Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 770-782
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142075

Hans汉斯

带有 Yukawa 位势的 Keller-Segel 系统 L^1–解的全局存在性

李雅玲

福建师范大学，数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2024年1月15日；录用日期：2024年1月31日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文研究了 $\mathbb{R}^2$ 中带有 **Yukawa** 位势的抛物–椭圆型 **Keller–Segel** 系统 L^1– 解的全局存在性。文章将**Wei**的单调性方法推广至 $\gamma > 0$ 的系统，对总质量 $M \leq 8\pi$ 情况下解的全局存在性给出一个证明。

关键词

Keller-Segel系统，**Cauchy**问题，**Yukawa**位势，全局存在性

Global Existence of L^1–Solutions for the Keller–Segel System with Yukawa Potential

Yaling Li

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Jan. 15th, 2024; accepted: Jan. 31st, 2024; published: Feb. 29th, 2024

文章引用: 李雅玲. 带有 Yukawa 位势的 Keller-Segel 系统L^1–解的全局存在性[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 770-782.
DOI: 10.12677/pm.2024.142075

Abstract

In this paper, we study the global existence of L^1–solutions for the parabolic–elliptic Keller–Segel system with Yukawa potential in $\mathbb{R}^2$. We give a proof of the global existence of solutions with total mass $M \le 8\pi$. The proof is based on extending the monotonicity method of Wei to $\gamma > 0$ system.

Keywords

Keller–Segel System, Cauchy Problems, Yukawa Potential, Global Existence

1. 引言

本文主要在 $\mathbb{R}^2$ 上研究了以下抛物–椭圆型 Keller–Segel 系统:

$$\begin{cases} n_t = \Delta n - \chi(n\nabla c), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ (-\Delta + \gamma^2)c = n, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ n(x,0) = n_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界的有界区域或全空间 $\mathbb{R}^2$. 该系统模拟了细菌群对其释放的特定化学物质的聚集运动. x 表示空间坐标, t 表示时间. $n(x,t)$ 表示细菌密度, $c(x,t)$ 表示影响细菌行为的化学物质浓度. 趋化敏感度系数 $\chi > 0$ 表示细菌是向高浓度化学物质的方向移动, 表现的行为是吸引行为, 反之 $\chi < 0$ 表示细菌的排斥行为. 常数 $\gamma \ge 0$ 表示该化学物质的降解率. 当 $\gamma = 0$ 时, 系统 (1.1) 被称为 Patlak–Keller–Segel 系统. 当 $\gamma > 0$, 且 $x \in \mathbb{R}^2$ 时,

$$G^\gamma(x) := \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\tau} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau} - \gamma^2\tau} \, \mathrm{d}\tau$$

为 $\mathbb{R}^2$ 上的 Yukawa 位势, 满足 $c(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G^\gamma(x-y)n(y)\,\mathrm{d}y$ (关于 Yukawa 位势的表达式详见 [1, p.164]). 关于该系统的生物学背景和数学理论, 请参考 [2–5]. 由于 Keller–Segel 系统常被用于描述

和预测生物的各种趋化行为, 因此该系统也称为趋化系统. 更加详细的 Keller–Segel 系统综述也可参考 [6,7].

在 1992 年, Jäger 和 Luckhaus [8] 提出系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}^2$ 的有界域 Ω 上的解存在一个临界质量: 解在超临界情况下发生爆破, 在亚临界情况下全局存在. 在 1995 年, Nagai [9] 证明了有界域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < L\}$ 上的径向解的临界质量为 $\frac{8\pi}{\chi}$, 并得到以下结果:

(1) 若径向函数 n_0 满足 $\int_\Omega n_0(x)\,\mathrm{d}x < \frac{8\pi}{\chi}$, 则系统 (1.1) 的径向解 n 关于时间是全局存在且全局有界的.

(2) 若径向函数 n_0 满足 $\int_\Omega n_0(x)\,\mathrm{d}x > \frac{8\pi}{\chi}$, 且 $\int_\Omega n_0(x)|x|^2\,\mathrm{d}x$ 足够小, 则系统 (1.1) 的径向解 n 在有限时间内爆破.

