Statistical and Application 统计学与应用, 2012, 1, 11-15
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2012.12003 Published Online December 2012 (http://www.hanspub.org/journal/sa.html)

The Estimation and Properties of Reliability for Complex System under Constant-Stress Accelerated Life Tests

Junli Yang*, Guozhi Zhang

Department of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin
Email: *yangjunli1986@sina.com

Received: Oct. 26th, 2012; revised: Nov. 5th, 2012; accepted: Nov. 19th, 2012

Abstract: This paper studies estimation of the complex system described by minimal paths under the constant-stress accelerated life tests. Assuming that the product life time from each subsystem in the exponential distribution are type II censoring date under the constant-stress accelerated life tests. Under this condition, this paper gives the estimation and its asymptotic distribution of reliability of a complex system.

Keywords: Constant-Stress Accelerated Life Test; Exponential Distribution; Minimal Paths; Reliability; Asymptotic Distribution

恒加试验下复杂系统可靠度的估计与性质

杨俊丽*，张国志

哈尔滨理工大学应用科学学院，哈尔滨
Email: *yangjunli1986@sina.com

收稿日期：2012 年 10 月 26 日；修回日期：2012 年 11 月 5 日；录用日期：2012 年 11 月 19 日

摘　要：本文研究了恒加试验下，基于最小路径描述的复杂系统可靠度的估计问题。假设每个子系统的寿命分布为指数分布，且在恒加试验下，得到的每个子系统的寿命样本为定数截尾样本，在此条件下，本文给出了复杂系统的可靠度的估计及其渐近分布。

关键词：恒加试验；指数分布；最小路径；可靠度；渐近分布

1. 引言

恒定应力加速寿命试验(简称恒加试验)是一种常用的评价高可靠性长寿命产品的各种可靠性特征的寿命试验方法。通过在加速试验条件下获得的样本来推断正常条件下产品的可靠性指标。这是非常有意义的课题。关于恒加试验的统计推断问题已经有很多成果，1982 年，A. P. Basu、N. Ebrahimi[1]将 Shaked 和 Singpurwalla 的非参数统计方法延伸到两个方面，首先解决了删失数据的问题，其次把这种方法应用在竞争失效加速寿命试验中；1990 年，N. Balakrishnan[2]用极大似然方法讨论了指数分布加速寿命试验逐步 II 型截尾样本下的刻度参数的估计问题；1996 年，张志华、罗旭[3]给出了指数分布恒加试验下广义线性模型的极大似然估计；2000 年，B. Dimitri 等[4]给出了加速寿命试验对数线性模型下数据分析的改进方法；2002 年，王乃生、王玲玲[5]研究了指数分布恒加试验中试验数据缺失时的统计分析方法，给出了加速模型参数的极大似然估计与线性估计，证明了极大似然估计的存在性和唯一性；2008 年，A. J. Watkins、A. M. John[6]研究了威布尔分布恒加试验 II 型截尾样本下，当参数与应力满足对数线性模型时参数的极大似然估计问题；2009 年，S. Voiculescu 等[7]对于指数分布加速寿命

*通讯作者。

试验下，加速模型为阿伦尼斯模型的参数给出了极大似然估计及贝叶斯估计，并用 Monte Carlo 模拟表明此方法优于以前的结论；同年 H. Alaa、A. Hamid[8]研究了 Burr II 分布加速寿命试验逐步 II 型删失数据下的双参数极大似然估计问题。以上结论都是针对元件进行研究的结果，对于系统的研究较少，特别是对于基于最小路径、最小割集描述的复杂系统还没有相应的研究成果。对于系统可靠性，一般都是在正常试验条件下，基于完全或不完全数据下的研究。2008 年，张国志等[9]对于基于最小路径、最小割集矩阵描述的复杂系统给出了系统可靠度的解析表达式及算法实现；2010 年，张国志、张伟[10]研究了基于最小路径描述的多源点多汇点网络系统可靠性问题；2012 年，张学玲[11]等研究了子系统寿命数据为区间型数据，各子系统是相互独立的基于最小路径描述的复杂系统的可靠度估计及性质。但在加速寿命试验条件下，对复杂系统可靠性的研究目前并不多见。

