

# 完全图拉普拉斯比率的研究

董香帅

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2024年3月6日; 录用日期: 2024年3月28日; 发布日期: 2024年4月26日

## 摘要

Brualdi等人给出了图的拉普拉斯比率  $\pi(G)$  的定义, 即树  $G$  的拉普拉斯矩阵积和式与其所有顶点度的乘积。Brualdi 和 Goldwasser 系统地研究了树的拉普拉斯比率的性质。这篇文章是对完全图删除 1-3 条边的拉普拉斯比率的研究。

## 关键词

完全图, 拉普拉斯矩阵, 积和式, 拉普拉斯比率

# Laplacian Ratios of the Complete Graphs

Xiangshuai Dong

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: Mar. 6<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 28<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 26<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Laplacian ratios of graphs were first considered by Brualdi et al. The Laplacian ratio of  $\pi(G)$  is the permanent of the Laplacian matrix of  $G$  divided by the product of degrees of all vertices. Brualdi and Goldwasser studied systematically the properties

of Laplacian ratios of graphs. In this paper, we investigate the Laplacian ratios of all graphs obtained from complete graphs with 1-3 edges deleted.

## Keywords

Complete Graphs, Laplacian Matrix, Permanent, Laplacian Ratio

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. 引言

设  $M = [a_{ij}] (i, j \in 1, 2, 3, \dots, n)$  是  $n$  阶的矩阵.  $M$  的积和式定义为

$$\text{per}(M) = \sum_{\sigma \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^n a_{i\phi(i)},$$

其中,  $\Lambda_n$  是  $n$  阶对称群. Valiant [1]证明了即使限定在(0,1)-矩阵中, 积和式的计算也是  $\#P$ -完全的.

设  $G = (V(G), E(G))$  是一个  $n$  个顶点和  $m$  条边的简单连通图,  $d_i$  表示  $V(G)$  中顶点  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的度. 令图  $G$  的邻接矩阵和度矩阵分别表示为  $A(G)$  和  $D(G)$ . 图  $G$  的拉普拉斯矩阵记为  $L(G) = D(G) - A(G)$ . 图  $G$  的拉普拉斯矩阵是一个行和与列和都等于 0 的对称矩阵. 拉普拉斯矩阵在研究一个图的复杂性(图的生成树的数目)中起着重要的作用. 对于邻接矩阵不能区分的非同构图, 拉普拉斯矩阵可以很好地区分. Van Dam 和 W. Haemers[2] 表述了围绕图的关联矩阵(广义邻接矩阵). 在研究图的一些性质时, 无符号拉普拉斯矩阵似乎更加方便, [3, 4]证明了这个观点是正确的. 而且, 用无符号拉普拉斯矩阵的谱研究图的一些性质比用邻接谱更加有效[5-8]. 最后, 无符号拉普拉斯矩阵的集合是一类非负矩阵, 且每个矩阵都具有组合意义.

在图的拉普拉斯矩阵的基础上, 许多学者开始研究图的拉普拉斯矩阵积和式. Brualdi 和 Goldwasser[9]给出了树和二部图的拉普拉斯积和式的一些结果: 含有  $n$  个顶点的树或二部图的拉普拉斯积和式的最小值和最大值. 得到了  $\text{per}L(G)$  的界. 当  $G$  是树时, 根据  $G$  中顶点的度、直径和匹配的大小, 得到了拉普拉斯积和式的最小值. 与拉普拉斯积和式的最小值相比, 根据中顶点的度, 直径和匹配的大小求得含有  $n$  个顶点的树的拉普拉斯积和式的最大值更加困难. 他们提出了三个问题:

**问题1.** ([9]) 含有  $n$  个顶点的树在直径至多为  $k$  时, 拉普拉斯积和式的最大值是多少?

**问题2.** ([9]) 含有  $n$  个顶点的树在匹配数不超过  $k$  时, 拉普拉斯积和式的最大值是多少?

**问题3.** ([9]) 含有  $n$  个顶点的树有  $(p, q)$ -二部划分时, 拉普拉斯积和式的最大值是多少?

Brualdi和 Goldwasser[9]给出了图的拉普拉斯比率  $\pi(G)$  的定义, 即树  $T$  的拉普拉斯矩阵积和式与其所有顶点度的乘积.