在 2004 年, Dolbeault 和 Perthame [10] 利用对数型 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式得到了一个先验估计. 随后, Dolbeault, Perthame 和 Blanchet [11] 利用 [10] 的先验估计, 去掉了 Ω 是有界域的条件限制, 证明了自由能不等式

$$\mathcal{F}[n](t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)|\nabla(\ln n(x,t)) - \chi\nabla c(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s \le \mathcal{F}[n](0), \tag{1.2}$$

并确定 Patlak–Keller–Segel 系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}^2$ 上的解全局存在的最优临界质量为 $M = \frac{8\pi}{\chi}$, 其中

$$\mathcal{F}[n](t) := \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\ln n(x,t)\,\mathrm{d}x - \frac{\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)c(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

在 2006 年, Biler, Karch 和 Laurencot 等人 [12] 得到了 $M \le \frac{8\pi}{\chi}$ 情况下 Patlak–Keller–Segel 系统 (1.1) 的径向对称解的全局存在性. 在 2008 年, Blanchet, Carrillo 和 Masmoudi [13] 去掉解径向对称的条件, 利用

$$0 \le n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, (1+|x|^2)\mathrm{d}x), \quad n_0 \ln n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}x). \tag{1.3}$$

和 (1.2) 等得到了 $M = \frac{8\pi}{\chi}$ 情况下解的全局存在性, 完善了 Patlak–Keller–Segel 系统 (1.1) 在 $\mathbb{R}^2$ 上的自由解的框架.

在 2008 年, Kozono 和 Sugiyama [14] 也利用二阶矩条件

$$\||x|^2 n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{\gamma^2}\cdot g\left(\frac{\|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}}{8\pi}\right),$$

得到了 $M > 8\pi$, $\chi = 1$ 情况下带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的解在有限时间内爆破, 其中 $g(s)$ 是 $s > 1$ 的递增函数. 而带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 在全空间 $\mathbb{R}^2$ 上的 L^1–解的全局存在性结果目前还没有明确的证明.

最近, Wei [15] 去掉假设 (1.3), 证明了 $\chi = 1$ 情况下的 Patlak–Keller–Segel 系统的非负 L^1–温和解是全局适定的, 当且仅当总质量 $M \le 8\pi$, 且满足质量守恒

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} n(x,0)\,\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

本文推广了 Wei [15] 的单调性方法, 得到一个 $\gamma > 0$ 情况下的单调性公式, 并将 Patlak–Keller–Segel 系统 (1.1) 的温和解的性质推广至带有 Yukawa 位势的系统 (1.1), 对带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) L^1–解的全局存在性问题进行了补充.

以下是本文的主要结果.

定理1.1. 假设 $\chi = 1$, $\gamma > 0$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, 且 $n_0(x)$ 是 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 中的非负函数. 记 T^* 是系统 (1.1) 的解的生命跨度, 若 $M = \int_{\mathbb{R}^2} n_0(x)\,\mathrm{d}x \le 8\pi$, 则 $T^* = \infty$.

对于该定理, 本文的证明思想是利用带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的局部解的性质(见引理 2.1 (4))构造矛盾.

本文的结构如下: 在第 2 节中, 我们将介绍带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的温和解的相关性质, 并利用 Wei [15] 的方法给出一个类似的单调性公式. 在第 3 节中, 我们将证明本文的主要定理 1.1.

2. 准备工作

在下文中, 我们给定 $\chi = 1$, $\gamma > 0$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. 我们先介绍本文的相关定义和论文中会用到的一些引理.

我们引入带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的弱解和温和解的定义.

定义2.1. 若对所有的检验函数 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(x)n(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2}\Delta\psi(x)n(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)]\cdot\frac{x-y}{|x-y|^2}P(x,y)n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

则称 $n \in C_w([0,T), L^1(\mathbb{R}^2))$ 是系统 (1.1) 的弱解, 其中

$$P(x,y) := \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} e^{-\frac{1}{\eta}-\frac{\gamma^2\eta|x-y|^2}{4}}\,\mathrm{d}\eta.$$

这里 $C_w([0,T), L^1(\mathbb{R}^2))$ 是 $L^\infty([0,T), L^1(\mathbb{R}^2))$ 的子空间, 使得 $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2}\psi(x)n(x,t)\,\mathrm{d}x$ 对任意 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 都是连续的.

假设系统 (1.1) 有解, 则

$$\begin{aligned}c(x,s) &= \int_{\mathbb{R}^2} G^\gamma(x-y)n(y,s)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty \frac{1}{4\pi\tau}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}-\gamma^2\tau}n(y,s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而作变量替换

$$\eta = \frac{4\tau}{|x-y|^2},$$

有

$$
\begin{aligned}
\nabla c(x,s) &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty \frac{1}{4\pi\tau}\left(-\frac{x-y}{2\pi}\right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}-\gamma^2\tau} n(y,s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^\infty \frac{x-y}{|x-y|^2}\frac{1}{\eta^2} e^{-\frac{1}{\eta}-\frac{\gamma^2\eta|x-y|^2}{4}} n(y,s)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}P(x,y)n(y,s)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

定义2.2. 我们称 $n(t)$ 是系统 (1.1) 在 $[0,T)$ 上以 n_0 是初值的温和解, 如果

$$
n \in C_w([0,T), L^1(\mathbb{R}^2)), \qquad \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{1}{4}}\|n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} < \infty,
$$

且 $n(t)$ 对任意 $t\in(0,T)$, 满足下面的 Duhamel 积分方程

$$
n(t) = e^{t\Delta}n_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Big(n(s)\nabla c(s)\Big)\,\mathrm{d}s,
$$

其中 $\nabla c(x,s)$ 的表达式为 (2.1), 满足 $(-\Delta+\gamma^2)c(s) = n(s)$.