本文所研究的问题是在假设恒加试验下复杂系统的最小路径矩阵已知的条件下，给出了当每个元件寿命服从不同参数的指数分布时，定数截尾样本下系统的可靠度的估计及其渐近分布。

2. 研究问题

复杂系统的描述见文献[9]：

设系统 S 是由 m 个独立子系统 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 构成，子系统寿命变量分别记为 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，系统的寿命变量记为 X。记 $m\times k$ 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\right)$ 为系统 S 的最小路径矩阵。

系统的第 i 个元件寿命服从指数分布，恒加试验的实施如文献[12]描述如下：

1) 确定正常应力水平 V_0 和 k_i 个加速应力水平 $V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{ik_i}$，这些应力水平满足：

$$V_0<V_{i1}<V_{i2}<\cdots<V_{ik_i},i=1,2,\cdots,m$$

2) 从该批产品中随机选出 n_i 个样品，并分为 k_i 组，其样本容量分别为

$$n_{i1},n_{i2},\cdots,n_{ik_i}\left(n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{ik_i}=n_i\right)i=1,2,\cdots,m,$$

将第 j 组样品安排在应力水平 V_{ij} 下进行加速寿命试验。

3) 在 k_i 个加速应力水平下分别进行定数截尾加速寿命试验。设在应力水平 V_{ij} 下 n_{ij} 个样品中有 r_{ij} 个失效，其失效数据满足：

$$t_{ij1}\le t_{ij2}\le\cdots\le t_{ijr_{ij}}\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k_i$$

恒加试验的统计推断是在下面两个假定下进行的：

A1：在正常应力水平 V_0 和加速应力水平 $V_{i1},V_{i2},\cdots,V_{ik_i}$ 下产品寿命均服从指数分布。其分布函数为：

$$F_{ij}\left(t\right)=1-e^{-t/\theta_{ij}}\quad t>0;\ i=1,2,\cdots,m;\ j=0,1,2\cdots,k_i$$

式中 θ_{ij} 为产品在应力水平 V_{ij} 下的平均寿命。当 $j=0$ 时，$F_{ij}\left(t\right)=F_{i0}\left(t\right)$，为第 i 个元件在正常应力水平 V_0 下的分布函数。

A2：产品的平均寿命 θ_{ij} 与所施加的加速应力水平 V_{ij} 之间有如下加速模型，即：

$$\ln\theta_{ij}=a_i+b_i\varphi\left(V_{ij}\right)\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=0,1,2\cdots,k_i$$

式中 a_i,b_i 为待估参数；$\varphi\left(V\right)$ 是 V 的已知函数，当 $j=0$ 时，$V_{ij}=V_0$。

3. 恒加试验下复杂系统可靠度的估计及渐近分布

指数分布定数截尾样本下平均寿命的极大似然估计有很多好的统计性质，如渐近正态性，为了研究系统估计的性质，本文首先以下面引理形式给出。

引理 1 设产品的寿命服从指数分布，分布函数为 $F\left(t\right)=1-e^{-t/\theta}$，式中 θ 为产品的平均寿命。取 n 个产品进行寿命试验，设 $t_1,t_2,\cdots,t_d$ 是截尾数为 d 的定数截尾样本，总试验时间为 T，且 $T=\sum_{i=1}^{d}t_i+\left(n-d\right)t_i$。在此条件下平均寿命 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{T}{d}$，则有：

