Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 470-481
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142046

Hans汉斯

收缩Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk时空中半线性波动方程解的爆破

雍梓凯，李消月

浙江理工大学理学院，浙江 杭州

收稿日期：2023年11月24日；录用日期：2023年12月10日；发布日期：2024年2月22日

摘 要

本文主要研究收缩时空Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk (FLRW)中半线性波动方程解的爆破分析，通过构造相应的积分不等式，得到了三类半线性波方程FLRW时空中解的爆破情况，并得到了解生命跨度的上限估计。

关键词

爆破，生命跨度，半线性波动方程

Blow-Up of Solutions of Semilinear Wave Equations in Shrinking Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk Spacetime

Zikai Yong, Xiaoyue Li

School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang

Received: Nov. 24th, 2023; accepted: Dec. 10th, 2023; published: Feb. 22nd, 2024

Abstract

This paper mainly studies the blow up phenomenon of the solutions of the semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetime. By constructing the suitable integral inequality, we can show that the solutions of the seminlienar wave equations considered in this paper will blow up in finite time, and the upper bound of the life span is also obtained.

文章引用: 雍梓凯, 李消月. 收缩 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk 时空中半线性波动方程解的爆破[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 470-481. DOI: 10.12677/pm.2024.142046

Keywords

Blow-Up, Lifespan, Semilinear Wave Equation

1. 引言

对于非线性波动方程解的存在性以及解的爆破性质的研究一直是学者们重视的课题。如果把非线性波动方程的问题引申到宇宙空间，按照宇宙学原理，在宇宙学尺度上天体系统最重要的特征是其具有均匀性和各向异性。弗里德曼－勒梅特－罗伯逊－沃尔克度规(Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric)是爱因斯坦场方程(Einstein field equations)的一个精确解，简称 FLRW 度规，描述的是一个满足宇宙学原理(cosmological principle)的宇宙，它有均匀性和各向同性的特性。现代宇宙学在过去的近 100 年间，科学家对 FLRW 度规的各种复杂情况都进行了研究，在这个数学框架内，宇宙的每一次观测结果几乎都是可以解释的，它主要描述了宇宙时空的两个属性，其属性之一是空间的几何结构。

刘安国文献[1]中可知爱因斯坦场方程解的一般式是利用对称性求得的，在默认了宇宙均匀性及各向同性以后，还需要考虑宇宙随时间膨胀或收缩的情况。为了方便我们可以将度规中的空间部分对时间的依赖性放在一个因子 a 中，于是利用其均匀性和各向同性可以将度规在笛卡尔坐标系写成如下的形式：

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\sum dx_i^2,$$

其中 $\sum dx_i$ 代表了度规中的空间部分。如果我们用状态方程下的能量动量求解爱因斯坦方程可以得到：

$$a(t)=ct^{\frac{2}{n(1+\omega)}} \tag{1}$$

其中 c 是一个常数，ω 是一个比例常数，详见文献[2]。

近些年来关于 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk 时空的半线性波动方程及其解的爆破问题学者们进行了广泛的研究，其中对于加速膨胀的 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk 时空，有如下柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-\dfrac{1}{t^{2\alpha}}\Delta u+\dfrac{\mu}{t}u_t=|u|^p, & t>1, \quad x\in R^n \\ u(1,x)=\varepsilon f(x), u_t(1,x)=\varepsilon g(x), & x\in R^n \end{cases} \tag{2}$$

这里 α 和 μ 为非负实数，ε 为小的参数，T_ε 为(2)经典解的生命跨度，也是 T 的最大值，假设 $P_F(n)$ 表示 *Fujita* 指数，可写为 $P_F(n)=1+\dfrac{2}{n}$，$P_S(n)$ 表示施特劳斯指数，它是如下方程的正根：

$$\gamma_S(n,p)=-(n-1)p^2+(n+1)p+2=0,$$

Takamura K 等证明了在有限时间内的爆炸和 $0\le\alpha<1$ 情况下的跨度上限估计，令

$$\gamma(n,p,\alpha,\mu)=-\left(n-1+\frac{\mu-\alpha}{1-\alpha}\right)p^2+\left(n+1+\frac{\mu+3\alpha}{1-\alpha}\right)p+2,$$

其中 $p_c(n,\alpha,\mu)$ 是 $\gamma(n,p,\alpha,\mu)=0$ 的正根。在文献[3]中作者得到如下生命跨度：

$$\begin{cases} T_\varepsilon \le C\varepsilon^{\frac{-2p(p-1)}{(1-\alpha)\gamma(n,p,\alpha,\mu)}} & 1<p<p_c(n,\alpha,\mu) \\ T_\varepsilon \le \exp\left(C\varepsilon^{-p(p-1)}\right) & p=p_c(n,\alpha,\mu)>P_F\left(n(1-\alpha)\right)=1+\dfrac{2}{n(1-\alpha)} \end{cases} \tag{3}$$

