Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 26-33
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144107

Hans 汉斯

关于梯度 h-Ricci 孤立子的刚性研究

黄雪纯，刘建成[*]

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年2月26日；录用日期：2024年3月10日；发布日期：2024年4月16日

摘 要

本文研究了梯度 **h-Ricci** 孤立子的数量曲率有上界时，数量曲率是常数的结果，同时，证明了在一定的积分条件下，梯度 **h-Ricci** 孤立子的数量曲率消失的结果。

关键词

梯度 **h-Ricci** 孤立子，数量曲率，非负数量曲率，抛物型

Study on the Rigidity of Gradient h-Ricci Solitons

Xuechun Huang, Jiancheng Liu[*]

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Feb. 26^{th}, 2024; accepted: Mar. 10^{th}, 2024; published: Apr. 16^{th}, 2024

Abstract

In this article, we study the results that the scalar curvature is constant when the

* 通讯作者。

文章引用: 黄雪纯, 刘建成. 关于梯度h-Ricci孤立子的刚性研究[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 26-33.
DOI: 10.12677/pm.2024.144107

scalar curvature of a gradient h-Ricci soliton has an upper bound. It also proved that under some integral conditions, the scalar curvature of gradient h-Ricci solitons must be vanished.

Keywords

Gradient h-Ricci Solitons, Scalar Curvature, Non-Negative Scalar Curvature, Parabolicity

1. 引言及主要结果

设 (M^n, g) 是 n 维黎曼流形, 如果存在光滑向量场 X, 光滑函数 λ, h, 满足方程

$$\mathrm{Ric} + \frac{h}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{1}$$

则称 (M^n, g) 为 h-近 Ricci 孤立子(见 [1]), 记为 (M^n, g, X, h, λ), 其中 $\mathcal{L}_X g$ 表示度量 g 沿向量场 X 方向的 Lie 导数, Ric 表示 (M^n, g) 的 Ricci 曲率张量. 对任意点 $x \in M^n$, 当 $\lambda > 0$ ($= 0$, 或 < 0)时, 称 (M^n, g, X, h, λ) 为收缩 (稳定, 或扩张) h-近 Ricci 孤立子. 特别地, 若光滑向量场 X 为 M^n 上某个光滑函数 f 的梯度, λ 为常数, 且满足如下孤立子方程

$$\mathrm{Ric} + h\nabla^2 f = \lambda g, \tag{2}$$

则称 $(M^n, g, \nabla f, h)$ 为具有势函数 f 的梯度 h-Ricci 孤立子.

对于黎曼流形 $(M^n, g)(n \geq 2)$, 若存在光滑函数 f, λ 和 μ, 满足

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f - \mu \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f = \lambda g, \tag{3}$$

其中 $\mu = \frac{1}{m}$ 且 $m \in \mathbb{N}^+$, 则称 $\{M^n, g, \nabla f, \lambda, m\}$ 为广义的 m-拟-Einstein 流形(见 [2]). 特别地, 当 λ 是常数时, 称 $\{M^n, g, \nabla f, \lambda, m\}$ 为 m-拟-Einstein 流形.

在 (3) 式中, 考虑非常值函数 $\Psi = e^{-\frac{f}{m}}$, 则

$$\nabla\Psi = -\frac{1}{m}e^{-\frac{f}{m}}\nabla f, \tag{4}$$

$$-\frac{m}{\Psi}\nabla^2\Psi=\nabla^2 f-\frac{1}{m}\mathrm{d}f\otimes\mathrm{d}f. \tag{5}$$

将 (5) 式代入 (3) 式, 可以得到如下形式的梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子方程

$$\mathrm{Ric}-\frac{m}{\Psi}\nabla^2\Psi=\lambda g, \tag{6}$$

所以满足 $\mu=\frac{1}{m}$ 的广义拟-Einstein 流形是梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-近 Ricci 孤立子, 因此由 (5) 式和 (6) 式可得, 所有的 m-拟-Einstein 孤立子都是梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子.

文献 [3] 在梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Yamabe 孤立子的数量曲率有下界的条件下, 得到了数量曲率是常数的结果, 进一步得到了具有非负数量曲率的梯度扩张或收缩 $(-\frac{m}{\Psi})$-Yamabe 孤立子在一定的积分条件下, 数量曲率是消失的. 同时, 文献 [1] 在提出了 h-近 Ricci 孤立子概念的基础之上, 进一步研究了具有常数量曲率且 h 定号的紧致非平凡 h-近 Ricci 孤立子的刚性问题, 并得到了等距于欧式球面的结果. 因此, 研究 h-近 Ricci 孤立子在什么情况下具有常数量曲率是很有必要的.

