu)t}$$

故:

$$\Psi_{-V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma_1 + \alpha + \delta - \sigma}{\sigma q} e^{-(\sigma + \mu)t} \\ \frac{\gamma_2 - \gamma_1 - \delta}{\delta} e^{-(\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)t} & 0 & e^{-(\sigma + \mu)t} \\ e^{-(\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)t} & e^{-(\gamma_2 + \alpha + \mu)t} & \frac{\sigma q + \alpha + \delta + \gamma_1 - \sigma - \alpha q - \gamma_1 q}{q(\alpha + \gamma_2 - \sigma)} e^{-(\sigma + \mu)t} \end{pmatrix}$$

进一步,

$$\Phi_{-V}(\omega) = \Psi_{-V}^{-1}(0)\Psi_{-V}(\omega) = \text{diag}\{e^{-(\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)\omega}, e^{-(\gamma_2 + \alpha + \mu)\omega}, e^{-(\sigma + \mu)\omega}\}$$

因为 $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \mu, \sigma, \delta > 0$, 即证得 $r(\Phi_{-V}(\omega)) < 1$, 同理可证 $r(\Phi_M(\omega)) < 1$ 。

引理 2 [5] 若条件(A1)~(A7)成立, 则有以下论断:

- 1) 若 $r(W(\omega, 0, \lambda)) = 1$ 有一个正解 λ_0 , 则 λ_0 仅是 L 的特征值, 且 $R_0 > 0$;
- 2) 若 $R_0 > 0$, 则 $\lambda = R_0$ 是 $r(W(\omega, 0, \lambda)) = 1$ 唯一的解;
- 3) $R_0 = 0$ 当且仅当 $r(W(\omega, 0, \lambda)) < 1, \forall \lambda > 0$ 。

由上述讨论, 结合文献[5]中定理 2.2, 我们得到了系统(1)中无病平衡点 P_0 的局部稳定性结果。

定理 2 以下论断成立:

- 1) $R_0 = 1$ 当且仅当 $r(\Phi_{F-V}(\omega)) = 1$;
- 2) $R_0 > 1$ 当且仅当 $r(\Phi_{F-V}(\omega)) > 1$;
- 3) $R_0 < 1$ 当且仅当 $r(\Phi_{F-V}(\omega)) < 1$ 。

其中, $\Phi_{F-V}(\omega)$ 是线性 ω -周期系统的单值矩阵。因此, 系统(1)的无病平衡点 P_0 在 $R_0 < 1$ 时是局部渐近稳定的, 在 $R_0 > 1$ 时是不稳定的。

3.2. 无病平衡点的全局稳定性分析

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(1)的无病平衡点 P_0 全局渐近稳定。

证明 当 $R_0 < 1$ 时, 由定理 2 知 P_0 的局部稳定性, 现只需证明系统(1)的全局吸引力。由系统(1)的第一、二个方程与解的非负性知: $S'(t) \leq \Lambda - (p + \mu)S$, $V'(t) \leq pS - \mu V$ 。因而, 对 $\forall \tau > 0, \exists t_1 > 0$, 使得当 $t > t_1$ 时, 有 $S(t) \leq S_0 + \tau, V(t) \leq V_0 + \tau$ 成立。进一步, 由系统(1)的第三、四、五个方程可得:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \beta_1(t)(S_0 + \tau)(A + I) + \beta_2(t)(V_0 + \tau)(A + I) - (\sigma + \mu)E \\ A'(t) &= \sigma q E - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ I'(t) &= \sigma(1 - q)E + \delta A - (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \end{aligned} \tag{4}$$

令矩阵

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(t) + \beta_2(t) & \beta_1(t) + \beta_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 2 知, 可取得足够小的 τ , 使得 $r(\Phi_{F-V+\tau M_1}(\omega)) < 1$, 考虑(4)的辅助系统:

$$\begin{aligned} \bar{E}'(t) &= \beta_1(t)(S_0 + \tau)(\bar{A} + \bar{I}) + \beta_2(t)(V_0 + \tau)(\bar{A} + \bar{I}) - (\sigma + \mu)\bar{E} \\ \bar{A}'(t) &= \sigma q \bar{E} - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)\bar{A} \\ \bar{I}'(t) &= \sigma(1 - q)\bar{E} + \delta \bar{A} - (\gamma_2 + \alpha + \mu)\bar{I} \end{aligned} \tag{5}$$