$$\pi(G) = \frac{\text{per}L(G)}{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

图的拉普拉斯比率在统计物理, 分子化学, 无线通信等方面有着重要的地位. 图的拉普拉斯比率还可以计算图复杂性. Brualdi 和 Goldwasser[9]首次研究了图的拉普拉斯比率, 他们研究了树的拉普拉斯比率的界, 他们进一步在1983年提出了关于树的拉普拉斯比率三个公开问题:

**问题4.** ([9])  $n$  个顶点直径至少为  $k$  的树拉普拉斯比率的最小值是多少?

**问题5.** ([9])  $n$  个顶点具有  $k$ -匹配的树拉普拉斯比率的最小值是多少?

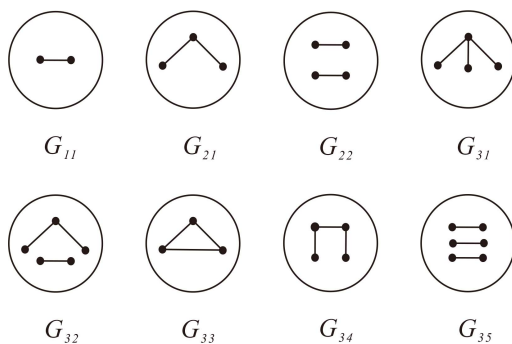
**问题6.** ([9])  $n$  个顶点树拉普拉斯比率的极大值是多少? 当直径至多为  $k$  时? 当匹配至多为  $k$  时?

在过去的四十年里, Goldwasser [10] 解决了问题 5, 剩下的问题还没有被解决. 目前对图的拉普拉斯比率的研究引起了读者广泛关注. 然而, 关于一般图的拉普拉斯比率的研究没有任何推进. 在这篇文章中, 我们研究了一般图的拉普拉斯比率. 这篇文章的章节安排如下: 文章的第二节是前期准备, 我们给出了一些定义和引理. 在文章的第三节, 推导出了完全图拉普拉斯比率的计算公式. 在第四节中, 比较了完全图删除 1-2 条边的拉普拉斯比率的一些结果. 我们在文章第五节中给出了一个关于完全图删 3 条边的拉普拉斯比率的讨论.

## 2. 前期准备

在这一章节, 我们将给出一些定义和引理, 用于后面描述和证明我们的结果.

本文考虑的图都是无向的, 有限的和简单的. 对于图  $G$  的子图  $H$ ,  $G - E(H)$  设  $G$  是一个  $n$  个顶点简单图, 若其任意两个顶点都是邻接的, 则称  $G$  是一个完全图, 记为  $K_n$ . 设  $\mathcal{G}_n^0 = K_n$  是只包含  $n \geq 1$  阶完全图的集合. 我们在图1 刻画了 1-3 条边图, 所有的图组成集合  $\mathcal{G}$ . 对于  $m \geq 1$  且  $n \geq 2m$ , 设  $\mathcal{R}_n^m$  完全图  $K_n$  删除  $m$  条边得到图的集合. 对于  $R_{mi} \in \mathcal{R}_n^m$  和  $G_{mi} \in \mathcal{G}$ , 设  $R_{mi} = K_n - G_{mi}$ . 进而得到了图的集合  $\mathcal{R}_n^1$ ,  $\mathcal{R}_n^2$  和  $\mathcal{R}_n^3$ .



**Figure 1.** The set of all graphs in  $\mathcal{G}$

**图 1.**  $\mathcal{G}$  中所有图的集合

设  $B$  是一个  $n \times n$  的所有项都是 0 或 1 矩阵, 我们可以将  $B$  看作一个  $n \times n$  的棋盘, 其中 1 的位置不被禁止, 0 的位置被禁止.  $r_t(B)$  表示在  $B$  不被禁止位置摆放  $k$  个不同行不同列的车的排列数. 为了方便, 对于任意棋盘  $B$ , 定义  $r_0(B) = 1$ . 另外, 如果  $t > \min\{r_B, c_B\}$ , 则  $r_t(B) = 0$ , 其中  $r_B$  是  $B$  的非零行的个数,  $c_B$  是  $B$  的非零列的个数.

