Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 624-628
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142061

Hans汉斯

实数不等式在矩阵论中的推广

任欢欢

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2024年1月14日；录用日期：2024年1月30日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

通过实数不等式，将其推广到矩阵领域，借助酉不变范数对其进一步推广。

关键词

实数，不等式，*Frobenius*范数，正规矩阵

The Extension of Real Inequality in Matrix Theory

Huanhuan Ren

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jan. 14th, 2024; accepted: Jan. 30th, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

Firstly, give a real number inequality and extend it to the field of matrices, using the unitary invariant norm to further generalize it.

Keywords

Real Numbers, Inequality, *Frobenius* Norm, Normal Matrix

文章引用: 任欢欢. 实数不等式在矩阵论中的推广[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 624-628.
DOI: 10.12677/pm.2024.142061

1. 引言

不等式被应用于经济学、变分理论、运筹学、概率论等诸多学科，矩阵作为一个重要的数学工具，被广泛应用于概率论、数值分析、运筹学、统计学等领域，而矩阵不等式(矩阵特征值不等式、矩阵奇异值不等式、矩阵范数不等式)在矩阵论的研究中不可或缺，其在理论研究和实际应用中都有非常重要的作用，近年来，实数不等式与矩阵不等式的联系引起许多学者的研究，很大一部分学者都是将数值不等式推广到矩阵不等式上，詹兴致[1]将算术几何均值不等式推广为矩阵酉不变范数不等式，R. Bhatia [2]对詹兴致的结论添加任意矩阵 X 进行推广。T. Ando [3]将经典 Young 不等式推广为矩阵的酉不变范数不等式，M. Sababheh [4]对 T. Ando 的结论进一步细化，此外还有许多学者对算术几何均值不等式与 Young 不等式进一步细化改进[5] [6] [7] [8] [9]。基于 *Frobenius* 范数[10] [11] [12]可以用来衡量矩阵的超越性能，如机器学习的运算时间、度量神经网络的拟合性能等，因此本文考虑将实数不等式推广为矩阵论中的 *Frobenius* 范数不等式，并且进一步得到 *Frobenius* 范数不等式的推广形式。本文基于实数不等式和矩阵不等式的相关知识，在结论 1 中对文献[13]中的结论进一步总结细化，在结论 2 中，基于伯努利不等式[14]常被用于证明其他不等式的关键步骤，考虑将其推广为矩阵范数不等式，使其成为证明其他范数不等式的关键步骤。

2. 预备知识

定义 2.1：对任何一个矩阵 $A \in R^{m\times n}$，用 $\|A\|$ 表示按照某个法则确定的与矩阵 A 对应的实数，满足

1) 非负性：当 $A \neq 0$，则 $\|A\| > 0$；若 $A = 0$，则 $\|A\| = 0$。
2) 齐次性：$\|kA\| = |k|\|A\|$，k 为任意复数。
3) 三角不等式：对于任何两个同类型的矩阵 A, B 都有 $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$。
4) 矩阵乘法的相容性：若 A, B 可乘，则有 $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$。

则称对应于 A 的这个实数 $\|A\|$ 是矩阵 A 的矩阵范数。本文主要用到矩阵的 *Frobenius* 范数。

定义 2.2：令矩阵 $A \in R^{m\times n}$，$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，矩阵的 *Frobenius* 范数如下：

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{tr\left(A^H A\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\left(A\right)}。$$

引理 2.1：令 $A \in R^{m\times n}$，验证 $\|A\|_F$ 满足矩阵范数的定义。

证明：非负性齐次性易证，下证三角不等式的和相容性，设矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ 则

$$\|A+B\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}+b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^2\right|\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}^2\right|\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F + \|B\|_F。$$

设 $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times l}$，$B = \left(b_{ij}\right)_{l\times n}$，则

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right|^2，$$

根据 *Holder* 不等式可得

$$\|AB\|_F^2 \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}\left|a_{ik}\right|^2\sum_{k=1}^{l}\left|b_{kj}\right|^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\left|a_{ik}\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\left|b_{kj}\right|^2\right) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2，$$

即证 $\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$。

3. 结论 1

本节的研究主要针对引理 3.1 展开。

引理 3.1：对任意实数 x，当 $0 \le k \le 4$ 时，有 $x^2 + k \ge |kx|$ 成立。

证明：当$0 \le k \le 4$，有$x^2 \pm kx + k = \left(x \pm \frac{k}{2}\right)^2 + \left[k - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right] \ge 0$，即证。