基于上述结果, 我们讨论 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子在在满足一定条件时具有常数量曲率的情况. 类似文献 [3] 的研究方法, 研究在梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子在数量曲率有上界的条件下, 得到了数量曲率是常数的结果, 并进一步研究势函数有正下界且具有非负数量曲率的梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子, 并得到了在一定的积分条件下数量曲率消失的结果. 主要结果如下.

定理 1 设 $(M^n,g,\nabla\Psi,-\frac{m}{\Psi})$ 是 n 维定向, 连通且满足 $R\leq n\lambda$ 的梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子, 其中 R 是 M^n 的数量曲率, 若满足以下条件之一

(1) (M^n,g) 是抛物型的,

(2) $|\nabla\Psi|\in L^1(M)$,

(3) 存在 $p>1$, 使得 $\frac{1}{\Psi}\in L^p(M)$,

(4) 势函数 Ψ 有正下界, 且 (M^n,g) 呈线性体积增长,

则 (M^n,g) 具有常数量曲率.

接下来我们在一定的积分条件下, 讨论了势函数有正下界且具有非负数量曲率的梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子的数量曲率消失的结果, 我们先考虑如下扩张的情形.

定理 2 设 $(M^n,g,\nabla\Psi,-\frac{m}{\Psi})$ 是 n 维具有非负数量曲率的梯度扩张 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子, 若势函数 Ψ 有正下界且满足

$$\int_{M-B(q,r)}\frac{\Psi}{d(x,q)^2}\mathrm{d}M<\infty,$$

其中 $B(q,r)$ 是以 q 为中心, $r(r\geq 0)$ 为半径的测地球, $d(x,q)$ 是到定点 $q(q\in M)$ 的距离函数, 则 $R=0$.

对于稳定的情形, 在同样的积分条件下, 我们得到了梯度稳定 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子的势函数一定是调和的.

定理 3 设 $(M^n,g,\nabla\Psi,-\frac{m}{\Psi})$ 是 n 维具有非负数量曲率的梯度稳定 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子, 若势函数

数 Ψ 有正下界且满足

$$\int_{M-B(q,r)} \frac{\Psi}{d(x,q)^2} \mathrm{d}M < \infty,$$

则 $\nabla^2\Psi = 0$.

对于收缩的情形, 我们对 λ 加以限制, 考虑在新的积分条件下, 得到了如下数量曲率消失的结果.

定理 4 设 $(M^n, g, \nabla\Psi, -\frac{m}{\Psi})$ 是 n 维具有非负数量曲率的梯度收缩 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子, 若存在光滑函数 η, 使得 $0 < \lambda \leq \Delta\eta$ 成立, 势函数 Ψ 有正下界且满足

$$\int_{M-B(q,r)} \frac{n\eta + \frac{m}{K}\Psi}{d(x,q)^2} \mathrm{d}M < \infty,$$

其中 K 是一个正实数, 满足 $\Psi \geq K > 0$, 则 $R = 0$.

2. 预备知识及引理

为了完成定理的证明, 我们需要如下引理.

引理 5 [4] 设 (M^n, g) 是 n 维完备非紧且定向的黎曼流形, 若对于 M 上的任意光滑向量场 X, $\mathrm{div}_M X$ 定号, 且 $|X| \in L^1(M)$, 则 $\mathrm{div}_M X = 0$.

定义 6 [5] 设 (M^n, g) 是 n 维完备黎曼流形, 若 M 上满足 $u^* = \sup_M u < +\infty$ 的次调和函数 u 是常函数, 则称 (M^n, g) 是抛物型的.

引理 7 [6] 设 u 是 n 维完备黎曼流形 (M^n, g) 上的非负光滑次调和函数, 若存在 $p > 1$, 使得 $u \in L^P(M)$, 则 u 是常数.

引理 8 [6] 设 $B(q,r)$ 是黎曼流形 (M^n, g) 上以 q 为中心, 以 $r(r > 0)$ 为半径的测地球, 如果 u 是 $B(q,r)$ 上的非负次调和函数, 那么以下积分不等式成立

$$\int_{B(q,r)} |\nabla u|^2 \mathrm{d}M \leq \frac{c}{r^2} \int_{B(q,2r)} u^2 \mathrm{d}M,$$

其中 c 是一个正实数.