显然, 系统(5)满足引理 1 中的条件, 故存在一个正的 ω -周期函数 $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))^T$, 使得 $e^{\varphi_1 t} v(t)$ 为系统(5)的一个解, 其中 $\varphi_1 = \frac{1}{\omega} \ln(r(\Phi_{F-V+\tau M_1}(\omega))) < 0$, 选取 $t_2 > t_1$, 以及足够小的 $\pi > 0$ 使得:

$$\bar{E}(t_2) \leq \pi v_1(0), \bar{A}(t_2) \leq \pi v_2(0), \bar{I}(t_2) \leq \pi v_3(0)$$

则当 $t \geq t_2$ 时, 有 $\bar{E}(t) \leq \pi e^{\varphi_1(t-t_2)} v_1(t-t_2)$, $\bar{A}(t) \leq \pi e^{\varphi_1(t-t_2)} v_2(t-t_2)$, $\bar{I}(t) \leq \pi e^{\varphi_1(t-t_2)} v_3(t-t_2)$ 。

根据比较定理[13]可得, 当 $t \geq t_2$ 时, 有 $E(t) \leq \bar{E}(t)$, $A(t) \leq \bar{A}(t)$, $I(t) \leq \bar{I}(t)$ 。又由 $\varphi_1 < 0$, 可证得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$$

进一步, 根据极限系统理论[14], 容易验证

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{p + \mu}, \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \frac{p\Lambda}{\mu(p + \mu)}, \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$$

故 P_0 是全局吸引的, 结合定理 2, 当 $R_0 < 1$ 时 P_0 是局部渐近稳定的, 进一步得 P_0 是全局渐近稳定的。

3.3. 地方病平衡点的一致持久性

为了应用文献[15]中给出的周期系统的一致持久性理论, 现做出以下说明:

设 X 是一个度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续映射, $X_0 \subset X$, 且是一个开集。定义

$$\partial X_0 := X \setminus X_0, M_\partial := \{x \in \partial X_0 : f^n(x) \in \partial X_0, n \geq 0\}$$

其中 A_∂ 是 f 在 ∂X_0 中的最大紧不变集, 有限序列 $\{M_1, \dots, M_k\}$ 是 ∂X_0 的不相交、紧的不变子集, 且均是孤立的。

引理 3 [15] 若下列条件成立,

- 1) $f(X_0) \subset X_0$ 且 f 具有全局吸引子 A ;
- 2) f 在 ∂X_0 中的最大的紧的不变集 $A_\partial = A \cap M_\partial$ 具有划分 $\{M_1, \dots, M_k\}$, 满足如下性质
 - a) M_i 在 X 中是孤立的;
 - b) $W^s(M_i) \cap X_0 = \emptyset$ 。

则 $f: X \rightarrow X$ 关于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致持久的。

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(1)是一致持久的, 也即存在一个正常数 ε , 使得系统过初值

$$(S_0, V_0, E_0, A_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^2 \times \text{Int}(\mathbb{R}_+^3) \times \mathbb{R}_+$$

的任何解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (S(t), V(t), E(t), A(t), I(t), R(t)) \geq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) > 0$$

证明 定义 $X = \mathbb{R}_+^6$, $X_0 = \mathbb{R}_+^2 \times \text{Int}(\mathbb{R}_+^3) \times \mathbb{R}_+$, $\partial X_0 = X \setminus X_0$, 构造 Poincaré 映射 $P: \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}_+^6$, 满足

$$P(x^0) = u(\omega, x^0), \forall x^0 \in \mathbb{R}_+^6$$

其中 $u(\omega, x^0)$ 是系统(1)过初值 $u(0, x^0) = x^0$ 的唯一解。现证明 P 对于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致持久的。易证 X, X_0 均是系统(1)的正向不变集, 且 ∂X_0 是 X 中的一个紧集。且由定理 1 知 G 吸引空间 \mathbb{R}_+^6 中所有正半轨, 因此系统(1)是点耗散的。