**定义2.1.**  $B$  的车多项式是一个关于  $\{r_t(B)\}$  的生成函数.

$$R(B, x) = 1 + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} r_k(B)x^k.$$

记  $B$  的车多项式是一个次数至多为  $\min\{r_B, c_B\} \leq n$ .

**引理2.1.** ([11]) 如果棋盘  $B$  与  $B'$  是不交的, 则

$$R(B + B', x) = R(B, x)R(B', x).$$

**引理2.2.** ([11]) 令  $A$  是一个  $n \times n$  的(0,1)-矩阵, 则

$$\text{per}(A) = \sum_{t=0}^n (-1)^t r_t(B) (n-t)!,$$

其中,  $B = J - A$

**定理 2.3** 来自积和式的定义. 是著名的拉普拉斯展开定理.

**定理2.3.** 设  $A$  任意一个  $n \times n$  的矩阵.  $i, j$  为整数且满足  $1 \leq i \leq n$  和  $1 \leq j \leq n$ . 则

$$\text{per}A = \sum_i a_{ij} \text{per}A_{ij} \quad \text{per}A = \sum_j a_{ij} \text{per}A_{ij},$$

其中  $A_{ij}$  是  $A$  矩阵删除第  $i$  行和第  $j$  列所得到的  $(n-1) \times (n-1)$  矩阵.

### 3. 完全图的拉普拉斯比率

设图  $G$  是一个顶点集为  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , 其中,  $v_i$  的度为  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). 设  $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $G$  中所有子图  $H$  组成的集合  $\mathcal{H}(K)$  有下面两条性质:

- (1) 图  $H$  的顶点是  $\{v_i : i \in K\}$ .
- (2)  $H$  的每一个连通部分是一个孤立边或圈.

对于  $H \in \mathcal{H}(K)$ ,  $c(H)$  表示  $H$  中圈的个数,  $c_0(H)$  表示奇圈的数目.

**引理3.1.** ([9]) 对于一个具有  $n$  个顶点的图  $G$ , 则

$$\text{per}L(G) = \sum_{K \subseteq \{1, \dots, n\}} \sum_{H \in \mathcal{H}(K)} (-1)^{c_0(H)} 2^{c(H)} \prod_{i \notin K}$$

**定理3.2.** 设图  $G$  是  $n$  个顶点的完全图, 则

$$\pi(G) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \frac{(-1)^t C_n^s \cdot C_s^t (s-t)!}{(1-n)^s},$$

**证明** 我们将矩阵  $L(G)$  的所有元素都乘以  $-1$ , 得到的矩阵为  $L'(G)$ .

$$L(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix},$$

$$L'(G) = \begin{bmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{bmatrix}.$$

由定理 2.3 可知,  $\text{per}L(G) = (-1)^n \text{per}L'(G)$ .  $\text{per}L'(G)$  的每一项  $a_{1\phi(1)}a_{2\phi(2)} \cdots a_{n\phi(n)}$  都是矩阵  $L'(G)$  不同行不同列元素的乘积, 其中  $a_{i\phi(i)}$  是  $L'(G)$  第  $i$  行第  $j$  列元素, 定义  $P = \{a_{1\phi(1)}a_{2\phi(2)} \cdots a_{n\phi(n)}\}$ . 由引理 3.1 可知, 可以将  $P$  的每一项分为  $n+1$  项: 对角线包含 1 个, 包含 2 个,  $\cdots$ , 包含  $n$  个. 当  $L'(G)$  的对角线元素选  $n$  个时, 共有 1 项即  $(1-n)^n$ ; 当  $L'(G)$  的对角线元素选  $n-1$  个时, 共有  $C_n^1$  项即  $(1-n)^{n-1} \text{per}A(K_1) = 0$ ; 当  $L'(G)$  的对角线元素选  $n-2$  个时, 共有  $C_n^2$  项即  $(1-n)^{n-2} \text{per}A(K_2)$ ; 当  $L'(G)$  的对角线元素选  $n-3$  个时, 共有  $C_n^3$  项即  $(1-n)^{n-3} \text{per}A(K_3)$ ;  $\cdots$ ; 当  $L'(G)$  的对角线元素选 0 个时, 共有 1 项即  $\text{per}A(K_n)$ . 所以,

$$\begin{aligned} \text{per}L(G) &= (-1)^n [C_n^0 (1-n)^n + C_n^1 (1-n)^{n-1} \text{per}A(K_1) + \cdots + C_n^n \text{per}A(K_n)] \\ &= \sum_{s=1}^n (-1)^n C_n^s (1-n)^{n-s} \text{per}A(K_s), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\text{per}A(K_0) = \text{per}A(K_1) = 0$ .