定理 3.1： 令 A 为 n 阶正规矩阵，$0 \le k \le 4$，则有$tr\left(A^2 + kI\right) \ge 3trA$成立。

证明：设 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $A^2 + kI$ 的特征值为$\lambda_1^2 + k, \lambda_2^2 + k, \cdots, \lambda_n^2 + k$。由引理 2.1 可知$\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^2 + k\right) \ge k \sum_{i=1}^n \lambda_i$，即$tr\left(A^2 + kI\right) \ge 3trA$。

定理 3.2： 令 A 为 n 阶正规矩阵，$0 \le k \le 4$，则有$\left\|A^2 + kI\right\|_F \ge \|kA\|_F$成立。

证明：设 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 kA 的特征值为$k\lambda_1, k\lambda_2, \cdots, k\lambda_n$，$A^2 + kI$ 的特征值为$\lambda_1^2 + k, k\lambda_2^2 + k, \cdots, k\lambda_n^2 + k$。存在酉矩阵 U 和 V，使得$A^2 + kI = U\Lambda U^H$，这里$\Lambda = diag\left(\lambda_1^2 + k, \lambda_2^2 + k, \cdots, \lambda_n^2 + k\right)$，$M = diag\left(k\lambda_1, k\lambda_2, \cdots, k\lambda_n\right)$。已知矩阵的 *Frobenius* 范数为酉不变范数，从而有

$$\|A + kI\|_F = \|U\Lambda U\|_F = \|\Lambda\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i^2 + k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|kA\|_F = \left\|VMV^H\right\|_F = \|M\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \left|k\lambda_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

由引理 3.1 可知

$$\lambda_i^2 + k \ge \left|k\lambda_i\right| \Rightarrow \left|\lambda_i^2 + k\right|^2 \ge \left|k\lambda_i\right|^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i^2 + k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\sum_{i=1}^n \left|k\lambda_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left\|A^2 + kI\right\|_F \ge \|kA\|_F。$$

定理 3.3： 令 X, A 为 n 阶正规矩阵，$0 \le k \le 4$，则有$\left\|A^2 X + kX\right\|_F \ge \|kAX\|_F$成立。

证明：存在酉矩阵 U 和 V，使得$A = U\Lambda U^H$，$X = VMV^H$，这里有$\Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$，$M = diag\left(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\right)$。$A^2 + kX$ 可以通过酉变换写作如下形式：

$$A^2 X + kX = U\Lambda^2 U^H VMV^H + kVMV^H,$$

所以

$$\left\|A^2 X + kX\right\|_F = \left\|U\Lambda^2 U^H VMV^H + kVMV\right\|_F = \left\|U\left(\Lambda^2 U^H VM + kU^H VM\right)V^H\right\|_F,$$

设$U^H VM = B = \left(b_{ij}\right)$，从而有

$$\left\|A^2 X + kX\right\|_F = \left\|\Lambda^2 B + kB\right\|_F = \left\|\left(\lambda_i^2 + k\right)b_{ij}\right\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i^2 + k\right|^2 \sum_{i,j}^n \left|b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

同理可以得到

$$\|kAX\|_F = \left\|kU\Lambda U^H VMV^H\right\|_F = \|k\Lambda B\|_F = \left\|k\lambda_i b_{ij}\right\|_F = \left(\sum_{i,j}^n \left|k\lambda_i\right|^2 \left|b_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

由引理 3.1 可知

$$\lambda_i^2 + k \ge \left|k\lambda_i\right| \Rightarrow \left|\lambda_i^2 + k\right|^2 \ge \left|k\lambda_i\right|^2 \Rightarrow \left\|A^2 X + kX\right\|_F \ge \|kAX\|_F。$$

证毕。

例子 3.1： 设$0 \le k \le 4$，给出正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.6525 & 0.7404 \\ 0.0867 & 0.4179 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0.6592 & 0.3489 \\ 0.4808 & 0.7261 \end{bmatrix},$$

当$k = 0$，$\left\|A^2\right\|_F = 0.9663 > 0$；

当 $k=1$，$\left\|A^2+I\right\|_F=2.0956$，$\|A\|_F=1.0752$，$\left\|A^2X+X\right\|_F=2.0876$，$\|AX\|_F=1.1754$；

当 $k=2$，$\left\|A^2+2I\right\|_F=3.4422$，$\|2A\|_F=2.1504$，$\left\|A^2X+2X\right\|_F=3.1967$，$\|2AX\|_F=2.3508$；