3. 定理的证明

定理 1 的证明 设点 $x \in M^n$ 处的局部标准正交标架为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 本文用 $\nabla_i f$ 表示函数 f 沿 e_i 方向的协变微分. 对 (6) 式求迹可得

$$R - \frac{m}{\Psi}\Delta\Psi = n\lambda. \tag{7}$$

将 $R \leq n\lambda, \Psi > 0, m > 0$ 代入 (7) 式可得

$$\Delta\Psi \leq 0,$$

即 Ψ 是超调和函数.

(1) 若 (M^n,g) 是抛物型的, 由定义 6 可得 Ψ 是常数, 故由 (7) 式可得

$$R=n\lambda.$$

(2) 若 $|\nabla\Psi|\in L^1(M)$, 当 (M^n,g) 是紧致的黎曼流形时, 对 (7) 式两边同时积分, 由散度定理可得

$$\int_M \frac{\Psi}{m}(n\lambda-R)\mathrm{d}M=0.$$

由 $R\leq n\lambda$, $\Psi>0$, $m>0$ 可得 $\frac{\Psi}{m}(n\lambda-R)\geq 0$, 因此

$$\frac{\Psi}{m}(n\lambda-R)=0,$$

即 $R=n\lambda$.

当 (M^n,g) 是非紧的黎曼流形时, $\Delta\Psi\leq 0$, 即 $\mathrm{div}(\nabla\Psi)<0$ 或 $\mathrm{div}(\nabla\Psi)=0$. 当 $\mathrm{div}(\nabla\Psi)<0$ 时, 由 $|\nabla\Psi|\in L^1(M)$ 及引理 5 可得

$$\mathrm{div}(\nabla\Psi)=0.$$

所以 $\triangle\Psi\leq 0$ 时, $\mathrm{div}(\nabla\Psi)=0$ 恒成立, 因此 $\nabla\Psi$ 是一个常数, 代入 (6) 式可得

$$\mathrm{Ric}=\lambda g. \tag{8}$$

对 (8) 式求迹可得 $R=n\lambda$.

(3) 若存在 $p>1$, 使得 $\frac{1}{\Psi}\in L^p(M)$, 注意到

$$\nabla_i(\frac{1}{\Psi})=-\frac{1}{\Psi^2}\nabla_i\Psi,$$

$$\nabla_i\nabla_i(\frac{1}{\Psi})=\frac{2}{\Psi^3}(\nabla_i\Psi)^2-\frac{1}{\Psi^2}\nabla_i\nabla_i\Psi,$$

因此

$$\Delta(\frac{1}{\Psi})=\frac{2}{\Psi^3}|\nabla\Psi|^2-\frac{1}{\Psi^2}\Delta\Psi.$$

由 $\Delta\Psi\leq 0$, $\Psi>0$ 可得

$$\Delta(\frac{1}{\Psi})\geq 0, \tag{9}$$

即 $\frac{1}{\Psi}$ 是次调和函数. 那么由 $\frac{1}{\Psi}\in L^p(M)$ 及引理 7 可得, 在 (M^n,g) 上 $\frac{1}{\Psi}$ 是常数, 即 Ψ 是常数, 因此

$$\triangle\Psi=0,$$

即 $R=n\lambda$.

(4) 若势函数 Ψ 有正下界, 且 (M^n, g) 呈线性体积增长, 即存在一个正实数 K, 使得 $\Psi \geq K > 0$, 且存在 $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, $\tilde{c} > 0$, 使得 $V(B(q,r)) \leq \tilde{c}r$. 由引理 8 可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B(q,r)} |\nabla \frac{1}{\Psi}|^2 \mathrm{d}M &\leq \frac{c}{r^2} \int_{B(q,2r)} \frac{1}{\Psi^2} \mathrm{d}M \\ &\leq \frac{c}{r^2 K^2} V(q, 2r) \\ &\leq \frac{2c\tilde{c}}{rK^2}, \end{aligned}$$

上述积分不等式两端同时取 $r \to \infty$ 时, 由于 $\frac{2c\tilde{c}}{rK^2} \to 0$, 所以

$$|\nabla \frac{1}{\Psi}|^2 = 0,$$

即 $\frac{1}{\Psi}$ 是常数, 故由 (7) 式可得 $R = n\lambda$.

综上, 定理 1 得证.

下面, 我们给出势函数有正下界且具有非负数量曲率的梯度 $(-\frac{m}{\Psi})$-Ricci 孤立子数量曲率消失的证明.