令 $M_\partial = \{(S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \in \partial X_0 : P^m(S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \in \partial X_0, \forall m \geq 0\}$, 下证:

$$M_\partial = \{(S, V, 0, 0, 0, R) : S \geq 0, V \geq 0, R \geq 0\}$$

易知 $\{(S, V, 0, 0, 0, R) : S \geq 0, V \geq 0, R \geq 0\} \subseteq M_\delta$, 故只需证 $M_\delta \subseteq \{(S, V, 0, 0, 0, R) : S \geq 0, V \geq 0, R \geq 0\}$ 。考虑逆否命题, 利用反证法, 即假设

$$\exists (S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \in \partial X_0 \setminus \{(S, V, 0, 0, 0, R) : S \geq 0, V \geq 0, R \geq 0\}$$

使得 $(S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \in M_\delta$ 。其中初值有以下六种情况:

- 1) 当初值满足 E^0, A^0, I^0 中任意一个为零, 其余为正。即:
 - (1) $E^0 = 0, A^0 > 0, I^0 > 0$; (2) $E^0 > 0, A^0 = 0, I^0 > 0$; (3) $E^0 > 0, A^0 > 0, I^0 = 0$
- 2) 当初值满足 E^0, A^0, I^0 中任意两个为零, 其余为正。即:
 - (4) $E^0 = 0, A^0 = 0, I^0 > 0$; (5) $E^0 = 0, A^0 > 0, I^0 = 0$; (6) $E^0 > 0, A^0 = 0, I^0 = 0$

现仅验证以下两种情况, 其余情况类似可证得。

① 当 $E^0 = 0, A^0 > 0, I^0 > 0$ 时, 由系统(1)得 $E'(0) = \beta_1(t)S^0(A^0 + I^0) + \beta_2(t)V^0(A^0 + I^0) > 0$, 则存在足够小的 $\tilde{t} > 0$, 使得当 $0 < t \leq \tilde{t}$ 时有 $E(t) > 0$ 。进一步, 由系统(1)的第四、五个方程知:

$$\begin{aligned} A(\tilde{t}) &= \left[A^0 + \int_0^{\tilde{t}} \sigma q E(\rho) e^{(\gamma_1 + \alpha + \delta + \mu)\rho} d\rho \right] e^{-(\gamma_1 + \alpha + \delta + \mu)\tilde{t}} > 0 \\ I(\tilde{t}) &= \left[I^0 + \int_0^{\tilde{t}} [\delta A(\rho) + \sigma(1-q)E(\rho)] e^{(\gamma_2 + \alpha + \mu)\rho} d\rho \right] e^{-(\gamma_2 + \alpha + \mu)\tilde{t}} > 0 \end{aligned}$$

可知此时 $E(\tilde{t}) > 0, A(\tilde{t}) > 0, I(\tilde{t}) > 0$, 也即 $(S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \notin M_\delta$, 故矛盾。

② 当 $E^0 = 0, A^0 = 0, I^0 > 0$ 时, 由系统(1)的第三个方程可得 $E'(0) = \beta_1(t)S^0 I^0 + \beta_2(t)V^0 I^0 > 0$, 同上情况可取得 $\tilde{t} > 0$, 故有:

$$\begin{aligned} A(\tilde{t}) &= \left[\int_0^{\tilde{t}} \sigma q E(\rho) e^{(\gamma_1 + \alpha + \delta + \mu)\rho} d\rho \right] e^{-(\gamma_1 + \alpha + \delta + \mu)\tilde{t}} > 0 \\ I(\tilde{t}) &= \left[I^0 + \int_0^{\tilde{t}} [\delta A(\rho) + \sigma(1-q)E(\rho)] e^{(\gamma_2 + \alpha + \mu)\rho} d\rho \right] e^{-(\gamma_2 + \alpha + \mu)\tilde{t}} > 0 \end{aligned}$$

此时 $E(\tilde{t}) > 0, A(\tilde{t}) > 0, I(\tilde{t}) > 0$, 故 $(S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \notin M_\delta$, 故矛盾。

综上, 即得 $M_\delta = \{(S, V, 0, 0, 0, R) : S \geq 0, V \geq 0, R \geq 0\}$, 且易证得 $P_0 = (S_0, V_0, 0, 0, 0, 0)$ 是 M_δ 中关于映射 P 的一个全局吸引子, 即若初始值 $(S(0), V(0), E(0), A(0), I(0), R(0)) \in M_\delta$, 则其解满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), V(t), E(t), A(t), I(t), R(t)) = P_0$$

显然, 当 $R_0 > 1$ 时, $\{P_0\}$ 在 ∂X_0 上是孤立的, 接下来证明 $W^s(P_0) \cap X_0 = \emptyset$ 。