当 $k=3$，$\left\|A^2+3I\right\|_F=4.8277$，$\|3A\|_F=3.2257$，$\left\|A^2X+3X\right\|_F=4.3254$，$\|3AX\|_F=3.5262$；

当 $k=4$，$\left\|A^2+4I\right\|_F=6.2261$，$\|3A\|_F=4.3009$，$\left\|A^2X+4X\right\|_F=5.4616$，$\|4AX\|_F=4.7016$；

即证定理 3.2 和定理 3.3 成立，即 $\left\|A^2I+kI\right\|_F\geq\|kA\|_F$，$\left\|A^2X+kX\right\|_F\geq\|kAX\|_F$。

4. 结论 2

本节的研究主要针对引理 4.1 展开。

引理 4.1 (伯努利不等式)： 对任意整数 $q\geq 0$ 和任意实数 $x\geq -1$，有 $(1+x)^q\geq 1+qx$ 成立。

证明：证明过程较简单，略。

定理 4.1： 令 A 为 n 阶正规矩阵，满足 $a_{ij}\geq -1$，有 $tr(I+A)^q\geq tr(I+qA)$，这里 $q\geq 0$。

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $(I+A)^q$ 的特征值为 $(1+\lambda_1)^q,(1+\lambda_2)^q,\cdots,(1+\lambda_n)^q$，$I+qA$ 的特征值为 $q\lambda_1+1,q\lambda_2+1,\cdots,q\lambda_n+1$。由引理 4.1 可知 $\sum_{i=1}^n(\lambda_i+1)^q\geq\sum_{i=1}^n q\lambda_i+1$，即证 $tr(I+A)^q\geq tr(I+qA)$。

定理 4.2： 令 A 为 n 阶正规矩阵，满足 $a_{ij}\geq i^2$，有 $\left\|(A+I)^q\right\|_F\geq\|qA+I\|_F$，这里 $q\geq 0$。

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $(I+A)^q$ 的特征值为 $(1+\lambda_1)^q,(1+\lambda_2)^q,\cdots,(1+\lambda_n)^q$，$I+qA$ 的特征值为 $q\lambda_1+1,q\lambda_2+1,\cdots,q\lambda_n+1$。存在酉矩阵 U 和 V，使得 $(A+I)^q=U\Lambda U^H$，$qA+I=VMV^H$，这里 $\Lambda=diag(\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1)$，$M=diag(q\lambda_1+1,q\lambda_2+1,\cdots,q\lambda_n+1)$。从而有

$$\left\|(A+I)^q\right\|_F=\left\|U\Lambda U^H\right\|_F=\|\Lambda\|_F=\left(\sum_{i=1}^n\left|(\lambda_i+1)^q\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|qA+I\|_F=\left\|VMV^H\right\|_F=\|M\|_F=\left(\sum_{i=1}^n|q\lambda_i+1|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由引理 4.1 可知，$\sum_{i=1}^n(\lambda_i+1)^q\geq\sum_{i=1}^n q\lambda_i+1$，即得 $\left(\sum_{i=1}^n\left|(\lambda_i+1)^q\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq\left(\sum_{i=1}^n|q\lambda_i+1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。证毕。

定理 4.3： 令 X,A 为 n 阶正规矩阵，满足 $x_{ij}\geq i^2$，$a_{ij}\geq i^2$，有 $\left\|(AX+X)^q\right\|_F\geq\|qAX+X\|_F$，这里 $0\leq q\leq 1$。

证明：存在酉矩阵 U 和 V，使得 $A=U\Lambda U^H$，$X=VMV^H$，这里有 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$M=diag(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。则

$$(AX+X)^q=\left(U\Lambda U^HVMV^H+VMV^H\right)^q=U\left(\Lambda U^HVM+U^HVM\right)^q\left(V^H\right)^q,$$

$$qAX+X=qU\Lambda U^HVMV^H+VMV^H=U\left(q\Lambda U^HVM+U^HVM\right)V^H。$$

所以

$$\left\|(AX+X)^q\right\|_F=\left\|U^q\left(\Lambda U^HVM+U^HVM\right)^q\left(V^H\right)^q\right\|_F=\left\|\left(\Lambda UV^HM+U^HVM\right)^q\right\|_F,$$

$$\|qAX+X\|_F=\left\|U\left(q\Lambda U^HVM+U^HVM\right)V^H\right\|_F=\left\|q\Lambda U^HVM+U^HVM\right\|_F。$$