引理2.1. 存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $n_0\in L^1(\mathbb{R}^2)$, 有以下结果:

(1)对任意 $T>0$, 若 $\sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{1}{4}}\|e^{t\Delta}n_0\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$, 则系统 (1.1) 在 $[0,T)$ 上存在以 n_0 为初值的温和解 n.

(2)对任意 $T>0$, 若系统 (1.1) 在 $[0,T)$ 上以 n_0 为初值的温和解满足 $\sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{1}{4}}\|n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} < 2\varepsilon$, 则该解是唯一的.

(3)若 $n_0\geq 0$, 则 $n\geq 0$.

(4)假设 T^* 是温和解的生命跨度, 且 $T^*<\infty$. 若 $0<t<T^*$, $k>1$, 则

$$
\sup_{s\in(0,k(T^*-t))} s^{\frac{1}{4}}\|e^{s\Delta}n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} \geq \varepsilon.
$$

为了证明引理 2.1, 我们先给出一个双线性估计.

引理2.2. 对任意 $T>0$, 定义

$$
\|n\|_X := \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{1}{4}}\|n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)}, \qquad \|n\|_Y := \sup_{t\in(0,T)} \|n(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},
$$

$$
B(n,m)(t) := \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(n\nabla c_m)\,\mathrm{d}s,
$$

其中

$$
\nabla c_m(x,t) := -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}P(x,y)m(y,t)\,\mathrm{d}y.
$$

若 n,m 满足 $\|n\|_X$, $\|m\|_X<\infty$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$
\|B(n,m)\|_{X\cap Y} \leq C\|n\|_X\|m\|_X,
$$

其中 $\|\cdot\|_{X\cap Y}=\max\{\|\cdot\|_X,\|\cdot\|_Y\}$.

证明. 由 Minkowski 不等式的积分形式和热核估计知,

$$\|B(n,m)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}(n\nabla c_m)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac12}\|n\nabla c_m\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s.$$

再结合 Hölder 不等式知,

$$\|B(n,m)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac12}\|n\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}\|\nabla c_m\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s.$$

注意到

$$0\le P(x,y)\le\int_0^\infty\frac{1}{\eta^2}e^{-\frac1\eta}\,\mathrm{d}\eta=\int_{-\infty}^0e^\tau\,\mathrm{d}\tau=1,\tag{2.2}$$

故由 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式知,

$$\begin{aligned}\|\nabla c_m\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}&=\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}P(x,y)m(y,t)\,\mathrm{d}y\right|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac14}\\&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|x-y|}|m(y,t)|\,\mathrm{d}y\right)^4\mathrm{d}x\right)^{\frac14}\\&=C\||\cdot|^{-1}*|m|\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\le C\|m\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

从而有

$$\|B(n,m)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac12}\|n\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}\|m\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s\le C\|n\|_X\|m\|_X\int_0^t(t-s)^{-\frac12}s^{-\frac12}\,\mathrm{d}s.$$

又因为当 $\alpha,\beta>-1$ 时,

$$\int_0^t(t-s)^\alpha s^\beta\,\mathrm{d}s=t^{\alpha+\beta+1}\int_0^1(1-r)^\alpha r^\beta\,\mathrm{d}r$$

可积. 所以 $\|B(n,m)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le C\|n\|_X\|m\|_X$, 即 $\|B(n,m)\|_Y\le C\|n\|_X\|m\|_X$.