最近 Palmier 在文献[4]中用不同的方法得到了如上结果。

然而如果 *Fujita* 指数大于 *Strauss* 指数，那么生命的上限估计会比(3)更尖锐，其结果证明可以参考文献[5]和[6]，实际上已经在文献[7]中证明 $0\le\alpha<1$ 的跨度上界：

$$\begin{cases} T_\varepsilon \le C\varepsilon^{-\frac{p-1}{2-n(1-\alpha)(p-1)}} & 1<p<P_F\left(n(1-\alpha)\right), \\ T_\varepsilon \le \exp\left(C\varepsilon^{-(p-1)}\right) & p=P_F\left(n(1-\alpha)\right), \end{cases}$$

从文献[4]中我们可以得到相同的结果，而且上述结果也对应于[8]的结果，如果幂 p 是由 *Strauss* 指数所主导，那么到目前为止所述的这些都是尖锐的，在这种情况下我们可以说生命跨度是波动的，如文献[9]中提到的。

以上的结果都是基于加速膨胀的 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk 时空，考虑的问题为这三种方程的特殊情况，即方程

$$\begin{cases} \square_g u=-|u|^p,-|u_t|^p,-|\nabla_x u|^p, t\ge 0, x\in R^n \\ u(1,x)=\varepsilon f(x), u_t(1,x)=\varepsilon g(x), x\in R^n \end{cases}$$

的特殊情形。这里

$$\square_g=\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|\det g|}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)=-n\frac{\dot a(t)}{a(t)}\partial_t-\partial_t^2+\frac{1}{a^2(t)}\sum_{i=1}^n\partial_i^2$$

为波动算子。

本文主要考虑以下柯西问题在该收缩时空解的爆破，即为上述三种方程在 $a(t)>0$，$a'(t)<0$ 以及 $a(t)\le t^{-\alpha}$，α 为使该不等式成立的最大正数时的情形：

$$\begin{cases} u_{tt}+n\dfrac{a'(t)}{a(t)}u_t-\dfrac{1}{a^2(t)}\Delta u=|u_t|^p, & t\ge 0, & x\in R^n \\ u(1,x)=\varepsilon f(x), u_t(1,x)=\varepsilon g(x), & & x\in R^n \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_{tt}+n\dfrac{a'(t)}{a(t)}u_t-\dfrac{1}{a^2(t)}\Delta u=|u|^p, & t\ge 0, & x\in R^n \\ u(1,x)=\varepsilon f(x), u_t(1,x)=\varepsilon g(x), & & x\in R^n \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u_{tt}+n\dfrac{a'(t)}{a(t)}u_t-\dfrac{1}{a^2(t)}\Delta u=|\nabla_x u|^p, & t\ge 0, & x\in R^n \\ u(1,x)=\varepsilon f(x), u_t(1,x)=\varepsilon g(x), & & x\in R^n \end{cases} \tag{6}$$

其中 ε 是一个小的参数，$p>1$，$t\ge 1$。

2. 主要定理

在本文中的所有 C 可能为不同的非负常数，对于以上柯西问题解的爆破问题我们只需证明下列定理：

定理 1.1 假设 $n \ge 2$， $p > 1$， $u \in C^2\left([1,T)\times R^n\right)$ 是柯西问题(4)的经典解，对于 $T < \infty$，存在一个正数且独立于 A_1，p， α 和 C 的常数 ε，使得 T 满足：

$$T_\varepsilon^{1+(1+\alpha)n-np} \le C\varepsilon^{-(p-1)},$$

这里 C 是独立于 A_1，p， α 和 C 的常数。

定理 1.2 假设 $n \ge 2$， $p > 1$， $u \in C^2\left([1,T)\times R^n\right)$ 是柯西问题(5)的经典解，其中 $\int f(x)\mathrm{d}x > 0$，$\int g(x)\mathrm{d}x > 0$，对于 $T < \infty$，存在一个正数且独立于 A_1，p， α 和 C 的常数 ε，使得 T 满足：

$$\left(a\left(T_\varepsilon\right)\right)^{np+n} T_\varepsilon^{2+p+\alpha n-n(p-1)+\frac{2-n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p},$$

这里 C 是独立于 A_1，p， α 和 C 的常数。

推论 1.1： 如果 $a(t) = t^{-\alpha}$，T 满足 $T_\varepsilon \le \varepsilon^{2p-p^2+\alpha np^2+np(p-1)-\frac{2p-np(p-1)}{p-1}}$。