由于方程的解对于初值 $x^0 = (S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, R^0) \in X_0$ 有连续依赖性, 故对于任意的 $\lambda > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对 $\forall x^0 \in X_0$, 且 $\|x^0 - P_0\| \leq \delta_0$ 时, 有

$$\|u(t, x^0) - u(t, P_0)\| \leq \lambda, \forall t \in [0, \omega]$$

同时, 有 $\limsup_{m \rightarrow \infty} d(P^m(x^0), P_0) \geq \delta_0$ 成立。若不然, 则存在 $x^0 \in X_0$, 使得

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} d(P^m(x^0), P_0) < \delta_0$$

为不失一般性, 可以假定对 $\forall m > 0$, 都有 $d(P^m(x^0), P_0) < \delta_0$ 成立, 也即 $\forall t \in [0, \omega]$ 有

$$\|u(t, P^m(x^0)) - u(t, P_0)\| \leq \lambda$$

对 $\forall t \geq 0$, 令 $t = m\omega + t_1$, 其中 $t_1 \in [0, \omega]$, $m = \left\lfloor \frac{t}{\omega} \right\rfloor$, 其中 m 表示不大于 $\frac{t}{\omega}$ 的最大的整数, 则

$$\|u(t, x^0) - u(t, P_0)\| = \|u(t, P^m(x^0)) - u(t, P_0)\| \leq \lambda, \forall t \geq 0$$

令 $(S(t), V(t), E(t), A(t), I(t), R(t)) = u(t, x^0)$, 故 $t \geq 0$ 时, 有 $0 \leq E(t), A(t), I(t), R(t) \leq \lambda$, 且:

$$\frac{\Lambda}{p+\mu} - \lambda \leq S(t) \leq \frac{\Lambda}{p+\mu} + \lambda, \frac{p\Lambda}{\mu(p+\mu)} - \lambda \leq V(t) \leq \frac{p\Lambda}{\mu(p+\mu)} + \lambda$$

代入系统(1), 有下式成立

$$\begin{aligned} E'(t) &\geq \beta_1(t) \left(\frac{\Lambda}{p+\mu} - \lambda \right) (A+I) + \beta_2(t) \left(\frac{p\Lambda}{\mu(p+\mu)} - \lambda \right) (A+I) - (\sigma + \mu)E \\ A'(t) &= \sigma qE - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ I'(t) &= \sigma(1-q)E + \delta A - (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \end{aligned} \tag{6}$$

考虑(6)的辅助系统

$$\begin{aligned} \tilde{E}'(t) &= \beta_1(t) \left(\frac{\Lambda}{p+\mu} - \lambda \right) (A+I) + \beta_2(t) \left(\frac{p\Lambda}{\mu(p+\mu)} - \lambda \right) (A+I) - (\sigma + \mu)E \\ \tilde{A}'(t) &= \sigma qE - (\gamma_1 + \alpha + \mu + \delta)A \\ \tilde{I}'(t) &= \sigma(1-q)E + \delta A - (\gamma_2 + \alpha + \mu)I \end{aligned} \tag{7}$$

取矩阵

$$M_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(t) + \beta_2(t) & \beta_1(t) + \beta_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 2, 有 $r(\Phi_{F-V-\lambda M_2}(\omega)) > 1$, 且存在 ω -周期函数 $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))^T \geq 0$, 使得 $e^{\varphi_2 t} p(t)$ 是辅助系统(7)的解, 其中 $\varphi_2 = \frac{1}{\omega} \ln(r(\Phi_{F-V-\lambda M_2}(\omega))) > 0$. 当 $\tilde{t} \geq t_1$ 足够大以及 $\varepsilon > 0$ 足够小时, 有

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{A} \\ \tilde{I} \end{pmatrix} \geq \alpha \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{pmatrix}$$

根据比较定理[13]

$$\begin{pmatrix} E \\ A \\ I \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{A} \\ \tilde{I} \end{pmatrix} \geq \alpha e^{\varphi_2(t-\tilde{t})} \begin{pmatrix} p_1(t-\tilde{t}) \\ p_2(t-\tilde{t}) \\ p_3(t-\tilde{t}) \end{pmatrix}, t \geq \tilde{t}$$