$$\sqrt{d}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\theta^2\right)$$

证明：因为 $\dfrac{2T}{\theta}\sim\chi^2\left(2d\right)$[13]，且 $E\left(\dfrac{2T}{\theta}\right)=2d$，$Var\left(\dfrac{2T}{\theta}\right)=4d$。则 $\dfrac{2T}{\theta}$ 可以表示成 $\sum_{i=1}^{2d}\eta_i^2$，其中 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{2d}$ 相互独立，且 $\eta_i\sim N\left(0,1\right),i=1,2,\cdots,2d$。由中心极限定理得：$\dfrac{\sum_{i=1}^{2d}\eta_i^2-E\left(\sum_{i=1}^{2d}\eta_i^2\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{2d}\eta_i^2\right)}}\overset{近}{\sim}N\left(0,1\right)$，即

$$\frac{\frac{2T}{\theta}-2d}{\sqrt{4d}}\xrightarrow{L}N(0,1)。$$

则 $\sqrt{d}\left(\frac{T}{\mathrm{d}\theta}-1\right)\xrightarrow{L}N(0,1)$。

又因为 $\hat{\theta}=\frac{T}{d}$，所以 $\sqrt{d}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1\right)\xrightarrow{L}N(0,1)$，即：

$$\sqrt{d}\left(\hat{\theta}-\theta\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\theta^2\right)$$

定理证明完毕。

3.1. 第 *i* 个元件可靠度的估计及性质

假如恒加试验如上文中(1)，(2)，(3)所述，并且满足两个基本假定，此时文献[12]得到应力水平 V_{ij} 下 θ_{ij} 的极大似然估计：

$$\hat{\theta}_{ij}=\frac{T_{ij}}{r_{ij}},i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k_i$$

式中 $T_{ij}=\sum_{p=1}^{r_{ij}}t_{ijp}+\left(n_{ij}-r_{ij}\right)t_{ijr_{ij}}$ 为应力水平 V_{ij} 下的总试验时间。

由引理 1 有 $\sqrt{r_{ij}}\left(\hat{\theta}_{ij}-\theta_{ij}\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\theta_{ij}^2\right)$，由独立性有 $\sqrt{r_i}\left(\hat{\theta}_i-\theta_i\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\Sigma_1\right)$，其中，$\hat{\theta}_i=\left(\hat{\theta}_{i1},\hat{\theta}_{i2},\cdots,\hat{\theta}_{ik_i}\right)^T,\theta_i=\left(\theta_{i1},\theta_{i2},\cdots,\theta_{ik_i}\right)^T$。记 $r_i=\min_{1\le j\le k_i}r_{ij}$，设 $\lim_{r_i\to\infty}\frac{r_{ij}}{r_i}=\lambda_{ij}^2$，

$$\Sigma_1=\mathrm{diag}\left(\lambda_{i1}^2\theta_{i1}^2,\lambda_{i2}^2\theta_{i2}^2,\cdots,\lambda_{ik_i}^2\theta_{ik_i}^2\right)。$$

利用估计 $\hat{\theta}_{ij}$ 就可以写出加速模型

$$\ln\hat{\theta}_{ij}=a_i+b_i\varphi\left(V_{ij}\right),i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots k_i。$$

令 $Q(a,b)=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\ln\hat{\theta}_{ij}-a_i-b_i\varphi\left(V_{ij}\right)\right)^2$，可以得到 a_i,b_i 的最小二乘估计 $\hat{a}_i,\hat{b}_i$ 如下：

$$\begin{cases}\hat{b}_i=\dfrac{l_{x_iy_i}}{l_{x_ix_i}}\\ \hat{a}_i=\overline{y}_i-\hat{b}_i\overline{x}_i\end{cases}$$