定理 1.3 假设 $n \ge 2$， $p > 1$， $u \in C^2\left([1,T)\times R^n\right)$ 是柯西问题(6)的经典解，其中 $\int f(x)\mathrm{d}x > 0$，$\int g(x)\mathrm{d}x > 0$，对于 $T < \infty$，存在一个正数且独立于 A_1，p， α 和 C 的常数 ε，使得 T 满足：

$$\left(a\left(T_\varepsilon\right)\right)^{np+n+\frac{p+n(p-1)}{p-1}} T_\varepsilon^{2+\alpha n-n(p-1)+\frac{2-p-n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p},$$

这里 C 是独立于 A_1，p， α 和 C 的常数。

推论 1.2： 如果 $a(t) = t^{-\alpha}$，T 满足 $T_\varepsilon^{-\alpha np+2-n(p-1)+\frac{2-p-n(p-1)-\alpha p-\alpha n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p}$。

3. 必要的引理

对于以上的定理的证明，需要引入如下引理及其证明。

引理 2.1 假设 $p > 1$， $a \ge 0$， $b \ge 0$， $c \ge 0$， $d \ge 0$， $k \ge 0$ 以及

$$M = (p-1)(b-a) + \alpha c + 1 - d > 0,$$

这里 $T \ge T_1 > T_0 \ge 1$，如果 $F \in C^2\left(\left[T_0, T\right)\right)$ 满足下面三个条件：

i) $F(t) \ge A_0 t^{-a}\left(t-T_1\right)^b$， $t \ge T_1$，

ii) $F'(t) + n\dfrac{a'(t)}{a(t)}F(t) \ge A_1 a^{-c}(t)(t+R)^{-d}\left|F(t)\right|^p$， $t \ge T_0$，

iii) $F\left(T_0\right) > 0$。

其中 A_0，A_1 是正常数，使得 T 满足：

$$T^{\frac{M}{p-1}} \le CA_0^{-1},$$

这里 C 是独立 A_1， α ， p 以及 c 的常数。

证明 我们主要通过引用文献[2]、[10]以及[11]的方法证明该引理。

在假设(ii)的两边同时乘以 $a^n(t)$ 得：

$$F'(t)a^n(t) + n\frac{a'(t)}{a(t)}F(t)a^n(t) \ge A_1 a^{n-c}(t)(t+R)^{-d}\left|F(t)\right|^p,$$

对于上述不等式在 $\left[T_0, t\right]$ 上积分得：

$$F(t)a^n(t) - F\left(T_0\right)a^n\left(T_0\right) \ge A_1\int_{T_0}^t a^{n-c}(s)(s+R)^{-d}\left|F(s)\right|^p \mathrm{d}s \ge 0,$$

由假设可知 $F(T_0)>0$， $a(t)>0$， 可得 $F(t)>0$。

将 i)代入 ii)得：

$$F'(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F(t)\ge A_1A_0^p a^{-c}(t)(t+R)^{-d}t^{-ap}(t-T_1)^{bp} \tag{7}$$

将不等式(7)两边同时乘以 $a^n(t)$ 得：

$$\left\{a^n(t)F(t)\right\}'\ge A_1A_0^p\left(a(t)\right)^{n-c}(t+R)^{-ap-d}(t-T_1)^{bp} \tag{8}$$

由 $F(t)>0$，上述不等式(8)两端分别在 $[T_1,t]$ 积分得：

$$\begin{aligned}a^n(t)F(t)&\ge CA_0^pA_1\int_{T_1}^t a^{n-c}(\tau)\tau^{-ap-d}(\tau-T_1)^{bp}\,\mathrm{d}\tau\\&\ge CA_0^pA_1a^n(t)\int_{T_1}^t\tau^{\alpha c-ap-d}(\tau-T_1)^{bp}\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

即

$$F(t)\ge CA_0^pA_1\int_{T_1}^t\tau^{\alpha c-ap-d}(\tau-T_1)^{bp}\,\mathrm{d}\tau\ge C\frac{A_0^pA_1}{bp+\alpha c+1}t^{-ap-d}(t-T_1)^{bp+\alpha c+1},$$

基于以上的事实，我们定义序列 a_j， b_j， D_j，其中 $j=0,1,2,3,\cdots$。

由 $a_{j+1}=a_jp+d$， $b_{j+1}=b_jp+\alpha c+1$， $D_{j+1}=\dfrac{A_1D_j^p}{b_j+\alpha c+1}$，

其中 $a_0=a$； $b_0=b$； $D_0=A_0$。

解得

$$a_j=p^j\left(a+\frac{d}{p-1}\right)-\frac{d}{p-1},\quad b_j=p^j\left(b+\frac{1+\alpha c}{p-1}\right)-\frac{1+\alpha c}{p-1},\quad D_{j+1}=\frac{A_1D_j^p}{b_{j+1}}\ge\frac{A_1D_j^p}{p^{j+1}\left(b+\dfrac{1+\alpha c}{p-1}\right)}=\frac{BD_j^p}{p^{j+1}},$$

