Pure Mathematics **理论数学, 2024, 14(2), 649-654**
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142064

Hans汉斯

极小模原理的一类三阶全对称张量不等式应用

段德园*，**龚一帆**

云南师范大学数学学院，云南　昆明

收稿日期：2024年1月6日；录用日期：2024年1月29日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

本文研究了共形形式Φ消失的三阶全对称张量 $A_{ij,k}$ 的极小模张量，我们利用极小模的非负性证明了不等式 $|\nabla A|^2 \geq \frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}|\nabla R|$。

关键词

极小模原理，子流形，Blaschke张量，共形形式

Application of the Minimal Normal Tensors to a Class of Third-Order Fully Symmetric Tensor Inequalities

Deyuan Duan*, **Yifan Gong**

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jan. 6th, 2024; accepted: Jan. 29th, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

In this paper, we study the minimal norm tensors of the third order full symmetry tensors $A_{ij,k}$, with vanishes from the conformal form Φ. We prove the inequality $|\nabla A|^2 \geq \frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}|\nabla R|$ by using the non-negativity of the minimal norm.

*通讯作者。

文章引用: 段德园, 龚一帆. 极小模原理的一类三阶全对称张量不等式应用[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 649-654.
DOI: 10.12677/pm.2024.142064

Keywords

Minimal Norm Tensors, Submanifolds, Blaschke Tensors, Conformal Form

1. 引言

张量在微分几何的研究中起着非常重要的作用。对张量的 trace-free 分解就是研究之一。J. T. Alexander 在[1]中研究了张量分解存在的条件，H. Weyl 在[2]中利用 trace-free 分解得到了正交群的表示理论。D. Krupka 在[3] [4] [5] [6] [7]中对张量的 trace-free 分解做了很多研究，得到了(2,2)型和(1,3)型 Riemann 曲率张量的 trace-free 分解。J. Mikes，M. jukl，L. Juklová，L. Lakomá 在[8] [9] [10] [11]中推广了 D. Krupka 的一些结果，应用在近复结构空间和一些特殊的微分算子。V. T. Toth，S. G. Turyshev 在[12]中计算了三阶协变张量的 trace-free 张量和部分高阶 trace-free 的全对称协变张量。最近，郭震提出了极小模张量的研究，管山林和郭震合作在[13]中得到了三阶和四阶张量的极小模张量。

Blaschke 张量 A 是单位球面中子流形的 Möbius 微分几何的一个基本不变量。王长平在[14]中利用光锥模型，引入了 4 个基本的 Möbius 不变量，即：Möbius 度量 g，Möbius 第二基本形式 B，Blaschke 张量 A 和 Möbius 形式 Φ。此后，Möbius 子流形几何得到了许多研究，其中包含了 Möbius 形式消失的超曲面分类[15]，Möbius 迷向子流形的分类[16]，具有常 Möbius 截面曲率的超曲面的分类[17]以及对 Blaschke 张量线性依赖于 Möbius 度量和 Möbius 第二基本形式超曲面的分类[18]。钟定兴和肖卫玲等人在[19]中研究了具有两个互异 Blaschke 特征值的超曲面与 Blaschke 等参超曲面的关系。李兴校和宋虹儒在[20]中对单位球面中具有 3 个不同 Blaschke 特征值的 Blaschke 平行子流形进行了完全的分类。郭震和李虹在[21]中得到了一般 Riemann 空间中子流形的四个共形不变量及其可积条件，并推导出外围空间有常截面曲率时的可积条件。Möbius 形式消失和 Blaschke 平行子流形的分类都得到了研究，因此非常自然地想到研究一般 Riemann 空间中共形形式消失时 Blaschke 张量的不等式。本文从极小模张量出发，利用[13]三阶协变张量的极小模张量的一般公式，得到了三阶协变张量 $A_{ij,k}$ 在共形形式 Φ 消失时极小模表达式。因此，利用极小模的非负性，我们得到了以下定理：

定理 1 设 n 维黎曼流形 M 等距浸入到 $n+p$ 维具有常截面曲率 c 的黎曼流形 $N(c)$。若共形形式 Φ 消失，则 Blaschke 张量 A 满足

$$|\nabla A|^2 \geq \frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}|\nabla R|,$$