由引理 2.2 可知,  $\text{per}A(K_s) = \sum_{t=0}^s (-1)^t r_t(B) (s-t)!$ . 因为  $B = J - K_s = I_s$ , 所以  $R(B, x) = R(I_s, x)$ . 由引理 2.1 可知,  $R(I_s, x) = (1+x)^s$ . 由定义 2.1 可知,  $r_t(B) = C_s^t$ , 所以,

$$\text{per}A(K_s) = \sum_{t=0}^s (-1)^t C_s^t (s-t)! \quad (2)$$

将(2)代入(1)可得:

$$\text{per}L(G) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s (-1)^{n+t} C_n^s \cdot C_s^t (1-n)^{n-s} (s-t)!.$$

因为完全图的度序列为  $n-1, n-1, \dots, n-1$ , 所以,

$$\pi(G) = \frac{\text{per}(G)}{(n-1)^{n-1}} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^s \frac{(-1)^t C_n^s \cdot C_s^t (s-t)!}{(1-n)^s}.$$

#### 4. 完全图删边的拉普拉斯比率

**引理4.1.** 设  $D_n^i$  是对角线元素为  $i$  个  $-1$  和  $n-i$  个  $n-1$  其它元素均为  $-1$  的  $n$  阶矩阵. 则

$$\begin{aligned} \text{per}(D_n^1) &= (n-1)! \text{per}(D_2^1) - \sum_{j=1}^{n-2} A_{n-1}^{j-1} \text{per}A(K_{n-j}) \\ \text{per}(D_n^2) &= \frac{(n-1)!}{2!} \text{per}(D_3^2) - \sum_{j=1}^{n-3} A_{n-1}^{j-1} \text{per}A(D_{n-j}^1) \\ &\vdots \\ \text{per}(D_n^i) &= \frac{(n-1)!}{i!} \text{per}(D_{i+1}^i) - \sum_{j=1}^{n-i-1} A_{n-1}^{j-1} \text{per}A(D_{n-j}^{i-1}) \end{aligned}$$

**证明**  $D_n^1$  具有下列的矩阵形式:

$$D_n^1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

观察矩阵  $D_n^1$ , 可以得出  $\text{per}(D_n^1) - (n-1)\text{per}(D_{n-1}^1) + \text{per}A(K_{n-1}) = 0$ . 进一步可以得出

$$\begin{aligned} \text{per}(D_n^1) &= (n-1)\text{per}(D_{n-1}^1) - \text{per}A(K_{n-1}) \\ &= (n-1)(n-2)\text{per}(D_{n-2}^1) - (n-1)\text{per}A(K_{n-2}) - \text{per}A(K_{n-1}) \\ &= (n-1)(n-2)(n-3)\text{per}(D_{n-2}^1) - (n-1)(n-2)\text{per}A(K_{n-3}) \\ &\quad - (n-1)\text{per}A(K_{n-2}) - \text{per}A(K_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= \text{per}(D_2^1) - \text{per}A(K_{n-1}) - (n-1)\text{per}A(K_{n-2}) \\ &\quad - \cdots - (n-1)(n-2) \cdots 3 \text{per}A(K_2) \\ &= (n-1)! \text{per}(D_2^1) - \sum_{j=1}^{n-2} A_{n-1}^{j-1} \text{per}A(K_{n-j}). \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 \text{per}(D_n^i) &= (n-1)\text{per}(D_{n-1}^i) - \text{per}(D_{n-1}^{i-1}) \\
 &= (n-1)(n-2)\text{per}(D_{n-2}^i) - (n-1)\text{per}(D_{n-2}^{i-1}) - \text{per}(D_{n-1}^{i-1}) \\
 &= (n-1)(n-2)(n-3)\text{per}(D_{n-3}^i) - (n-1)(n-2)\text{per}(D_{n-3}^{i-1}) \\
 &\quad - (n-1)\text{per}(D_{n-2}^{i-1}) - \text{per}(D_{n-1}^{i-1}) \\
 &= \dots \\
 &= \frac{(n-1)!}{i!}\text{per}(D_{i+1}^i) - \text{per}(D_{n-1}^{i-1}) - (n-1)\text{per}(D_{n-2}^{i-1}) \\
 &\quad - \dots - (n-1)(n-2)\dots(n-i+1)\text{per}(D_{n-i}^{i-1}) \\
 &= \frac{(n-1)!}{i!}\text{per}(D_{i+1}^i) - \sum_{j=1}^{n-i-1} A_{n-1}^{j-1}\text{per}(D_{n-j}^{i-1}).
 \end{aligned}$$