类似地, 关于 $\|\cdot\|_X$, 我们有

$$\begin{aligned}\|B(n,m)\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}&\le\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}(n\nabla c_m)\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac34}\|n\nabla c_m\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s\\&\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac34}\|n\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)}\|\nabla c_m\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\,\mathrm{d}s\\&\le C\|n\|_X\|m\|_X\int_0^t(t-s)^{-\frac34}s^{-\frac12}\,\mathrm{d}s\le Ct^{-\frac14}\|n\|_X\|m\|_X,\end{aligned}$$

即 $\|B(n,m)\|_X\le C\|n\|_X\|m\|_X$. 证毕. □

引理 *2.1* 的证明. (3) 可由最大值原理得到. 下面先证明 (1) 和 (2). 这里沿用引理 2.2 的记号, 并定

义

$$\Gamma(n)(t) := e^{t\Delta}n_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(n\nabla c_n)\,\mathrm{d}s = e^{t\Delta}n_0 - B(n,n)(t),$$

$$Z := \{n \in C_w([0,T), L^1(\mathbb{R}^2)) \mid \|e^{t\Delta}n_0\|_X < \varepsilon, \|n\|_X < 2\varepsilon\},$$

$$d(n,m) := \|n-m\|_{X\cap Y}.$$

第一步, 证明 $\Gamma : Z \to Z$.

对任意 $n \in Z$, 有 $\|e^{t\Delta}(\Gamma(n)(0))\|_X = \|e^{t\Delta}n_0\|_X < \varepsilon$, 且

$$\begin{aligned}\|\Gamma(n)\|_X &= \|e^{t\Delta}n_0 - B(n,n)\|_X \le \|e^{t\Delta}n_0\|_X + \|B(n,n)\|_X \\ &\le \varepsilon + C\|n\|_X^2 < \varepsilon + 4\varepsilon^2 C.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon + 4\varepsilon^2 C < 2\varepsilon$ 时, $\Gamma(n) \in Z$.

第二步, 证明 Γ 是压缩映射.

对任意 $n, m \in Z$, 有

$$B(n,n) - B(m,m) = \frac{1}{2}[B(n-m, n+m) + B(n+m, n-m)],$$

则由引理 2.2 知,

$$\begin{aligned}d(\Gamma(n),\Gamma(m)) = \|\Gamma(n)-\Gamma(m)\|_{X\cap Y} &= \|B(n,n)-B(m,m)\|_{X\cap Y} \\ &\le \frac{1}{2}(\|B(n-m,n+m)\|_{X\cap Y} + \|B(n+m,n-m)\|_{X\cap Y}) \\ &\le C\|n+m\|_X\|n-m\|_X \le C(\|n\|_X + \|m\|_X)\|n-m\|_X \\ &< 4\varepsilon C\|n-m\|_X.\end{aligned}$$

当 $4\varepsilon C < 1$ 时, Γ 是压缩映射.

因此, 令 $\varepsilon = \frac{1}{8C}$, 由 Banach 不动点定理知, 系统 (1.1) 在 Z 上存在唯一解

$$n(t) = e^{t\Delta}n_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(n\nabla c_n)\,\mathrm{d}s.$$

最后证明 (4). 对任意 $x \in \mathbb{R}^2$, $\tau \ge 0$, 定义 $m(x,\tau) = n(x,\tau+t)$, 则 $m_0 = n(t)$. 假设

$$\sup_{s\in(0,k(T^*-t))} s^{\frac{1}{4}}\|e^{s\Delta}n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon,$$

则 $\sup_{s\in(0,k(T^*-t))} s^{\frac{1}{4}}\|e^{s\Delta}m_0\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$. 从而由 (1) 知, 系统在 $[0,k(T^*-t))$ 上存在以 m_0 为初值的温和解 m. 而 $t + k(T^*-t)) = T^* + (1-k)t > T^*$, 这与 T^* 是温和解 n 的生命跨度矛盾, 故假设不成立. 证毕. □

为了证明 $\gamma > 0$ 的系统 (1.1) 的全局解, 我们还需要补充 K_1 的一些估计. 当 $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, 且 $x \neq y$ 时, 令

$$K_1(x,y,t) := -[\nabla K(x,t) - \nabla K(y,t)] \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2}.$$

引理2.3. [15, 引理 3.1] 假设 $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, 且 $x \neq y$, 则

$$\frac{3}{4t}(K(x,t) + K(y,t)) - \frac{1}{4\pi t^2} \leq K_1(x,y,t) \leq \frac{1}{4t}(K(x,t) + K(y,t)). \tag{2.3}$$

引理2.4. 假设 $0 < t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^2$, 且 $r = t^p t_1^q$, 其中 $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$ 满足 $p + q = \frac{1}{2}$. 若 $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, 且 $\max\{|x|, |y|\} \geq r$, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$K_1(x,y,t) \leq \frac{C}{t^{\frac{3}{2}} r}. \tag{2.4}$$

证明. 不妨假设 $|y| \geq |x|$, 则 $|y| \geq r$, 进一步有

$$K(y,t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \leq \frac{1}{4\pi t} \frac{4t}{|y|^2} \leq \frac{C}{|y|^2} \leq \frac{C}{r^2}.$$