故可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \infty$$

这与 $0 \leq E(t), A(t), I(t) \leq \lambda$ 矛盾, 故证得 $W^s(P_0) \cap X_0 = \emptyset$. 综上, 系统(1)满足引理 3 中的条件, 故是一致持久的。

为论述系统正周期解的存在性, 现引入以下理论:

引理 4 [15] 如果一个连续的映射 $f: X \rightarrow X$, $f(X_0) \subset X_0$ 满足下述条件,

1) $f: X \rightarrow X$ 是点耗散的;

- 2) f 是紧的;
- 3) f 关于 $(X_0, \partial X_0)$ 具有一致持久性。

则 f 在 X_0 中有一个全局吸引子 A_0 , 使得其在 X_0 内是一个强一致有界集, 并且 f 存在一个共存态。

定理 5 若 $R_0 > 1$, 则系统(1)存在一个正的 ω -周期解。

证明 结合定理 1 和定理 3 易知 P 在 \mathbb{R}_+^6 上是点耗散的, 并且 $P: \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}_+^6$ 在领域内是紧的, f 关于 $(X_0, \partial X_0)$ 具有一致持久性。由引理 4 知 P 有一个不动点 $(S^*(t), V^*(t), E^*(t), A^*(t), I^*(t), R^*(t)) \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^6)$, 进一步, 对所有的 $t \geq 0$, 有 $u(t, (S^*(t), V^*(t), E^*(t), A^*(t), I^*(t), R^*(t))) \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^6)$ 。因此, 存在系统(1)的 ω -正周期解 $(S^*(t), V^*(t), E^*(t), A^*(t), I^*(t), R^*(t))$ 。

4. 数值模拟

上述理论分析表明, 基本再生数 R_0 是确定疾病是否流行的重要阈值参数, 下面将通过数值模拟验证上述结论。系统(1)的初始状态取值为: $N_0 = 95632$, $S_0 = 93000$, $V_0 = 5$, $E_0 = 850$, $A_0 = 700$, $I_0 = 577$, $R_0 = 500$, 并定义周期函数 $\beta_1(t) = \beta_{11} + \omega \cos(\pi/24)t$, $\beta_2(t) = \beta_{22} + \omega \sin(\pi/24)t$ 。部分参考文献[16], 具体参数取值如下表 1:

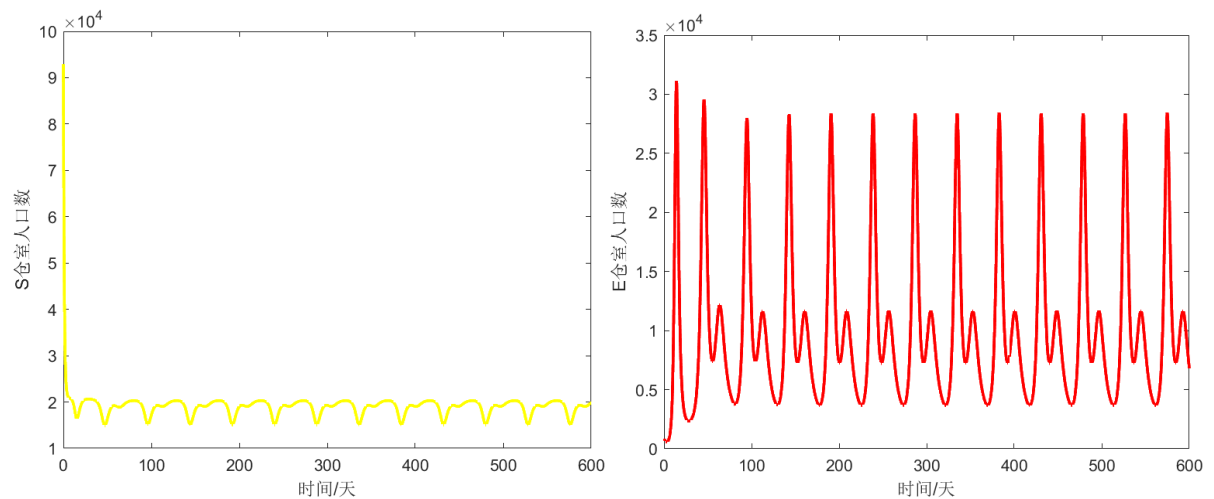
Table 1. The parameter values of SVEAIR model