**定理4.2.** 在  $\mathcal{R}_n^1 = \{R_{11}\}$  中, 可以得出:

$$\pi(R_{11}) = \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{t=1}^s \frac{(-1)^{s+t} C_n^s \cdot C_s^t (s-t)!}{(n-1)^{n+s-2}} + \frac{2\text{per}(D_{n-2}^1)}{(n-2)(n-1)^{n-2}} + \frac{\text{per}(D_{n-2}^2)}{2(n-2)(n-1)^{n-2}}.$$

**证明**  $R_{11}$  的度序列为  $n-1, n-1, \dots, n-1, n-2, n-2$ , 图  $R_{11}$  的拉普拉斯矩阵如下:

$$L(R_{11}) = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

观察矩阵  $L(R_{11})$  的结构, 根据定理 2.3 可知, 按照前两行展开可得:

$$\text{per}(R_{11}) = \sum_{t=0}^{n-2} (n-2)^2 \text{per}L(K_{n-2}) + 2(n-2)\text{per}(D_{n-2}^1) + C_{n-2}^2 \text{per}(D_{n-2}^2).$$

所以由定理 3.2 可得

$$\begin{aligned}
 \pi(R_{11}) &= \frac{\text{per}(R_{11})}{(n-2)^2(n-1)^{n-2}} \\
 &= \sum_{s=1}^{n-2} \sum_{t=1}^s \frac{(-1)^{s+t} C_n^s \cdot C_s^t (s-t)!}{(n-1)^{n+s-2}} + \frac{2D_n^1}{(n-2)(n-1)^{n-2}} + \frac{D_n^2}{2(n-2)(n-1)^{n-2}}.
 \end{aligned}$$

**定理4.3.** 在  $\mathcal{R}_n^2 = \{R_{21}, R_{22}\}$  中, 可以得出:

$$\begin{aligned} \pi(R_{21}) = & \frac{(n^4 - 8n^3 + 27n^2 - 48n + 38)\text{per}L(K_{n-4})}{(n-3)(n-2)^2(n-1)^{n-3}} \\ & + \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 100n + 120)\text{per}(D_{n-4}^1)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \frac{(12n^2 - 80n + 154)\text{per}(D_{n-4}^2)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \\ & + \frac{(-24n + 96)\text{per}(D_{n-4}^3)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \frac{24\text{per}(D_{n-4}^4)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(R_{22}) = & \frac{(n^4 - 8n^3 + 28n^2 - 48n + 36)\text{per}L(K_{n-4})}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\ & + \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 96n + 112)\text{per}(D_{n-4}^1)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{(12n^2 - 80n + 15)\text{per}(D_{n-4}^2)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\ & + \frac{(-24n + 96)\text{per}(D_{n-4}^3)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{24\text{per}(D_{n-4}^4)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}}. \end{aligned}$$

**证明**  $R_{21}$  的度序列为  $n-1, n-1, \dots, n-1, n-2, n-2, n-3$ ,  $R_{22}$  的度序列为  $n-1, n-1, \dots, n-1, n-2, n-2, n-2, n-2$ . 图  $R_{21}$  和  $R_{22}$  的拉普拉斯矩阵如下:

$$L(R_{21}) = \begin{bmatrix} n-3 & 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

和

$$L(R_{22}) = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-2 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$



观察矩阵  $L(R_{21})$  和  $L(R_{22})$  的结构, 根据定理 2.3, 按照前四行展开可得:

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(R_{21}) &= (n^4 - 8n^3 + 27n^2 - 48n + 38)\operatorname{per}L(K_{n-4}) \\ &\quad + (-4n^3 + 32n^2 - 96n + 120)\operatorname{per}(D_{n-4}^1) + (12n^2 - 80n + 15)\operatorname{per}(D_{n-4}^2) \\ &\quad + (-24n + 96)\operatorname{per}(D_{n-4}^3) + 24\operatorname{per}(D_{n-4}^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(R_{22}) &= (n^4 - 8n^3 + 28n^2 - 48n + 36)\operatorname{per}L(K_{n-4}) \\ &\quad + (-4n^3 + 32n^2 - 100n + 120)\operatorname{per}(D_{n-4}^1) + (12n^2 - 80n + 154)\operatorname{per}(D_{n-4}^2) \\ &\quad + (-24n + 96)\operatorname{per}(D_{n-4}^3) + 24\operatorname{per}(D_{n-4}^4).\end{aligned}$$

所以由拉普拉斯比率的定义可得

$$\begin{aligned}\pi(R_{21}) &= \frac{\operatorname{per}(R_{21})}{(n-3)(n-2)^2(n-1)^{n-3}} \\ &= \frac{(n^4 - 8n^3 + 27n^2 - 48n + 38)\operatorname{per}L(K_{n-4})}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \\ &\quad + \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 100n + 120)\operatorname{per}(D_{n-4}^1)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \frac{(12n^2 - 80n + 154)\operatorname{per}(D_{n-4}^2)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \\ &\quad + \frac{(-24n + 96)\operatorname{per}(D_{n-4}^3)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \frac{24\operatorname{per}(D_{n-4}^4)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(R_{22}) &= \frac{\operatorname{per}(R_{22})}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\ &= \frac{(n^4 - 8n^3 + 28n^2 - 48n + 36)\operatorname{per}L(K_{n-4})}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\ &\quad + \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 96n + 112)\operatorname{per}(D_{n-4}^1)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{(12n^2 - 80n + 15)\operatorname{per}(D_{n-4}^2)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\ &\quad + \frac{(-24n + 96)\operatorname{per}(D_{n-4}^3)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{24\operatorname{per}(D_{n-4}^4)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}}.\end{aligned}$$

**定理4.4.** 在  $\mathcal{R}_n^2 = \{R_{21}, R_{22}\}$  中, 可以得出:

$$\pi(R_{21}) < \pi(R_{22})$$

证明

$$\begin{aligned}
& \pi(R_{22}) - \pi(R_{21}) \\
&= \frac{(n^4 - 8n^3 + 28n^2 - 48n + 36)\text{per}L(K_{n-4})}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\
&+ \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 96n + 112)\text{per}(D_{n-4}^1)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{(12n^2 - 80n + 15)\text{per}(D_{n-4}^2)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\
&+ \frac{(-24n + 96)\text{per}(D_{n-4}^3)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} + \frac{24\text{per}(D_{n-4}^4)}{(n-2)^4(n-1)^{n-4}} \\
&- \left[ \frac{(n^4 - 8n^3 + 27n^2 - 48n + 38)\text{per}L(K_{n-4})}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \right. \\
&+ \frac{(-4n^3 + 32n^2 - 100n + 120)\text{per}(D_{n-4}^1)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \frac{(12n^2 - 80n + 154)\text{per}(D_{n-4}^2)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \\
&+ \frac{(-24n + 96)\text{per}(D_{n-4}^3)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} + \left. \frac{24\text{per}(D_{n-4}^4)}{(n-3)(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-3}} \right] \\
&= \frac{1}{(n-2)^2(n-1)^{n-4}} [(4n^3 - 26n^2 + 56n - 44)\text{per}L(K_{n-4}) \\
&+ (8n^3 - 56n^2 + 144n - 144)\text{per}(D_{n-4}^1) + (-4n^2 + 88n - 160)\text{per}(D_{n-4}^2) \\
&+ (24n - 96)\text{per}(D_{n-4}^3) - 24\text{per}(D_{n-4}^4)] \\
&> \frac{1}{(n-2)^2(n-1)^{n-4}} [(12n^3 - 96n^2 + 312n - 568)(D_{n-4}^4)].
\end{aligned}$$

因为  $n > 4$ , 所以

$$12n^3 - 96n^2 + 312n - 568 > 0,$$

所以

$$\frac{1}{(n-2)^2(n-1)^{n-4}} [(12n^3 - 96n^2 + 312n - 568)(D_{n-4}^4) > 0.$$

进一步,  $\pi(R_{22}) > \pi(R_{21})$ .