其中

$$\overline{y}_i=\frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i}y_{ij},y_{ij}=\ln\hat{\theta}_{ij};$$

$$\overline{x}_i=\frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i}x_{ij},x_{ij}=\varphi\left(V_{ij}\right)$$

$$l_{x_iy_i}=\sum_{j=1}^{k_i}x_{ij}y_{ij}-\frac{1}{k_i}\left(\sum_{j=1}^{k_i}x_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{k_i}y_{ij}\right)$$

$$l_{x_ix_i}=\sum_{j=1}^{k_i}x_{ij}^2-\frac{1}{k_i}\left(\sum_{j=1}^{k_i}x_{ij}\right)^2$$

这样可以得到如下的加速模型：

$$\ln\hat{\theta}_i=\hat{a}_i+\hat{b}_i\varphi(V)$$

当 $V=V_0$ 时，就可以得到正常应力水平下对数平均寿命 $\ln\theta_{i0}$ 的估计 $\ln\hat{\theta}_{i0}$，记 $x_0=\varphi\left(V_0\right)$。由加速模型及估计 $\hat{a}_i,\hat{b}_i$ 得：$\ln\hat{\theta}_{i0}=\overline{y}_i+\frac{x_0-\overline{x}_i}{l_{x_ix_i}}\cdot l_{x_iy_i}$，则 $\ln\hat{\theta}_{i0}$ 为 $\hat{\theta}_i=\left(\hat{\theta}_{i1},\hat{\theta}_{i2},\cdots,\hat{\theta}_{ik_i}\right)^T$ 的函数，可得：

$$\sqrt{r_i}\left(\ln\hat{\theta}_{i0}-\ln\theta_{i0}\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\sigma_{i0}^2\right)$$

其中 $\sigma_{i0}^2=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\left(\frac{1}{k_i}+\frac{\left(x_{ij}-\overline{x}_i\right)\left(x_0-\overline{x}_i\right)}{l_{x_ix_i}}\right)^2\cdot\lambda_{ij}^2\right)$。

为了研究系统可靠度的估计及性质，首先需要获得元件可靠度的估计及性质。

第 *i* 个元件可靠度的估计为：

$$\hat{R}_i(t)=e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_{i0}}}\tag{1}$$

由式(1)及 $\ln\hat{\theta}_{i0}$ 的渐近正态性可得第 *i* 个元件可靠度估计的渐近正态性，以下面引理形式给出。

引理 2 $\hat{R}_i(t)=e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_{i0}}}=e^{-\frac{t}{e^{\ln\hat{\theta}_{i0}}}}$ 是 $\ln\hat{\theta}_{i0}$ 的函数，则元件的可靠度估计 $\hat{R}_i(t)$ 具有渐近正态性，即：

$$\sqrt{r_i}\left(\hat{R}_i(t)-R_i(t)\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\frac{t^2}{\theta_{i0}^2}\cdot e^{-\frac{2t}{\theta_{i0}}}\cdot\sigma_{i0}^2\right),$$

$i=1,2,\cdots,m$

证明：令 $\varepsilon=\ln\hat{\theta}_{i0}$，$\varepsilon_0=\ln\theta_{i0}$，

则 $\hat{R}_i(t)=e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_{i0}}}=e^{-\frac{t}{e^{\varepsilon}}}$。

令 $g(\varepsilon)=e^{-\frac{t}{e^{\varepsilon}}}$，对其求导得：$g'(\varepsilon)=e^{-\frac{t}{e^{\varepsilon}}}\cdot\frac{t}{e^{\varepsilon}}$

所以 $\sqrt{r_i}\left[g(\varepsilon)-g(\varepsilon_0)\right]\xrightarrow{L}e^{-\frac{t}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{t}{e^{\varepsilon_0}}\cdot Z$，其中 Z 为标准正态变量。

则对于给定的 t，有：

$$\sqrt{r_i}\left(\hat{R}_i(t)-R_i(t)\right)\xrightarrow{L}$$

$$N\left(0,\frac{t^2}{\theta_{i0}^2}e^{-\frac{2t}{\theta_{i0}}}\sum_{j=1}^{k_i}\left(\left(\frac{1}{k_i}+\frac{\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)\left(x_0-\bar{x}_i\right)}{l_{x_ix_i}}\right)^2\lambda_{ij}^2\right)\right)$$