其中 R 是关于度量 $\boldsymbol{g}$ (见(2.8))的纯量曲率。

2. 预备知识

设 n 维黎曼流形 M 等距浸入到 $n+p$ 维度量为 g 的黎曼流形 $N(c)$，c 为 N 的截面曲率。我们选择局部正交基 $e_1,\cdots,e_{n+p}$，使得 $e_1,\cdots,e_n$ 切于 M，$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 法于 M。我们使用的指标范围如下：

$$1\leq A,B,C,\cdots\leq n+p,\quad 1\leq i,j,k,\cdots\leq n,\quad n+1\leq \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leq n+p.$$

我们约定重复的指标在各自取值范围内求和。设 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$ 是 $e_1,\cdots,e_{n+p}$ 的对偶标架场。于是，我们

可以写出 N 的结构方程

$$d\omega_{AB}=\omega_B\wedge\omega_{BA},\ \omega_{AB}+\omega_{BA}=0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB}-\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}=-\frac{1}{2}K_{ABCD}\omega_C\wedge\omega_D, \tag{2.2}$$

其中 ω_{AB} 和 K_{ABCD} 分别是由 N 的度量 g 诱导的联络分量和曲率分量。限制在 M 上，我们有

$$\omega_\alpha=0, \tag{2.3}$$

$$\omega_j\wedge\omega_{j\alpha}=0, \tag{2.4}$$

$$d\omega_{ij}-\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=-\frac{1}{2}K_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l. \tag{2.5}$$

由(2.4)，利用 Cartan 引理有

$$\omega_{i\alpha}=h_{ij}^\alpha\omega_j,\quad h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha. \tag{2.6}$$

我们定义 1-形式 θ_i 和 $\theta_{i\alpha}$ 为

$$\theta_i=\rho\omega_i,\quad \theta_{i\alpha}=\omega_{i\alpha}-H^\alpha\omega_i \tag{2.7}$$

其中 $\rho^2=\frac{n}{n-1}\sum_{i,j,\alpha}\left(h_{ij}^\alpha-H^\alpha\delta_{ij}\right)^2$， $H^\alpha=\sum_i h_{ii}^\alpha$ 。

于是，我们可以定义

$$\boldsymbol{g}=\sum_i\left(\theta_i\right)^2=\rho^2 g, \tag{2.8}$$

和

$$B=\rho^{-1}\theta_{i\alpha}\theta_i e_\alpha=B_{ij}^\alpha\theta_i\theta_j\rho^{-1}e_\alpha, \tag{2.9}$$

其中

$$B_{ij}^\alpha=\rho^{-1}\left(h_{ij}^\alpha-H^\alpha\delta_{ij}\right). \tag{2.10}$$

我们称 $A=A_{ij}\theta_i\theta_j$ 为子流形 M 的 Blaschke 张量， $\Phi=\rho^{-1}C_i^\alpha\theta_i e_\alpha$ 为 M 的共形形式，其中

$$A_{ij}=-\rho^{-2}\left[\left(\log\rho\right)_{i,j}-\left(\log\rho\right)_i\left(\log\rho\right)_j-H^\alpha h_{ij}^\alpha+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla\log\rho\right\|^2+\left\|H\right\|^2-c\right)\delta_{ij}\right], \tag{2.11}$$

$$C_i^\alpha=-\rho^{-2}\left[H_{,i}^\alpha+\left(h_{il}^\alpha-H^\alpha\delta_{il}\right)\left(\log\rho\right)\right], \tag{2.12}$$

其中 ∇ 和 $\left(,\right)_{i,j}$ 分别表示关于 g 的梯度算子和二阶协变导数。

推论 2.1 [14]设 M^n 是有常截面曲率 c 的黎曼流形 $N^{n+p}\left(c\right)$ 的黎曼子流形，则我们有

$$R_{ijkl}=B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha-B_{il}^\alpha B_{jk}^\alpha+A_{ik}\delta_{jl}+A_{jl}\delta_{ik}-A_{il}\delta_{jk}-A_{jk}\delta_{il}, \tag{2.13}$$

$$R_{\alpha\beta ij}^\perp=B_{ik}^\alpha B_{kj}^\beta-B_{ik}^\beta B_{kj}^\alpha, \tag{2.14}$$

$$B_{ij,k}^\alpha-B_{ik,j}^\alpha=\delta_{ij}C_k^\alpha-\delta_{ik}C_j^\alpha, \tag{2.15}$$

$$C_{i,j}^\alpha-C_{j,i}^\alpha=B_{ik}^\alpha A_{kj}-B_{jk}^\alpha A_{ki}, \tag{2.16}$$

$$A_{ij,k} - A_{ik,j} = B_{ik}^{\alpha} C_j^{\alpha} - B_{ij}^{\alpha} C_k^{\alpha}. \tag{2.17}$$