所以

$$\begin{aligned}D_j&\ge\frac{BD_{j-1}^p}{p^j}\ge\frac{B}{p^j}\left(\frac{BD_{j-2}^p}{p^{j-1}}\right)^p=\frac{B^{1+p}}{p^{j+p(j-1)}}D_{j-2}^{p^2}\\&\ge\frac{B^{p+1}}{p^{j+p(j-1)}}\left(\frac{BD_{j-3}^p}{p^{j-2}}\right)^{p^2}=\frac{B^{1+p+p^2}}{p^{j+p(j-1)+p^2(j-2)}}D_{j-3}^{p^3}\\&\ge\cdots\ge\frac{B^{1+p+p^2+\cdots+p^{j-1}}}{p^{j+p(j-1)+p^2(j-1)+\cdots+p^{j-1}}}D_0^{p^j},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\ln D_j&\ge\ln B\sum_{k=0}^j p^k-\ln p\sum_{k=0}^j kp^{j-k}+p^j\ln D_0\\&=\frac{\ln B}{p-1}\left(p^j-1\right)-p^j\sum_{k=0}^j\frac{k}{p^k}\ln p+p^j\ln D_0,\end{aligned}$$

这里 $B=\left(b+\dfrac{1+\alpha c}{p-1}\right)^{-1}A_1$。

对上式取对数，我们可以得到：

$$D_j \ge \exp\left(Ep^j\right),$$

这里 $E = \frac{1}{p-1}\min\left(0,\ln B\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{p^k}\ln p + \ln A_0$ 。

所以

$$F(t) \ge D_j t^{-a_j}\left(t-T_1\right)^{b_j} \ge t^{\frac{d}{p-1}}\left(t-T_1\right)^{\frac{1+\alpha c}{p-1}}\exp\left[\left(E+\left(b+\frac{1+\alpha c}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right)-\left(a+\frac{d}{p-1}\right)\ln t\right)p^j\right],$$

其中 $t > T$ 。

又由于 $\left(b+\frac{1+\alpha c}{p-1}\right)-\left(a+\frac{d}{p-1}\right) = b-a+\frac{1+\alpha c-d}{p-1} > 0$，通过假设的条件，选取足够大的 t，可以找到一个正的 δ 满足如下：

$$E-\left(a+\frac{d}{p-1}\right)\ln t+\left(b+\frac{1+\alpha c}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right) \ge \delta > 0,$$

易知对于足够大的 t，当 $j\to\infty$ 时 $F(t)\to\infty$，所以

$$\frac{1}{p-1}\min\left(0,\ln B\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{p^k}\ln p+\ln A_0-\left(a+\frac{d}{p-1}\right)\ln t+\left(b+\frac{1+\alpha c}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right) \le 0$$

$$\frac{1}{p-1}\min\left(0,\ln B\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{p^k}\ln p+\ln A_0+C\ln t^{\frac{M}{p-1}} \le 0$$

$$\ln A_0 + C\ln t^{\frac{M}{p-1}} \le C,$$

因此的到生命跨度 T 满足：

$$T^{\frac{M}{p-1}} \le CA_0^{-1},$$

其中 $M = (p-1)(b-a)+\alpha c+1-d > 0$，$C$ 是独立 A_1，α，p 以及 c 的常数。

即完成引理 2.1 的证明。

引理 2.2 假设 $p>1$，$k\ge 0$，$b \ge 0$，$c \ge 0$，$d \ge 0$，$m \ge 0$ 以及

$$M = (p-1)(-b+c)-m+2 > 0,$$

其中 $T \ge T_1 > T_0 \ge 1$，如果 $F \in C^2\left(\left[T_0,T\right)\right)$ 满足下面三个条件：

i) $F(t) \ge A_0 a^k(t) t^{-b}\left(t-T_1\right)^c$，$t \ge T_1$，

ii) $F''(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t) \ge A_1 a^d(t)(t+R)^{-m}\left|F(t)\right|^p$，$t \ge T_0$，

iii) $F'(T_0) > 0$，$F(T_0) > 0$。

其中 A_0，A_1 是正常数，使得 T 满足：

$$\left(a(t)\right)^{k+\frac{d}{p-1}} T^{c-b+\frac{2-m}{p-1}} \le CA_0^{-1},$$

其中这里 $a(t) \le t^{-\alpha}$，α 为使该不等式成立的最大正数。

证明与引理 2.1 的证明相似，在假设(ii)的两端同乘以 $a^n(t)$ 得：

$$F''(t)a^n(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t)a^n(t) \ge A_1 a^{n+d}(t)(t+R)^{-m}\left|F(t)\right|^p,$$