因为 $0 < t \leq t_1$, 所以 $tr^2 \geq t^{\frac{3}{2}} r$. 容易由 [15, 引理 3.2] 的证明过程得到 (2.4). 证毕. □

本文的主要定理可以直接由命题 2.1 得到. 首先, 我们先效仿 Wei [15, p.392–p.393] 得到一个系统 (1.1) L^1 –温和解的单调性公式. 令 n 是系统 (1.1) 在 $[0, T)$ 上的一个温和解. 定义

$$\Phi_z(t) := \int_{\mathbb{R}^2} K(x - z, t_0 - t) n(x,t) \, \mathrm{d}x, \quad 0 \leq t < \min\{T, t_0\}. \tag{2.5}$$

注意到, 对 $0 \leq s < t < t_0$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \nabla K(x - z, t_0 - s)(n(s)\nabla c(s)) \, \mathrm{d}x \\
=& -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla K(x - z, t_0 - s) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} P(x,y) n(x,s) n(y,s) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla K(x - z, t_0 - s) \\
&- \nabla K(y - z, t_0 - s)] \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} P(x,y) n(x,s) n(y,s) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K_1(x - z, y - z, t_0 - s) P(x,y) n(x,s) n(y,s) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\Phi_z(t) &= \Phi_z(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla K(x - z, t_0 - s)(n(s)\nabla c(s)) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= \Phi_z(0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} K_1(x - z, y - z, t_0 - s) P(x,y) n(x,s) n(y,s) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2024.142075

因此, 对 $0<t<\min\{t_0,T\}$, 有

$$\partial_t\Phi_z(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}K_1(x-z,y-z,t_0-t)P(x,y)n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义

$$\phi_z(t,r):=\int_{B(z,r)}n(y,t)\,\mathrm{d}y, \tag{2.6}$$

其中 $B(z,r)$ 表示以点 z 为圆心, r 为半径的球.

引理2.5. [15, 命题 3.1] 若 $r>0$, 则 $\phi_z(t,r)\le 4\pi(t_1-t)e^{\frac{r^2}{4(t_1-t)}}e^{(t_1-t)\Delta}n(z,t)$.

命题2.1. 假设 $n(t)$ 是在 $[0,T)$ 上以 n_0 为初值的带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的一个非负温和解, 且 $M=\int_{\mathbb{R}^2}n_0(x)\,\mathrm{d}x$. 若 $\Phi_z(t)$ 满足 (2.5) 的定义, 则对 $0<t<\min\{t_0,T\}$, 且 $z\in\mathbb{R}^2$, 有

$$\partial_t\Phi_z(t)\le\frac{M}{8\pi(t_0-t)}\Phi_z(t). \tag{2.7}$$

此外, 若 $t_1\ge t_0$, 且 $\phi_z(t)$ 满足 (2.6) 的定义, 则

$$\partial_t\Phi_z(t)\le\frac{\phi_z(t,(t_0-t)^p(t_1-t)^q)}{8\pi(t_0-t)}\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q}, \tag{2.8}$$

其中 $p\in\mathbb{R}$, $q>0$ 满足 $p+q=\frac{1}{2}$.

证明. 由 (2.3) 的上界估计和 (2.2) 知,

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_z(t)&\le\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{K(x-z,t_0-t)+K(y-z,t_0-t)}{4(t_0-t)}P(x,y)n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le\frac{1}{16\pi(t_0-t)}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}(K(x-z,t_0-t)+K(y-z,t_0-t))n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再由 (1.4), 可以直接整理得到 (2.7).

令 $r=(t_0-t)^p(t_1-t)^q$, 由 (2.3) 的上界估计和 (2.4), (2.2) 知, 存在常数 $C>0$, 使得

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_z(t)\le&\frac{1}{4\pi}\int_{B(z,r)}\int_{B(z,r)}\frac{K(x-z,t_0-t)+K(y-z,t_0-t)}{4(t_0-t)}P(x,y)n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\frac{1}{4\pi}\iint_{\max\{|x-z|,|y-z|\}\ge r}\frac{C}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}}r}P(x,y)n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\le&\frac{1}{4\pi}\int_{B(z,r)}\int_{B(z,r)}\frac{K(x-z,t_0-t)+K(y-z,t_0-t)}{4(t_0-t)}n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\frac{1}{4\pi}\iint_{\max\{|x-z|,|y-z|\}\ge r}\frac{C}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}}r}n(x,t)n(y,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

再将积分区域放大至全空间, 可直接得到 (2.8). 具体的证明细节可参考 [15, 命题 3.1]. 证毕. □

注2.1. 事实上, 本文仅对 [15] 单调公式的上界估计进行了推广. 而下界估计对于研究系统 (1.1)

解的爆破性和生命跨度的估计有着重要作用. 因此, 带有 Yukawa 位势的系统 (1.1) 的单调公式能否得到一个合适的下界估计, 是我们未来研究工作的一部分.