其中 R_{ijkl} 和 $R_{\alpha\beta ij}^{\perp}$ 分别是关于度量 $\boldsymbol{g}$ 的曲率张量分量和法曲率分量。

在(2.16)中令 $j=l$ 求和，我们有

$$R_{ik} = -B_{ij}^{\alpha} B_{jk}^{\alpha} + (n-2) A_{ik} + tr(A)\delta_{ik}, \tag{2.18}$$

在(2.18)中令 $i=k$ 求和，有

$$R = -\sum_{i,k,\alpha} \left(B_{ik}^{\alpha}\right)^2 + 2(n-1) tr(A), \tag{2.19}$$

注意到

$$\sum_{i,j,\alpha} \left(B_{ij}^{\alpha}\right)^2 = \frac{n-1}{n}, \tag{2.20}$$

于是，我们有

$$tr(A) = \frac{1}{2(n-1)}\left(R - \frac{n-1}{n}\right), \tag{2.21}$$

下面我们定义极小模。

定义 1 设 V 是 n 维向量，T 为定义在 V 上的三阶全对称张量。若对于任意 $x \in \mathbb{R}$，三阶张量 $F(x)$ 满足如下关系

$$F_{ijk}(x) = T_{ijk} + x\left(T_i \delta_{jk} + T_j \delta_{ik} + T_k \delta_{ij}\right), \tag{2.22}$$

其中 T_{ijk} 和 $F_{ijk}(x)$ 分别表示张量 T 和 $F(x)$ 的分量，$T_i = \sum_{j=k=1} T_{ijk}$.

定义 2 若对于任意的 $x \in \mathbb{R}$，函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \|F(x)\|^2 = \sum_{i,j,k} F_{ijk}^2(x), \tag{2.23}$$

则称 $f(x)$ 为 $F(x)$ 的模函数。

定义 3 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x), \tag{2.24}$$

则称 $F(x_0)$ 是 T 的极小模张量。

3. 定理 1 的证明

由(2.22)和(2.23)，我们有

$$f(x) = \sum_{i,j,k} F_{ijk}^2 = \sum_{i,j,k} T_{ijk}^2 + 3\left[(n+2)x^2 + 2x\right]\sum_i T_i^2, \tag{3.1}$$

从(3.1)可以看出 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 有极小值。

当 $T_i = 0$ 时，$\|F\|^2 = \sum_{i,j,k} T_{ijk}^2$ 。当 $T_i \neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 6\left[(n+2)x+1\right]\sum_i T_i^2$ ，令 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$，我们得到 $(n+2)x+1=0$，即 $x = -\frac{1}{n+2}$ 是 $f(x)$ 的唯一的极小值点。于是，极小模为

$$\|F\|^2 = \sum_{i,j,k} T_{ijk}^2 - \frac{3}{n+2}\sum_i T_i^2. \tag{3.2}$$

若 $\Phi=0$，由(2.17)我们有 $A_{ij,k}=A_{ik,j}$，即三阶张量 $A_{ij,k}$ 是全对称的。我们令 $T_{ijk}=A_{ij,k}$，$T_i=\sum_j A_{ij,j}=\sum_j A_{jj,i}=\left[tr(A)\right]_i$。通过(2.21)，我们有

$$\left[tr(A)\right]_{,i}=\left[\frac{1}{2(n-1)}\left(R+\frac{n-1}{n}\right)\right]_{,i}=\frac{1}{2(n-1)}R_{,i}. \tag{3.3}$$

带入(3.2)，我们有

$$\|F\|^2=\sum_{i,j,k}A_{ij,k}^2-\frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}\sum_i R_{,i}^2,$$

由极小模的非负性，即：$\|F\|^2\ge 0$。于是，我们有

$$\sum_{i,j,k}A_{ij,k}^2-\frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}\sum_i R_{,i}^2\ge 0,$$

即

$$\|\nabla A\|^2\ge\frac{3}{4(n-1)^2(n+2)}\|\nabla R\|^2.$$

这就完成了定理的证明。

本文优点

在[13]中给出了极小模原理，但其应用很少。本文给出了一类三阶全对称张量的一个应用，证明了一般 Riemann 空间中共形形式消失时 Blaschke 张量的一个不等式估计。