再对上述不等式在$[T_0,t]$积分：

$$F'(t)a^n(t)-F'(T_0)a^n(T_0)\ge A_1\int_{T_0}^{t}a^{n+d}(s)(s+R)^{-m}\left|F(s)\right|^p\mathrm{d}s\ge 0$$

通过假设(iii)可知$F'(t)\ge 0$。即$F(t)>F(T_1)$。

将(i)代入(ii)后，再在不等式两边同乘以$a^n(t)$得：

$$F''(t)a^n(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t)a^n(t)\ge A_0^pA_1a^{n+d+kp}(t)(t+R)^{-m}t^{-bp}(t-T_1)^{cp},$$

$$\left\{F'(t)a^n(t)\right\}'\ge A_0^pA_1a^{n+d+kp}(t)(t+R)^{-m}t^{-bp}(t-T_1)^{cp},$$

同样对上述不等式在$[T_1,t]$上积分：

$$F'(t)a^n(t)-F'(T_1)a^n(T_1)\ge A_0^pA_1\int_{T_1}^{t}a^{n+d+kp}(s)(s+R)^{-m}s^{-bp}(s-T_1)^{cp}\mathrm{d}s,$$

$$F'(t)a^n(t)-F'(T_1)a^n(T_1)\ge A_0^pA_1a^{n+d+kp}(t)\int_{T_1}^{t}(s+R)^{-m}s^{-bp}(s-T_1)^{cp}\mathrm{d}s,$$

又因为$F'(t)\ge 0$，所以

$$\begin{aligned}F'(t)&\ge A_0^pA_1a^{d+kp}(t)\int_{T_1}^{t}(s+R)^{-m}s^{-bp}(s-T_1)^{cp}\mathrm{d}s\\&\ge A_0^pA_1a^{d+kp}(t)(t+R)^{-bp-m}\int_{T_1}^{t}(s-T_1)^{cp}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

对上述不等式再次在$[T_1,t]$积分得：

$$F(t)-F(T_1)\ge A_1A_0^pa^{d+kp}(t)(t+R)^{-bp-m}\int_{T_0}^{t}\int_{T_1}^{t}(s-T_1)^{cp}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,$$

由假设 iii) $F(T_0)>0$，即

$$F(t)\ge C\frac{A_1A_0^p}{(cp+1)(cp+2)}a^{d+kp}(t)(t+R)^{-m-bp}(t-T_1)^{cp+2},$$

基于以上的事实，我们定义序列k_j,b_j,c_j,D_j， $j=0,1,2,3,\cdots$，

由$k_{j+1}=k_jp+d, b_{j+1}=b_jp+m, c_{j+1}=c_jp+2$ 以及 $D_{j+1}=\dfrac{A_1D_j^p}{(cp+1)(cp+2)}$，

其中$k_0=k$； $b_0=b$； $c_0=c$； $D_0=A_0$

可得：

$$k_j=p^j\left(k+\frac{d}{p-1}\right)-\frac{d}{p-1},\quad b_j=p^j\left(b+\frac{m}{p-1}\right)-\frac{m}{p-1},\quad c_j=p^j\left(c+\frac{2}{p-1}\right)-\frac{2}{p-1},$$

$$D_{j+1}=\frac{A_1D_j^p}{(c_jp+1)(c_jp+2)}\ge\frac{BD_j^p}{p^{2j}},$$

易得

$$D_j\ge\frac{BD_{j-1}^p}{p^{2(j-1)}}\ge\cdots\ge\frac{B^{1+p+\cdots+p^{j-1}}}{p^{2\left(j-1+p(j-2)+\cdots+p^{j-1}\right)}}D_0^{p^j},$$

$$\ln D_j\ge\frac{\ln B}{p-1}\left(p^j-1\right)-2p^j\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{p^k}\ln p+p^j\ln D,$$

DOI: 10.12677/pm.2024.142046

这里 $B=\left(cp+\frac{2p}{p-1}\right)^{-2}A_1$。

当 j 足够大时，以及 $E=\frac{1}{p-1}\min\left(0,\ln B\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{p^k}\ln p+\ln A_0$。

所以

$$F\left(t\right)\geq\left(a\left(t\right)\right)^{-\frac{d}{p-1}}\left(t+R\right)^{\frac{m}{p-1}}\left(t-T_1\right)^{-\frac{2}{p-1}}$$
$$\times\exp\left[\left\{E+\left(k+\frac{d}{p-1}\right)\ln a\left(t\right)-\left(b+\frac{m}{p-1}\right)\ln\left(t+R\right)+\left(c+\frac{2}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right)\right\}p^j\right],$$

其中 $t>T$。

又由于

$$M=\left(p-1\right)\left(-\alpha k-b+c\right)-\alpha d>0,$$

通过假设的条件，选取足够大的 t，可以找到一个正的 δ 满足如下：

$$E+\left(k+\frac{d}{p-1}\right)\ln a\left(t\right)-\left(b+\frac{m}{p-1}\right)\ln\left(t-R\right)+\left(c+\frac{2}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right)\geq\delta>0,$$