注2.2. 定理的证明中需要 $te^{t\Delta}n_0$ 的估计. 容易知道 $te^{t\Delta}n_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}} n_0(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{4\pi}$. 若等式成立, 则 $e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}} n_0(x) = n_0(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^2$. 因为 $x \ne z$ 时, 有 $e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}} < 1$, 所以 $n_0(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^2$. 这与 $M = \int_{\mathbb{R}^2} n_0(x)\,\mathrm{d}x > 0$ 矛盾. 故等式不成立. 因此, $te^{t\Delta}n_0$ 有以下先验上界估计

$$te^{t\Delta}n_0 < \frac{M}{4\pi}, \tag{2.9}$$

3. 主要定理的证明

当 $M < 8\pi$ 时. 由命题 2.1 的 Grönwall 型估计 (2.7) 知, 对 $0 < t < \min\{t_0, T\}$, 有

$$(t_0 - t)^{\frac{M}{8\pi}} \Phi_z(t) \le t_0^{\frac{M}{8\pi}} \Phi_z(0).$$

再由 $t_0 e^{t_0\Delta} n_0$ 的上界估计 (2.9) 知,

$$\Phi_z(t) \le \left(\frac{t_0}{t_0 - t}\right)^{\frac{M}{8\pi}} \Phi_z(0) \le \left(\frac{t_0}{t_0 - t}\right)^{\frac{M}{8\pi}} \frac{M}{4\pi t_0}. \tag{3.1}$$

因此, 结合 (3.1) 和热核估计知,

$$(t_0 - t)^{\frac{1}{4}} \|\Phi_z(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} \le ((t_0 - t)\|\Phi_z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)})^{\frac{1}{4}} \|\Phi_z(t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le \left(\frac{t_0}{t_0 - t}\right)^{\frac{1}{4}\left(\frac{M}{8\pi} - 1\right)} \frac{M}{(4\pi)^{\frac{1}{4}}}.$$

令 $s = t_0 - t > 0$, 则

$$s^{\frac{1}{4}} \|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} \le C \left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{8\pi}\right)}.$$

假设 $T^* < \infty$, 则对 $0 < t < T^*$, 当 $t \to T^*$ 时, 有

$$\sup_{s \in (0, k(T^* - t))} s^{\frac{1}{4}} \|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)} \le \sup_{s \in (0, k(T^* - t))} C \left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{8\pi}\right)} \le C \left(\frac{k(T^* - t)}{kT^* + (1 - k)t}\right)^{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{8\pi}\right)} \to 0,$$

这与引理 2.1 (4) 矛盾. 故假设不成立, 有 $T^* = \infty$.

当 $M = 8\pi$ 时. 假设 $T^* < \infty$, 由 (2.9) 知, $2T^* e^{2T^*\Delta} n_0 < \frac{M}{4\pi} = 2$. 因为 $n_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 所以对 $x, z \in \mathbb{R}^2$, 有 $|K(x - z, 2T^*) n_0(x)| \le \frac{1}{8\pi T^*} n_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. 从而由 Lebesgue 控制收敛定理知,

$$\lim_{|z| \to \infty} e^{2T^*\Delta} n_0(z) = \lim_{|z| \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} K(x - z, 2T^*) n_0(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

又因为 $0 \le e^{2T^*\Delta} n_0 \in C(\mathbb{R}^2)$, 所以 $\|e^{2T^*\Delta} n_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{T^*}$, 从而

$$\tilde{M} := T^* \|e^{2T^*\Delta} n_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} < 1.$$

由 (3.1), 我们可以得到类似的上界估计, 对 $0<t<T^*$, 有

$$e^{(2T^*-t)\Delta}n(t)\le\left(\frac{2T^*}{2T^*-t}\right)e^{2T^*\Delta}n_0\le\frac{2\tilde{M}}{2T^*-t}. \tag{3.2}$$

取 $t<t_0<t_1=2T^*$, 由 (2.8) 知,

$$\partial_t\Phi_z(t)\le\frac{\phi_z(t,(t_0-t)^p(t_1-t)^q)}{8\pi(t_0-t)}\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q},$$

其中

$$p,q>0\quad 且\quad p+q=\frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

再由 Gauss 函数的单调性和 (3.2) 知,

$$(t_0-t)\Phi_z(t)=(t_0-t)e^{(t_0-t)\Delta}n(t)\le(t_1-t)e^{(t_1-t)\Delta}n(t)\le 2\tilde{M}. \tag{3.4}$$