展　望

由于本文用极小模原理只证明了一般 Riemann 空间中共形形式消失时 Blaschke 张量的不等式，没有给出不等式成立的条件。

参考文献

[1] Cheng, Q.M. and Ishikawa, S. (1999) A Characterization of the Clifford Torus. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**, 819-828. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-05088-1

[2] Alexander, J.W. (1926) On the Decomposition of Tensors. *Annals of Mathematics*, **27**, 421-423. https://doi.org/10.2307/1967693

[3] Krupka, D. (1995) The Trace Decomposition Problem. *Beitragezur Algebra und Geometrie*, **36**, 303-316.

[4] Krupka, D. (2017) Decompositions of Covariant Tensor Spaces. *Lepage Research Institute Library*, **3**, 1-20.

[5] Krupka, D. (2003) The Weyl Tensors. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **62**, 447-460. https://doi.org/10.5486/PMD.2003.2884

[6] Krupka, D. (1995) The Trace Decomposition Problem. *Beitragezur Algebra und Geometrie*, **36**, 303-316.

[7] Krupka, D. (1996) The Trace Decomposition of Tensors of Type (1,2) and (1,3). In: Tamássy, L. and Szenthe, J., Eds., *New Developments in Differential Geometry*, Springer, Dordrecht, 243-253. https://doi.org/10.1007/978-94-009-0149-0_19

[8] Mikes, J., Jukl, M. and Juklová, L. (2011) Some Results on Traceless Decomposition of Tensors. *Journal of Mathematical Sciences*, **174**, 627-640. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0321-y

[9] Mikes, J. (1996) On the General Trace Decomposition Problem. *Proceedings of Conference*, 28 August-1 September 1995, 45-50.

[10] Jukl, M. and Juklová, L. (2013) On Decomposition Problems on Manifolds with a Special Differential Operators. *Miskolc Mathematical Notes*, **14**, 591-599. https://doi.org/10.18514/MMN.2013.920

[11] Lakomá, L. and Jukl, M. (2004) The Decomposition of Tensor Spaces with Almost Complex Structure. In: Slovák, J. and Čadek, M., Eds., *Proceedings of the* 23*rd Winter School* "Geometry and Physics", Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 145-150.

[12] Toth, V.T. and Turyshev, S.G. (2022) Efficient Trace-Free Decomposition of Symmetric Tensors of Arbitrary Rank. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **19**, Article ID: 2250201. https://doi.org/10.1142/S0219887822502012

[13] Guo, Z. and Guan, S.L. (2021) Minimal Norm Tensors Principle and its Applications. arXiv preprint arXiv:2112.01222.

[14] Wang, C. (1998) Moebius Geometry of submanifolds in S^n. *manuscripta mathematica*, **96**, 517-534. Https://Doi.Org/10.1007/S002290050080

[15] Li, H.Z. and Wang, C.P. (2003) Surfaces with Vanishing Möbius form in S^n. *Acta Mathematica Sinica*, **19**, 671-678. https://doi.org/10.1007/s10114-003-0309-8

[16] Liu, H., Wang, C. and Zhao, G. (2001) Möbius Isotropic Submanifolds in S^n. *Tohoku Mathematical Journal*, **53**, 553-569. https://doi.org/10.2748/tmj/1113247800

[17] Guom Z., Lim, T., Linm, L., *et al*. (2011) Classification of Hypersurfaces with Constant Möbius Curvature in S^{m+1}. *Mathematische Zeitschrift*, **271**, 193-219. https://doi.org/10.1007/s00209-011-0860-4

[18] Li, H. and Wang, C. (2003) Möbius Geometry of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Scalar Curvature. *manuscripta mathematica*, **112**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00229-003-0383-3

[19] 钟定兴, 肖卫玲, 张和颜. 上具有两个 Blaschke 特征值的超曲面[J]. 赣南师范大学学报, 2017, 38(6): 37-42.

[20] 李兴校, 宋虹儒. 单位球面中具有 3 个不同 Blaschke 特征值的 Blaschke 平行子流形[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2018, 39(3): 249-272.

[21] Guo, Z. and Li, H. (2018) Conformal Invariants of Submanifolds in a Riemannian Space and Conformal Rigidity Theorems on Willmore Hypersurfaces. *The Journal of Geometric Analysis*, **28**, 2670-2691. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9928-7