易知所以对于足够大的 t，当 $j\to\infty$ 时 $F\left(t\right)\to\infty$，所以

$$E+\left(k+\frac{d}{p-1}\right)\ln a\left(t\right)-\left(b+\frac{m}{p-1}\right)\ln\left(t+R\right)+\left(c+\frac{2}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right)\leq 0,$$

$$\ln A_0+\left(k+\frac{d}{p-1}\right)\ln a\left(t\right)-\left(b+\frac{m}{p-1}\right)\ln\left(t+R\right)+\left(c+\frac{2}{p-1}\right)\ln\left(t-T_1\right)\leq C,$$

对上述不等式两端取指数得：

$$A_0a\left(t\right)^{k+\frac{d}{p-1}}\left(t+R\right)^{-b-\frac{m}{p-1}}\left(t-T_1\right)^{c+\frac{2}{p-1}}\leq C$$
$$a\left(t\right)^{k+\frac{d}{p-1}}\left(t+R\right)^{-b-\frac{m}{p-1}}\left(t-T_1\right)^{c+\frac{2}{p-1}}\leq CA_0^{-1}$$
$$a\left(t\right)^{k+\frac{d}{p-1}}t^{-b+c+\frac{m+2}{p-1}}\leq CA_0^{-1},$$

因此得到 T 满足

$$a\left(T\right)^{k+\frac{d}{p-1}}T^{-b+c+\frac{m+2}{p-1}}\leq CA_0^{-1},$$

其中 $a\left(t\right)\leq t^{-\alpha}$，即证。

引理 2.3 Poincaré 不等式：对于任意的 $f\in C_0^1\left(\Omega\right)$，存在常数 $C=C\left(\Omega\right)$，使得

$$\int_{\Omega}\left|f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x\leq C\int_{\Omega}\left|\nabla f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x。$$

4. 定理的证明

通过应用上述引理，下面求三类半线性波方程 FLRW 时空中解的爆破情况。

4.1. 定理 1.1 的证明

首先令 $F\left(t\right)=\int u_t\left(t,x\right)\mathrm{d}x$，通过[12]可知该柯西问题：

$$\Omega : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset \{|x| \le A(t)+R\},$$

又由于

$$A(t)=\int_1^t \frac{1}{a(s)}\mathrm{d}s \le \frac{t}{a(t)} \tag{9}$$

对于(4)的柯西问题，同时对式子两边在 R^n 上积分以及通过 Hölder 不等式得：

$$F'(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F(t)=\int_\Omega |u_t|^p \mathrm{d}x \ge \frac{|F(t)|^p}{(A(t)+R)^{n(p-1)}} \tag{10}$$

对不等式(10)左边乘以 $a^n(t)$ 得：

$$\left(F'(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}\right)a^n(t)=\{a^n(t)F(t)\}' \ge 0,$$

即

$$a^n(t)F(t)-a^n(1)F(1)\ge 0,$$

我们得到

$$F(t)\ge \frac{a^n(1)F(1)}{a^n(t)}=\frac{C\varepsilon}{a^n(t)},$$

其中 $\varepsilon>0$。

对于(10)中

$$(A(t)+R)^{-n(p-1)} \ge \left(\frac{t}{a(t)}+R\right)^{-n(p-1)}=\frac{(a(t))^{n(p-1)}}{(t+Ra(t))^{n(p-1)}}$$
$$\ge C\frac{(a(t))^{n(p-1)}}{(t+R)^{n(p-1)}},$$

因此

$$\int_\Omega |u_t|^p \mathrm{d}x \ge C\varepsilon^p \frac{(a(t))^{-n}}{(t+R)^{n(p-1)}}=C\varepsilon^p (a(t))^{-n}(t+R)^{-n(p-1)} \tag{11}$$

$$F'(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F(t)\ge \frac{a^{n(p-1)}(t)}{(t+R)^{n(p-1)}}|F(t)|^p,$$

对于(10)式两边同时乘以 $a^n(t)$，并在 $[T_1,t]$ 上积分得：

$$a^n(t)F(t)-a^n(T_1)F(T_1)=\int_{T_1}^t\int_\Omega a^n(s)|u_s|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

将(10)式代入(11)得

$$F(t)\ge C\varepsilon^p a^{-n}(t)\int_{T_1}^t (s+R)^{-n(p-1)}\mathrm{d}s$$
$$\ge C\varepsilon^p t^{-n(p-1)}(t-T_1)^{1+\alpha n},$$