## 5. 注记

文章前面介绍了完全图拉普拉斯比率的计算和完全图删除 1-2 边的一些结果. 对于完全图删除 3 条边, 可以运用同样的方法. 由引理 4.1 可知, 我们用  $D_n^i$  计算出  $\mathcal{R}_n^3$  中所有图的拉普拉斯比率的值. 然后采用定理 4.4 的比较方法, 比较出  $\mathcal{R}_n^3$  中所有图的拉普拉斯比率的值大小关系. Brualdi 和 Goldwasser[9] 给出了树和二部图的拉普拉斯比率的一些结果. 同时提出了关于树的拉普拉斯比率三个公开问题. 目前对于一般图的拉普拉斯比率的研究还比较少, 值得我们深一步研究. 关于一般图的拉普拉斯比率, 我们提出了以下三个问题:

**问题7.** ([9])  $n$  个顶点直径至少为  $k$  的图拉普拉斯比率的最小值是多少?

**问题8.** ([9])  $n$  个顶点具有  $(p, q)$ -二部划分的图拉普拉斯比率的最小值是多少?

**问题9.** ([9])  $n$  个顶点的图拉普拉斯比率的极大值是多少? 当直径至多为  $k$  时, 拉普拉斯比率

的最大值是多少? 当匹配至多为  $k$  时, 拉普拉斯比率的最大值是多少?

以上提出的三个问题对于一般图拉普拉斯比率的研究具有一定的推进作用, 值得读者广泛关注. 在前人研究的基础上, 深入研究图的拉普拉斯比率有着重要的价值. 这不仅为一些重要问题给出解, 更是推动了拉普拉斯矩阵和拉普拉斯积和式的研究. 迄今为止, 上述关于拉普拉斯比率的一些重要问题还没有被解决, 沿着这些问题展开研究有着重要意义. 我们对图的拉普拉斯比率进行更深入的研究, 对研究图的复杂性有一定的推动作用.

## 基金项目

《图的拉普拉斯比率以及相关问题的研究》, 项目编号: 07M2023001.

## 参考文献

- [1] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [2] van Dam, E.R. and Haemers, W. (2003) Which Graphs Are Determined by Their Spectrum? *Linear Algebra and Its Applications*, **373**, 241-272. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(03\)00483-X](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00483-X)
- [3] Cvetkovic, D. (2005) Signless Laplacians and Line Graphs. *Bulletin (Académie serbe des sciences et des arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Sciences mathématiques)*, **131**, 85-92. <https://doi.org/10.2298/BMAT0530085C>
- [4] Cvetkovic, D., Rowlinson, P. and Simic, S.K. (2007) Signless Laplacians of Finite Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **423**, 155-171. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.01.009>
- [5] Cvetkovic, D., Rowlinson, P. and Simic, S.K. (2004) Spectral Generalizations of Line Graphs. On Graphs with Least Eigenvalue-2. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511751752>
- [6] Haemers, W. and Spence, E. (2004) Enumeration of Cospectral Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **25**, 199-211. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(03\)00100-8](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00100-8)
- [7] Cash, G.G. and Gutman, I. (2004) The Laplacian Permanent Polynomial: Formulas and Algorithms. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **51**, 129-136.
- [8] Liu, S. (2019) On the (signless) Laplacian Permanent Polynomials of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **35**, 787-803. <https://doi.org/10.1007/s00373-019-02033-2>

- 
- [9] Brualdi, R.A. and Goldwasser, J.L. (1984) Permanent of the Laplacian Matrix of Trees and Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **48**, 1-21. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(84\)90127-4](https://doi.org/10.1016/0012-365X(84)90127-4)
- [10] Goldwasser, J.L. (1986) Permanent of the Laplacian Matrix of Trees with a Given Matching. *Discrete Mathematics*, **61**, 197-212. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(86\)90091-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(86)90091-9)
- [11] Wu, T. and So, W. (2021) Permanent Sums of Graphs of Extreme Sizes. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112353. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112353>