定理 2 的证明 取截断函数 $\xi_r \in C_0^\infty(M)$, 满足

$$\begin{cases} \xi_r = 1, & \xi_r \in B(q,r), \\ 0 \leq \xi_r \leq 1, & \xi_r \in B(q,2r), \\ |\nabla \xi_r|^2 \leq \frac{\bar{c}}{r^2}, & \xi_r \in B(q,2r), \\ \Delta \xi_r \leq \frac{\bar{c}}{r^2}, & \xi_r \in B(q,2r). \end{cases} \tag{10}$$

其中 $r > 0$, $\bar{c} \in \mathbb{R}$ 且 $\bar{c} > 0$. 由 (7) 式可得

$$R = n\lambda + m\frac{\Delta\Psi}{\Psi}.$$

所以

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B(q,2r)} \xi_r R \mathrm{d}M = \int_{B(q,2r)} \xi_r (n\lambda + m\frac{\Delta\Psi}{\Psi}) \mathrm{d}M &\\ \leq \frac{m}{K} \int_{B(q,2r)-B(q,r)} \Psi \Delta \xi_r \mathrm{d}M &\\ \leq \frac{m}{K} \int_{B(q,2r)-B(q,r)} \frac{\bar{c}\Psi}{r^2} \mathrm{d}M, & \end{aligned}$$

上述积分不等式两端同时取 $r \to \infty$ 时, 由于 $\frac{\bar{c}}{r^2} \to 0$, 所以 $\int_{B(q,2r)} \xi_r R dM = 0$. 注意到在 $B(q,r)$ 内, $\xi_r = 1$, 所以当 $r \to \infty$ 时, 由数量曲率的非负性可得 $R = 0$.

定理 3 的证明 由截断函数 (10) 可得

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_{B(q,2r)} \xi_r R \mathrm{d}M &= m \int_{B(q,2r)} \xi_r \frac{\Delta\Psi}{\Psi} \mathrm{d}M \\
&\le \frac{m}{K} \int_{B(q,2r)-B(q,r)} \Psi \Delta \xi_r \mathrm{d}M \\
&\le \frac{m}{K} \int_{B(q,2r)-B(q,r)} \frac{\bar{c}\Psi}{r^2} \mathrm{d}M,
\end{aligned}
$$

类似定理 2 的证明, 上述积分不等式两端同时取 $r \to \infty$ 时, 可得 $R = 0$.

定理 4 的证明 由截断函数 (10) 可得

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_{B(q,2r)} \xi_r R \mathrm{d}M &= \int_{B(q,2r)} \xi_r (n\lambda + m\frac{\Delta\Psi}{\Psi}) \mathrm{d}M \\
&= n \int_{B(q,2r)} \xi_r \lambda \mathrm{d}M + m \int_{B(q,2r)} \xi_r \frac{\Delta\Psi}{\Psi} \mathrm{d}M \\
&\le n \int_{B(q,2r)} \xi_r \Delta\eta \mathrm{d}M + \frac{m}{K} \int_{B(q,2r)} \xi_r \Delta\Psi \mathrm{d}M \\
&\le \int_{B(q,2r)-B(q,r)} (n\eta + \frac{m}{K}\Psi) \Delta\xi_r \mathrm{d}M \\
&\le \int_{B(q,2r)-B(q,r)} \frac{\bar{c}(n\eta + \frac{m}{K}\Psi)}{r^2} \mathrm{d}M,
\end{aligned}
$$

类似的, 上述积分不等式两端同时取 $r \to \infty$ 时, 可得 $R = 0$.

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (11761061)。

参考文献

[1] Gomes, J.N., Wang, Q.L. and Xia, C.Y. (2017) On the h-Almost Ricci Soliton. *Journal of Geometry and Physics*, **114**, 216-222. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.12.010

[2] Barros, A. and Ribeiro Jr., E. (2014) Characterizations and Integral Formulas for Generalized Quasi-Einstein Metrics. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, **45**, 325-341. https://doi.org/10.1007/s00574-014-0051-0

[3] Cunha, A.W. and Siddiqi, M.D. (2023) Characterizations of Gradient h-Almost Yamabe Solitons. *Results in Mathematics*, **78**, Article No. 47. https://doi.org/10.1007/s00025-022-01821-2

[4] Caminha, A., Sousa, P. and Camargo, F. (2010) Complete Foliations of Space Forms by Hypersurfaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, **41**, 339-353. https://doi.org/10.1007/s00574-010-0015-y

[5] Grigor'yan, A. (1999) Analytic and Geometric Background of Recurrence and Nonexplosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **36**, 135-249. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-99-00776-4

[6] Schoen, R. and Yau, S.T. (1994) Lectures on Differential Geometry (Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology). International Press of Boston, Somerville.