我们最后得

$$F(t) \ge C\varepsilon^{p} t^{-n(p-1)} (t-T_1)^{1+\alpha n},$$

这里 $A_0 = \varepsilon$； $a = n(p-1)$； $b = 1+\alpha n$； $c = n$ 以及 $d = n(p-1)$。

又由于 $M = (1+\alpha n - np + n) p > 0$，我们得到柯西问题的生命跨度满足：

$$T_\varepsilon^{(1+\alpha n-np+n)p} \le C\varepsilon^{-(p-1)},$$

定理得证。

对于定理 1.2 及定理 1.3 的情况我们利用相同的方法进行证明。

4.2. 定理 1.2 的证明

对于柯西问题(5)的生命跨度，首先引入

$$F(t) = \int_\Omega u(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

易得

$$F''(t) + n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t) = \int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

上式利用 Hölder 不等式得：

$$F''(t) + n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t) \ge C(a(t))^{n(p-1)}(t+R)^{-n(p-1)}|F(t)|^p \tag{13}$$

由于 $\left(a^n(t)F'(t)\right)' = a^n(t)\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x \ge 0$，对不等式(13)左边积分可得：

$$a^n(t)F'(t) - a^n(1)F'(1) \ge 0,$$

所以 $F'(t) > 0$，再对上述不等式在 $[1,t]$ 积分得：

$$F(t) \ge \int_1^t \frac{a^n(1)F'(1)}{a^n(s)}\mathrm{d}s + F(1) \ge F'(1)t = C\varepsilon t \tag{14}$$

这里 $\varepsilon > 0$ 是独立于 C 和 t 的常数，在不等式(13)两边同乘以 $a(t)^n$ 再在 $[T_1,t]$ 积分得：

$$a^n(t)F'(t) \ge C\int_{T_1}^t a^{np}(s)(s+R)^{-n(p-1)}|F(s)|^p\,\mathrm{d}s,$$

$$F'(t) \ge Ca^{-n}(t)\int_{T_1}^t a^{np}(s)(s+R)^{-n(p-1)}|F(s)|^p\,\mathrm{d}s,$$

结合(9)，(14)再次在 $[T_1,t]$ 积分得：

$$a^n(t)F'(t) \ge C\int_{T_1}^t a^{np}(s)(s+R)^{-n(p-1)}|F(s)|^p\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} F(t) &\ge C\int_{T_1}^t a^{-n}(\tau)\int_{T_1}^\tau a^{np}(s)(s+R)^{-n(p-1)}|F(s)|^p\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\ge C\varepsilon^p a^{np}(t)t^{-n(p-1)}\int_{T_1}^t\int_{T_1}^\tau \tau^{\alpha n+p}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\ge C\varepsilon^p a^{np}(t)t^{-n(p-1)}(t-T_1)^{2+p+\alpha n}, \end{aligned}$$

这里 $k = np, b = n(p-1), c = 2+p+\alpha n, d = n(p-1), m = n(p-1)$ 以及

$$M = (p-1)(-np+n+p+\alpha n+2)+p+2-np > 0,$$

易知这种情况的柯西问题的生命跨度为：

$$\left(a\left(T_{\varepsilon}\right)\right)^{np+n} T_{\varepsilon}^{2+p+\alpha n+n(p-1)+\frac{2-n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p},$$

如果 $a(t)=t^{-\alpha}$，T 满足 $T_{\varepsilon} \le \varepsilon^{2p-p^2+\alpha np^2+np(p-1)-\frac{2p-np(p-1)}{p-1}}$，定理 1.2 即证。

4.3. 定理 1.3 的证明

对于柯西问题(6)的生命跨度，同样首先引入

$$F(t)=\int_{\Omega} u(t,x)\mathrm{d}x,$$

同柯西问题(6)我们易知

$$F''(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t)=\int_{\Omega}\left|\nabla_x u\right|^p \mathrm{d}x \tag{15}$$

上式引理 2.3 以及 Hölder 不等式得：

$$F''(t)+n\frac{a'(t)}{a(t)}F'(t)\ge C\left(a(t)\right)^{p+n(p-1)}(t+R)^{-p-n(p-1)}\left|F(t)\right|^p \tag{16}$$

因为 $\left(a^n(t)F'(t)\right)'=a^n(t)\int_{\Omega}\left|\nabla_x u\right|^p \mathrm{d}x \ge 0$，对(16)左边在 $[1,t]$ 积分得

$$a^n(t)F'(t)-a^n(1)F'(1)\ge 0,$$

由于 $\int f(x)\mathrm{d}x>0$，$\int g(x)\mathrm{d}x>0$，再对上述不等式在 $[1,t]$ 积分得：

$$F(t)\ge\int_1^t \frac{a^n(1)F'(1)}{a^n(s)}\mathrm{d}s+F(1)\ge F'(1)t=C\varepsilon t \tag{17}$$