令 $r=(t_0-t)^p(t_1-t)^q$, 则 $r^2<t_1-t$, 且由 $h(x)=e^x-\frac{4}{\kappa}x-1\le 0$, $\kappa\le 4e^{-\frac{1}{4}}$, $x\in(0,\frac{1}{4})$ 的事实和引理 2.5 知,

$$\begin{aligned}\phi_z(t,r)&\le 4\pi(t_1-t)e^{\frac{r^2}{4(t_1-t)}}e^{(t_1-t)\Delta}n(z,t)\\&\le 8\pi\tilde{M}e^{\frac{r^2}{4(t_1-t)}}\le 8\pi\tilde{M}\left(1+\frac{r^2}{\kappa(t_1-t)}\right),\end{aligned} \tag{3.5}$$

因此, 由 (3.4) 知,

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_z(t)&\le\frac{\tilde{M}}{t_0-t}\left(1+\frac{r^2}{\kappa(t_1-t)}\right)\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q}\\&=\frac{\tilde{M}}{t_0-t}\Phi_z(t)+\frac{\tilde{M}}{\kappa(t_0-t)^{1-2p}(t_1-t)^{1-2q}}\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q}\\&\le\frac{\tilde{M}}{t_0-t}\Phi_z(t)+\frac{2\tilde{M}^2}{\kappa(t_0-t)^{2-2p}(t_1-t)^{1-2q}}+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q}.\end{aligned}$$

因为 $0<t_0-t<t_1-t=2T^*-t$, 且 $0<t<T^*$, 所以 $t_1-t>T^*$.

当 $\frac{1}{6}<p<\frac{1}{2}$, $0<q<\frac{1}{3}$ 时, 因为 $0\le\tilde{M}<1<M=8\pi$, 所以

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi_z(t)&\le\frac{\tilde{M}}{t_0-t}\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(t_1-t)^q}\\&\le\frac{\tilde{M}}{t_0-t}\Phi_z(t)+\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p}(T^*)^q}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

取 $0<\alpha=\max\{\tilde{M},l\}<1$, 其中 $q\ge 2-l-\alpha>0$. 由 $0<t_0-t<t_1-t<t_1=2T^*$ 和 (3.6) 知,

$$\partial_t((t_0-t)^\alpha\Phi_z(t))\le\frac{CM^2}{(t_0-t)^{\frac{3}{2}+p-\alpha}(T^*)^q}\le\frac{CM^2}{(t_0-t)^l(T^*)^{2-l-\alpha}}.$$

再由 (3.4) 和 $0 < t_0 < t_1 = 2T^*$ 知,

$$(t_0 - t)^\alpha \Phi_z(t) \le t_0^\alpha \Phi_z(0) + \int_0^t \frac{CM^2}{(t_0-\tau)^l (T^*)^{2-l-\alpha}} \,\mathrm{d}\tau$$
$$\le 2\tilde{M} t_0^{\alpha-1} + \frac{CM^2}{(T^*)^{2-l-\alpha}} \left(t_0^{1-l} - (t_0 - t)^{1-l}\right) \le C t_0^{\alpha-1}.$$

因此, 类似 $M < 8\pi$ 的证明, 令 $s = t_0 - t > 0$, 则 $s^\alpha e^{s\Delta} n(t) \le C t_0^{\alpha-1}$, 且

$$s^{\frac14} \|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)} \le (s\|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)})^{\frac14} \|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac34} \le C \left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac14(1-\alpha)}$$

假设 $T^* < \infty$, 则对 $0 < t < T^*$, 当 $t \to T^*$ 时, 有

$$\sup_{s\in(0,k(T^*-t))} s^{\frac14} \|e^{s\Delta} n(t)\|_{L^{\frac43}(\mathbb{R}^2)} \le \sup_{s\in(0,k(T^*-t))} C \left(\frac{s}{t_0}\right)^{\frac14(1-\alpha)} \le C \left(\frac{k(T^*-t)}{kT^* + (1-k)t}\right)^{\frac14(1-\alpha)} \to 0,$$

这与引理 2.1 (4) 矛盾. 故假设不成立, 有 $T^* = \infty$.