$i=1,2,\cdots,m$

3.2. 系统可靠度的估计及性质

为了得到系统的可靠度的估计，将文献[9]的定理以下面引理形式给出。

引理 3[9] 设独立子系统 S_i 的寿命分布函数为 $F_i(t)$，记 $R_i(t)=1-F_i(t)$，$i=1,2,\cdots m$。系统 S 的最小路径矩阵为 $A_{m\times k}$，寿命分布函数为 $F_{1,A}(t)$，可靠度函数为：

$$R_{1,A}(t)=1-F_{1,A}(t)$$

记 $C=\begin{pmatrix}1^T\\A\end{pmatrix}=\left(c_1,c_2,\cdots,c_k\right)$ 这里 $1^T=(1,1,\cdots,1)$，$\tilde{C}_j$ 为 $(m+1)\times\begin{pmatrix}k\\j\end{pmatrix}$ 阶矩阵，则有

$$R_{1,A}(t)=-\sum_{j=1}^{k}\tilde{R}^{\tilde{C}_j}(t)\overset{\Delta}{=}\Psi_{1,A}\left(\tilde{R}(t)\right)$$

其中 $\tilde{R}(t)=\left(-1,R_1(t),R_2(t),\cdots,R_m(t)\right)^T$。

由式(1)及引理3自然可得到系统可靠度的极大似然估计为

$$\hat{R}_{1,A}(t)=-\sum_{j=1}^{k}\hat{\tilde{R}}^{\tilde{C}_j}(t)\overset{\Delta}{=}\Psi_{1,A}\left(\hat{\tilde{R}}(t)\right)\qquad(2)$$

其中 $\hat{\tilde{R}}(t)=\left(-1,\hat{R}_1(t),\hat{R}_2(t),\cdots,\hat{R}_m(t)\right)^T$，

$\hat{R}_i(t)=e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_{i0}}}$，$i=1,2,\cdots m$，$\hat{\theta}_{i0}=e^{\bar{y}_i+\frac{x_0-\bar{x}_i}{l_{x_ix_i}}\cdot l_{x_iy_i}}$。

由式(2)及引理2可以计算出系统可靠度估计的渐近分布，本文以下面定理的形式给出。

定理 1 设复杂系统由相互独立的子系统 S_i，$i=1,2,\cdots,m$ 组成，系统的最小路径矩阵是 $A_{m\times k}$，系统可靠度估计

$$\hat{R}_{1,A}(t)=-\sum_{j=1}^{k}\hat{\tilde{R}}^{\tilde{C}_j}(t)\overset{\Delta}{=}\Psi_{1,A}\left(\hat{\tilde{R}}(t)\right)$$

具有渐近正态性，即：

$$\sqrt{r}\left(\Psi_{1,A}\left(\hat{R}(t)\right)-\Psi_{1,A}\left(R(t)\right)\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\sigma^2(t)\right)$$

其中：记 $r=\min\limits_{1\le i\le m}r_i$，设 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r_i}{r}=a_i^2$

令 $u^T=\left(\frac{\partial\Psi_{1,A}}{\partial R_1},\frac{\partial\Psi_{1,A}}{\partial R_2},\cdots,\frac{\partial\Psi_{1,A}}{\partial R_m}\right)$

$$\sum=\mathrm{diag}\left(a_1^2\cdot\frac{t^2}{\theta_{10}^2}\cdot e^{-\frac{2t}{\theta_{10}}}\cdot\sigma_{10}^2,\cdots,a_m^2\cdot\frac{t^2}{\theta_{m0}^2}\cdot e^{-\frac{2t}{\theta_{m0}}}\cdot\sigma_{m0}^2\right)$$