对不等式(16)重复上述定理 1.2 证明的步骤得：

$$F(t)\ge C\varepsilon^p a^{np+p}(t)t^{-p-n(p-1)}\left(t-T_1\right)^{2+p+\alpha n},$$

这里 $k=np+p, b=p+n(p-1), c=2+p+\alpha n, d=p+n(p-1), m=p+n(p-1)$ 以及

$$M=p^2+(\alpha n+n+1)p-(\alpha+1)n>0,$$

这种情况的柯西问题的生命跨度为：

$$\left(a\left(T_{\varepsilon}\right)\right)^{np+n+\frac{p+n(p-1)}{p-1}} T_{\varepsilon}^{2+\alpha n-n(p-1)+\frac{2-p-n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p},$$

如果 $a(t)=t^{-\alpha}$，T 满足 $T_{\varepsilon}^{-\alpha np+2-n(p-1)+\frac{2-p-n(p-1)-\alpha p-\alpha n(p-1)}{p-1}} \le \varepsilon^{-p}$，定理 1.3 即证。

5. 总结

本文对收缩的 FLRW 时空背景下的三种半线性波动方程更为一般的情形做出了解的爆破的证明以及生命跨度估计，对前人的结论进行一定程度的推广。对方程解的爆破的研究的意义和研究方程解的整体存在性一样，具有重大的意义，我们可以在解的表达式难以求出的时候对解进行一个随时间变化的趋势的描述，求出生命跨度估计对于研究这些宇宙中满足这三类方程的波具有一定物理意义，我们可以通过生命跨度来估计这些波在宇宙中的传播时间上限。但是受研究方法的限制以及作者本人水平，本文无法完全解决一般情况下的该方程的解的爆破问题，读者在推导过程中应该可以发现，对 $a(t)$ 所做的各种假设其实也是为了能在不等式计算方面进行一个较为简便的处理，使得生命跨度的估计可以顺利得到，不

做如上假设，则暂时无法得出更为一般的结论。若能彻底解决一般情形下的问题，这将对宇宙学有十分重要的意义。

参考文献

[1] 刘安国. 真空中的球对称引力场: 爱因斯坦引力场方程的一个精确解[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 1991, 17(3): 88-92.

[2] Tsutaya, K. and Wakasugi, Y. (2021) Blow Up of Solutions of Semilinear Wave Equations in Accelerated Expanding Friedmann-Lemaître-Robertson-Walk Spacetime. *Reviews in Mathematical Physics*, **34**, Article ID: 2250003.

[3] Tsutaya, K. and Wakasugi, Y. (2020) Blow Up of Solutions of Semilinear Wave Equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Spacetime. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article 091503. https://doi.org/10.1063/1.5139301

[4] Palmieri, A. (2021) Blow-Up Results for Semilinear Damped Wave Equations in Einstein–de Sitter Spacetime. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **72**, Article No. 64. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01494-x

[5] Wakasugi, Y. (2014) Critical Exponent for the Semilinear Wave Equation with Scale Invariant Damping. In: Ruzhansky, M. and Turunen, V., Eds., *Fourier Analysis*, *Trends in Mathematics*, Springer International Publishing, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02550-6_19.

[6] Ikeda, M., Sobajima, M. and Wakasugi, Y. (2019) Sharp Lifespan Estimates of Blowup Solutions to Semi-Linear Wave Equations with Time-Dependent Effective Damping. *Journal of Hyperbolic Differential*, **16**, 495-517. https://doi.org/10.1142/S0219891619500176

[7] Tsutaya, K. and Wakasugi, Y. (2021) On Heatlike Lifespan of Solutions of Semilinear Wave Equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Spacetime. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **500**, Article ID: 125133. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125133

[8] Lai, N.-A., Takamura, K. and Wakasa, K. (2017) Blow-Up for Semilinear Wave Equations with the Scale Invariant Damping and Super-Fujita Exponent. *Journal of Differential Equations*, **263**, 5377-5394. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.06.017

[9] Galstian, A. and Yagdjian, K. (2020) Finite Lifespan of Solutions of the Semilinear Wave Equation in the Einstein-de Sitter Spacetime. *Reviews in Mathematical Physics*, **32**, Article ID: 2050018. https://doi.org/10.1142/S0129055X2050018X

[10] John, F. (1979) Blow-Up of Solutions of Nonlinear Wave Equations in Three Space Dimensions. *Manuscripta Mathematica*, **28**, 235-268. https://doi.org/10.1007/BF01647974

[11] Tu, Z. and Lin, J. (2017) A Note on the Blowup of Scale Invariant Damping Wave Equation with Sub-Strauss Exponent. arXiv:1709.00866v2.

[12] Sogge, C.D. (2008) Lectures on Non-Linear Wave Equations. 2nd Edition, International Press of Boston Inc, Boston.