设 $U^HVM=B=(b_{ij})$，从而有

$$\left\|(AX+X)^q\right\|_F=\left\|(\Lambda B+B)^q\right\|_F=\left(\sum_{i=1}^n\left(|\lambda_i+1|^q\right)^2\sum_{i,j}^n\left(|b_{ij}|^q\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|qAX+X\|_F=\|q\Lambda B+B\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}|q\lambda_i+1|^2\sum_{i,j}^{n}|b_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}。$$

由引理 4.1 可知，$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)^q\geq\sum_{i=1}^{n}q\lambda_i+1$，即得 $\sum_{i=1}^{n}\left(|\lambda_i+1|^q\right)^2\geq\sum_{i=1}^{n}|q\lambda_i+1|^2$，令 $y_i=|b_{ij}|^2\geq0$，此时，$\left\|(AX+X)^q\right\|_F\geq\|qAX+X\|_F$ 在 $y_i\geq1$ 时成立。

例子 4.1：给出正规矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.0965 & 0.9421\\ 0.1320 & 0.9561\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}0.5752 & 0.2348\\ 0.0598 & 0.3532\end{bmatrix},$$

当 $0<q=5$ 时，$\left\|(A+I)^5\right\|_F=48.0730$，$\|5A+I\|_F=7.6313$；

当 $0<q=0.2<1$ 时，$\left\|(AX+X)^{0.2}\right\|_F=1.3033$，$\|0.2AX+X\|_F=0.8002$；

$q=0,q=1$ 时，定理 4.3 显然成立，即证定理 4.2 和定理 4.3 成立。

5. 结语

本文将实数不等式推广为 *Frobenius* 范数不等式，在之后的研究中也可以将本文的不等式推广为矩阵核范数不等式。但是因为矩阵乘法一般不具有乘法交换性，将数值不等式推广到矩阵领域有一定的难度，因此，将数值不等式推广为矩阵不等式的探索仍具有研究性。更进一步，因为矩阵是特殊的张量，因此可以考虑将矩阵不等式的研究结论推广为张量范数不等式。

参考文献

[1] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] Bhatia, R. and Kittaneh, F. (1990) On the Singular Values of a Product of Operators. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **11**, No. 2. https://doi.org/10.1137/0611018

[3] Ando, T. (1995) Matrix Young Inequalities. In: Huijsmans, C.B., Kaashoek, M.A., *et al*., Eds., *Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices*, Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9076-2_5

[4] Sababheh, M. (2015) Interpolated Inequalities for Unitarily Invariant Norms. *Linear Algebra and Its Applications*, **475**, 240-250. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.02.026

[5] Al-Manasrah, Y. and Kittaneh, F. (2015) A Generalization of Two Refined Young Inequalities. *Positivity*, **19**, 757-768. https://doi.org/10.1007/s11117-015-0326-8

[6] Conde, C. (2013) Young Type Inequalities for Positive Operators. *Annals of Functional Analysis*, **4**, 144-152. https://doi.org/10.15352/afa/1399899532

[7] Manjegani, S.M. and.Norouzi, A. (2013) Matrix Form of the Inverse Young Inequalities. *Linear Algebra and Its Applications*, **486**, 484-493. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.08.022

[8] Argerami, M. and Farenick, D.R. (2003) Young Inequality in Trace-Class Operators. *Mathematische Annalen*, **325**, 727-744. https://doi.org/10.1007/s00208-002-0400-y

[9] Erlijman, J., Farenick, D.R. and Zeng, R. (2001) Young Inequality in Compact Operators. In: Gohberg, I. and Langer, H., Eds., *Linear Operators and Matrices*, Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8181-4_13

[10] 陈跃鹏, 姚波, 苏晓明, 张庆灵. 具有 Frobenius 范数界的不确定广义系统鲁棒二次稳定完整性[J]. 沈阳工业大学学报, 2002, 24(2): 173-176.

[11] 许可, 顾尚泰, 等. 基于 Frobenius 范数奇异值分解的快速 ICP 算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2023, 21(10): 1263-1270.

[12] 石聪聪. 矩阵 Frobenius 范数不等式及次可加性研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2016.

[13] 胡沩. 一个实数不等式在矩阵论中的推广[J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2016, 37(1): 75-77.

[14] 戴之皓. 伯努利不等式的介绍与推广[J]. 青年与社会, 2019(6): 158-159.