则 $\sigma^2(t)=u^T\sum u$ 是 $R(t)$ 的函数。

证明：由引理 2 知，对于给定的 t，有：

$$\sqrt{r_i}\left(\hat{R}_i(t)-R_i(t)\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\frac{t^2}{\theta_{i0}^2}\cdot e^{-\frac{2t}{\theta_{i0}}}\cdot\sigma_{i0}^2\right),$$

$i=1,2,\cdots,m$

由独立性有：

$$\sqrt{r}\left[\hat{R}(t)-R(t)\right]\xrightarrow{L}N(0,\Sigma)$$

其中：

$$\hat{R}(t)=\left(\hat{R}_1(t),\hat{R}_2(t),\cdots,\hat{R}_m(t)\right)^T$$

$$R(t)=\left(R_1(t),R_2(t),\cdots,R_m(t)\right)^T$$

因为 $\Psi_{1,A}\left(R(t)\right)$ 为 $R(t)$ 的函数，有一阶全微分，那么有：

$$\sqrt{r}\left(\Psi_{1,A}\left(\hat{R}(t)\right)-\Psi_{1,A}\left(R(t)\right)\right)\xrightarrow{L}N\left(0,\sigma^2(t)\right)$$

$$\sigma^2(t)=u^T\sum u$$

定理证明完毕。

4. 结论

以前的结论多数都是以元件为研究对象，而对系统的研究很少但却很重要。通常构成系统的元件往往也具有高可靠性，在加速寿命试验下，获得元件的结尾样本数据也是常用的办法之一。本文通过在恒加试验下获得的元件寿命截尾样本，给出了复杂系统可靠度的估计及性质。这为恒加试验下系统可靠性统计分析，如可靠度置信区间，MTTF 估计及性质等的研究提供了一个有效的工具。

5. 致谢

本人对书写论文过程中给予指导和帮助的老师

及同学表示衷心的感谢，同时感谢提供参考文献的各位作者。

参考文献 (References)

[1] A. P. Basu, N. Ebrahimi. Nonparametric accelerated life testing. IEEE Transactions on Reliability, 1982, 31(5): 432-435.

[2] N. Balakrishnan. On the maximum estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply type II censored samples. Journal of Applied Statistics, 1990, 17(1): 55-61.

[3] 张志华, 罗旭. 指数分布场合下恒加试验的广义线性模型及其 MLE[J]. 数理统计与应用概率, 1996, 11(2): 143-149.

[4] W. D. Wang, B. Dimitri. Fitting the weibull log-linear model to accelerated life-test data. IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(2): 217-223.

[5] 王乃生, 王玲玲. 恒定应力加速寿命试验数据缺失时的统计分析[J]. 华东师范大学学报, 2002, 1: 35-44.

[6] A. J. Watkins, A. M. John. On Constant stress accelerated life tests terminated by type-II censoring at one of the stress levels. Journal of Statistical Planning and Inference, 2008, 138(3): 768-786.

[7] S. Voiculescu, M. Barreau, A. Charki, et al. Bayesian estimation in accelerated life testing. International Journal of Product Development, 2009, 7(3): 246-260.

[8] H. Alaa, H. Hamid. Constant-Partially accelerated life tests for burr type-XII distribution with progressive type-II censoring. Computational Statistics and Data Analysis, 2009, 53(7): 2511-2523.

[9] G. Z. Zhang, D. Liu, F. L. Kong and Z. H. Yang. Expression and algorithm implementation of reliability for complex system. Advances in Systems Science and Applications, 2008, 8(3): 421-429.

[10] 张国志, 张伟. 多源点多汇点网络系统可靠度的解析表达式[J]. 数学理论与应用, 2010, 30(3): 47-52.

[11] 张学玲, 张国志, 张伟. 区间型数据下复杂系统可靠度估计及性质的研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(1), 108-112.

[12] 张志华. 加速寿命试验及其统计分析[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 2002, 62-70.

[13] 茆诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 2000, 31-33.