表 1. SVEAIR 模型参数及取值

参数	数值	参数	数值	参数	数值
Λ	20961	σ	7/4	ω	$0.3/N_0$
μ	0.016	q	0.024	p	0.98
β_{11}	$1/N_0$	α	0.8235	γ_1	0.8235
β_{22}	$0.8781/N_0$	δ	0.8235	γ_2	0.8235

借助 Matlab 软件, 计算得到基本再生数 $R_0 \approx 15.67 > 1$ 。由定理 4 和 5 知, 此时疾病是持续存在的, 且系统(1)存在唯一的正周期解, 图 2 数值模拟的结果验证了此结论。

此外, 若取参数 $\mu = 0.34$, 且系统初值及其余参数保持不变, 通过计算得到 $R_0 \approx 0.94 < 1$ 。由定理 3 知, 此时系统(1)不存在正周期解, 且疾病最终消亡, 图 3 数值模拟的结果验证了此结论。



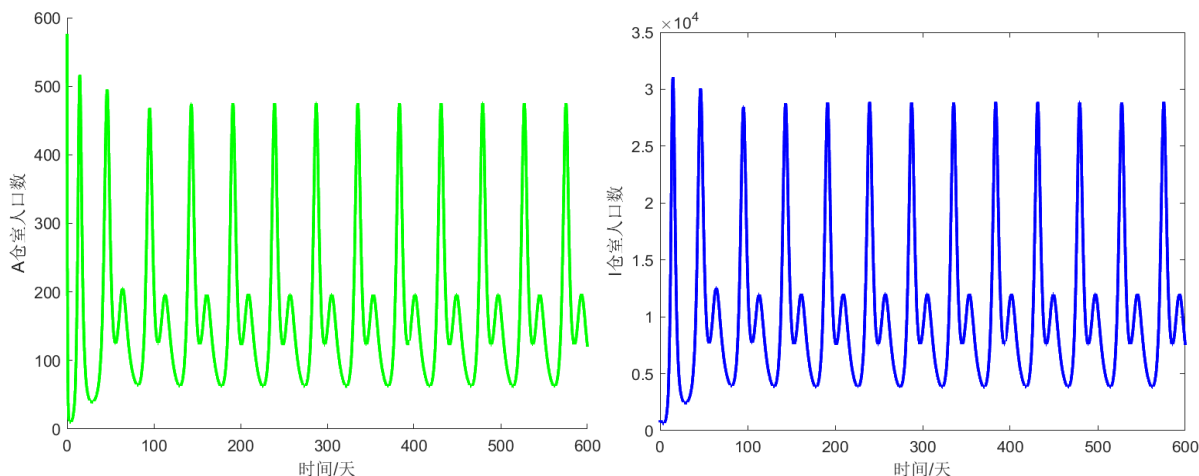


Figure 2. The change trend chart of susceptible population and infected population when $R_0 > 1$

图 2. $R_0 > 1$ 时易感人群及染病人群数量变化趋势图

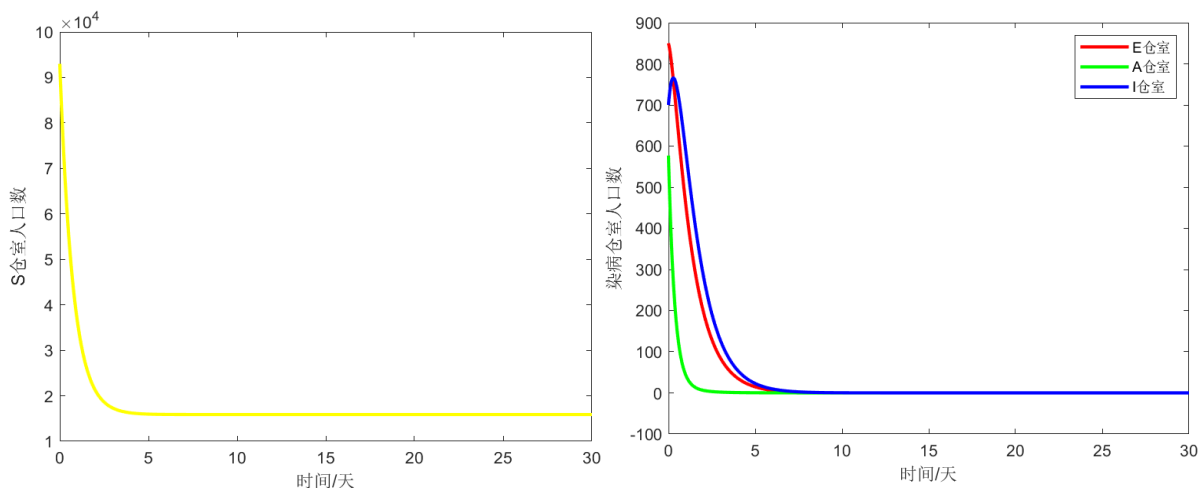


Figure 3. The change trend chart of susceptible population and infected population when $R_0 < 1$