当 $0 < p \le \frac16$, $\frac13 \le q < \frac12$ 时,

$$\partial_t \Phi_z(t) \le \frac{\tilde{M}}{t_0 - t} \Phi_z(t) + \frac{C}{(t_0-t)^{2-2p}(t_1-t)^{1-2q}} \le \frac{\tilde{M}\Phi_z(t)}{t_0 - t} + \frac{C}{(t_0-t)^{2-2p}(T^*)^{1-2q}}. \tag{3.7}$$

取 $0 < \beta = \max\{\tilde{M}, m\} < 1$, 其中 $1 - 2q \ge 2 - m - \beta > 0$. 由 $0 < t_0 - t < t_1 - t < t_1 = 2T^*$ 和 (3.7) 知,

$$\partial_t((t_0 - t)^\beta \Phi_z(t)) \le \frac{C}{(t_0-t)^{2-2p-\beta}(T^*)^{1-2q}} \le \frac{C}{(t_0-t)^m (T^*)^{2-m-\beta}},$$

再由 (3.4) 和 $0 < t_0 < t_1 = 2T^*$ 知,

$$(t_0 - t)^\beta \Phi_z(t) \le t_0^\beta \Phi_z(0) + \int_0^t \frac{C}{(t_0-\tau)^m (T^*)^{2-m-\beta}} \,\mathrm{d}\tau$$
$$\le 2\tilde{M} t_0^{\beta-1} + \frac{C}{(T^*)^{2-m-\beta}} \left(t_0^{1-m} - (t_0 - t)^{1-m}\right) \le C t_0^{\beta-1}.$$

因此, 类似 $\frac16 < p < \frac12$, $0 < q < \frac13$ 的证明, 有 $T^* = \infty$. 证毕.

注3.1. p, q 满足 (3.3). [15] 关于 p, q 的取法是 $\frac16 < p < \frac12$, $0 < q < \frac13$ 的一个特例. 当 $0 < p \le \frac16$, $\frac13 \le q < \frac12$ 时, 我们可以取 $p = \frac16$, $q = \frac13$, $m = \frac{11}{12}$.

参考文献

[1] Lieb, E. and Loss, M. (2001) Analysis: Vol. 14. 2nd Edition, American Mathematical Society, Providence, RI.

[2] Patlak, C.S. (1953) Random Walk with Persistence and External Bias. *The Bulletin of Math-*

ematical Biophysics, **15**, 311-338. https://doi.org/10.1007/BF02476407

[3] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[4] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y., *et al.* (2015) Toward a Mathematical Theory of Keller-Segel Models of Pattern Formation in Biological Tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **25**, 1663-1763. https://doi.org/10.1142/S021820251550044X

[5] Biler, P. (2020) Singularities of Solutions to Chemotaxis Systems. De Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110599534

[6] Arumugam, G. and Tyagi, J. (2021) Keller-Segel Chemotaxis Models: A Review. *Acta Applicandae Mathematicae*, **171**, Article No. 6. https://doi.org/10.1007/s10440-020-00374-2

[7] Horstmann, D. (2003) From 1970 Until Present: The Keller-Segel Model in Chemotaxis and Its Consequences. I. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **105**, 103-165.

[8] Jäger, W. and Luckhaus, S. (1992) On Explosions of Solutions to a System of Partial Differential Equations Modelling Chemotaxis. *Transactions of the American Mathematical Society*, **329**, 819-824. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1992-1046835-6

[9] Nagai, T. (1995) Blow-Up of Radially Symmetric Solutions to a Chemotaxis System. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **5**, 581-601.

[10] Dolbeault, J. and Perthame, B. (2004) Optimal Critical Mass in the Two Dimensional Keller-Segel Model in $\mathbb{R}^2$. *Comptes Rendus Mathematique*, **339**, 611-616. https://doi.org/10.1016/j.crma.2004.08.011

[11] Blanchet, A., Dolbeault, J. and Perthame, B. (2006) Two-Dimensional Keller-Segel Model: Optimal Critical Mass and Qualitative Properties of the Solutions. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006**, 1-33.

[12] Biler, P., Karch, G., Laurencot, P., *et al.* (2006) The 8π-Problem for Radially Symmetric Solutions of a Chemotaxis Model in the Plane. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **29**, 1563-1583. https://doi.org/10.1002/mma.743

[13] Blanchet, A., Carrillo, J.A. and Masmoudi, N. (2008) Infinite Time Aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel Model in $\mathbb{R}^2$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **61**, 1449-1481. https://doi.org/10.1002/cpa.20225

[14] Kozono, H. and Sugiyama, Y. (2008) Local Existence and Finite Time Blow-Up of Solutions in the 2-D Keller-Segel System. *Journal of Evolution Equations*, **8**, 353-378. https://doi.org/10.1007/s00028-008-0375-6

[15] Wei, D. (2018) Global Well-Posedness and Blow-Up for the 2-D Patlak-Keller-Segel Equation. *Journal of Functional Analysis*, **274**, 388-401. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.10.019