图 3. $R_0 < 1$ 时易感人群及染病人群数量变化趋势图

5. 结论

本文在流行病学知识的基础上，综合考虑疫苗接种与无症状感染，根据周期性传播规律建立了一类 SVEAIR 非自治周期传染病模型。首先，通过线性积分算子的谱半径定义了基本再生数，它决定了疾病的消亡和一致持久。主要结果表明，当 $R_0 < 1$ 时，系统(1)的无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的，疾病最终消亡；当 $R_0 > 1$ 时，疾病是持续存在的，同时系统(1)存在一个正周期解。进一步，借助 Matlab 软件对系统(1)进行了数值模拟，并验证了模型的主要理论结果。

基金项目

重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201801136)。

参考文献

[1] Dowell, F.S. (2001) Seasonal Variation in Host Susceptibility and Cycles of Certain Infectious Diseases. *Emerging In-*

- fectious Diseases*, **7**, 369-374. <https://doi.org/10.3201/eid0703.017301>
- [2] Earn, D.J.D., Dushoff, J. and Levin, A.S. (2002) Ecology and Evolution of the Flu. *Trends in Ecology Evolution*, **17**, 334-340. [https://doi.org/10.1016/S0169-5347\(02\)02502-8](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(02)02502-8)
- [3] 马知恩. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [4] Bacaër, N. and Guernaoui, S. (2006) The Epidemic Threshold of Vector-Borne Diseases with Seasonality. *Journal of Mathematical Biology*, **53**, 421-436. <https://doi.org/10.1007/s00285-006-0015-0>
- [5] Wang, W. and Zhao, X. (2008) Threshold Dynamics for Compartmental Epidemic Models in Periodic Environments. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 699-717. <https://doi.org/10.1007/s10884-008-9111-8>
- [6] 白振国. 周期传染病模型的基本再生数[J]. 工程数学学报, 2013, 30(2): 175-183.
- [7] Greenhalgh, D. and Moneim, I.A. (2010) SIRS Epidemic Model and Simulations Using Different Types of Seasonal Contact Rate. *Systems Analysis Modelling Simulation*, **43**, 573-600. <https://doi.org/10.1080/023929021000008813>
- [8] Zhao, X. (2017) Basic Reproduction Ratios for Periodic Compartmental Models with Time Delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **29**, 67-82. <https://doi.org/10.1007/s10884-015-9425-2>
- [9] Qiang, L., Wang, B. and Zhao, X. (2020) Basic Reproduction Ratios for Almost Periodic Compartmental Models with Time Delay. *Journal of Differential Equations*, **269**, 4440-4476. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.03.027>
- [10] 纳仁花, 梁泽芬. 具有阶段结构的时滞周期 SEIR 传染病模型动力学分析[J]. 兰州工业学院学报, 2023, 30(1): 95-101+106.
- [11] 汪金燕. 污染环境下载具脉冲接种的周期传染病模型的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(8): 128-137.
- [12] 吕贵臣, 陆征一. 高维系统稳定性的几何判据[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [13] Elazzouzi, A., et al. (2019) Analysis of a SIRS Epidemic Model with Distributed Delay and Relapse. *Statistics, Optimization Information Computing*, **7**, 545-557. <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-831>
- [14] Hirsch, M.W. (1988) Stability and Convergence in Strongly Monotone Dynamical Systems. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **383**, 41-53. <https://doi.org/10.1515/crll.1988.383.1>
- [15] Zhao, X. (2003) *Dynamical Systems in Population Biology*. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21761-1>
- [16] Liu, J. (2011) Threshold Dynamics for a HFMD Epidemic Model with Periodic Transmission Rate. *Nonlinear Dynamics*, **64**, 89-95. <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9848-6>