

R Wave Detection in ECG with Functional Coefficient Nonparametric Statistical Model*

Min Sun, Liyun Su[#], Chenglong Li

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing
Email: [#]cloudhopping@163.com

Received: Nov. 26th, 2013; revised: Dec. 12th, 2013; accepted: Dec. 18th, 2013

Copyright © 2013 Min Sun et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2013 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Min Sun et al. All Copyright © 2013 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: A novel R wave detection method is presented based on functional coefficient nonparametric statistical model. Firstly, digital bandpass filter is used for denoising and filtering of Electrocardiogram (ECG) signal. Then ECG signal is fitted by using functional coefficient nonparametric statistical model and difference threshold. Finally, the derivative of fitting model is applied to detect R wave in ECG with signal processing and threshold. Compared to the old difference method for R wave detector, the nonparametric statistical regression approach is more accurate based on the derivative of each point. Clinical data are used to test the performances. The experimental results show that the proposed method for R wave detection is effective.

Keywords: Electrocardiogram (ECG) Signal; R Wave; Functional Coefficient Nonparametric Statistical Model; Adaptive Method

基于函数系数非参数统计模型的心电 R 波检测*

孙 敏, 苏理云[#], 李晨龙

重庆理工大学数学与统计学院, 重庆
Email: [#]cloudhopping@163.com

收稿日期: 2013 年 11 月 26 日; 修回日期: 2013 年 12 月 12 日; 录用日期: 2013 年 12 月 18 日

摘 要: 本文提出了一种基于函数系数非参数统计模型的 R 波检测方法。在用数字带通滤波器对心电信号进行滤波和去噪以后, 用函数系数非参数回归模型来拟合心电时域数据, 通过差分选取适当的阈值, 并且所选取的阈值具有自适应学习的特性, 可根据不同需求调整阈值的大小, 然后利用模型估计出的一阶导数位置检测出 R 波。和差分阈值的方法相比较, 该方法在检测 R 波的过程中对数据本身就有个很好的平整作用。最后还分别讨论了 R 波的多检和漏检的情况, 并给出了相应的纠正方法以使得检测更加精确。我们利用临床试验数据对该方法进行验证, 实验结果表明, 该方法能够准确高效地检测出心电信号中的 R 波。

关键词: 心电信号; R 波; 函数系数非参数统计模型; 自适应

*资助信息: 重庆理工大学研究生创新基金项目(YCX2012324), 重庆市教委研究生教育教学改革研究项目(Yjg133029), 重庆理工大学研究生教育教学改革研究项目(yjg2012208)。

[#]通讯作者。

1. 引言

由于 QRS 波是心电图 ECG 中变化最明显的部分,是多心肌细胞先后发生的电位变化的综合表现。因此准确检测 QRS 波,不仅为诊断心律失常提供重要的依据,而且在此基础上才有可能计算心律及心律变异性,为进一步检测和分析心电图的其他细节信息奠定基础。于是在心电图 ECG 信号的分析中,首要且关键的是要准确检测出可靠的 QRS 波群。

然而对 QRS 波群的检测也是比较困难的。因为在临床获取的心电信号时,心电信号本身十分微弱,所以在检测时很容易受到仪器,人体等外界干扰,其中肌电干扰,基线漂移,工频干扰以及肌电图的运动伪影是心电信号主要的几种干扰。因此本文在检测之前,需要通过多通带数字滤波器对原始心电信号去除噪声,用差分法对其数据进行平整处理。从而获得较为稳定的信号以便为后期的 R 波检测作准备。

近些年对 QRS 波的检测方法层出不穷,主要有以下几种方法:差分阈值法,小波变化法,滤波器组法,模板匹配法,神经网络法,数学形态方法等。差分阈值法算法^[1-4]原理简单,速度快,可有效抑制低频干扰,易于实现;小波变换法^[5-9]具有良好的时频局域化特性,对时变信号有很高的适应性,但计算繁琐,花费时间长,不利于适时处理;滤波器组^[10-12]的原理是基于小波变换,但它的实现比小波变换更加灵活,速度快,准确性高;模板匹配法^[13,14]抗干扰性强,但计算时间长;神经网络法适应性强,判别效果好,但训练消耗的时间长;数学形态学方法^[14,15]无须检测出 QRS 波,利用一系列形态学运算,就能直接去除 QRS 波群,检出 P 波和 T 波的起止点,完成定量分离,该算法计算简单。以上方法各有优缺点,都有自己的适应范围。而自适应差分阈值法算法简单,易于实现,所以本文在选取阈值时仍然采用差分阈值法,对阈值的计算采用自学习策略。在检测 R 波时,提出了使用函数系数非参数回归模型估计的方法^[16-21]来精确定位 R 波的位置,最后用麻省理工学院 MIT-BIH 心电数据库和临床测得的数据进行了检测,实验结果表明,该方法简单,易于实现,准确率较高的特点。

2. 基于非参数统计模型的 R 波检测算法

对预处理过的数据,我们使用函数系数非参数回

归方法拟合这些数据并求出其一阶导数的值,发现这些导数值的变化比较大,与波形陡峭的 R 波存在固定的位置关系,通过我们设定的 3 个初始阈值,对导数值进行筛选,然后通过自适应学习调整阈值的大小,在每个周期上满足阈值条件的导数值就能基本确定 R 波的位置。最后设定不同的 RR 间期,讨论多检和漏检的情况并进行纠正,以此提高 R 波检测准确率。

2.1. 数据预处理及心电信号去噪

由于心电信号是人体生理信号,及其微弱,信噪比小,在获取时常受到人体,仪器等外界的影响,所检测到的信号伴有干扰如肌电干扰,基线漂移,工频干扰等。因此,我们在对检测心电数字信号前,要首先对其数据预处理并且进行信号滤波。分以下几步来完成:

1) 去除数据前面多余零点的处理,最前面一连串的零点是无意义的,我们利用一个门限(1×10^{-4})来判定,从第一个绝对值大于这个门限的点开始计,后面的数据作为待处理的信号数据。

2) 数据正反的判断,首先把信号幅度扩大 100 倍(便于检测,也可不进行扩大),取前两秒的信号数据找出其中最大差分的位置,此最大差分前后必有一 QRS 波群存在,在以这一点为原点前后 $[-fs/8 \ fs/8]$ (其中 fs 为采样率)的区间内找最大值 pre_max 、最小值 pre_min 和利用对这一区间的值排序取其中值 pre_md ,根据最大、最小值与中值之间的距离判断信号数据的正反,对信号进行调整。

3) 在心电信号的获取,放大及变换过程中,会引起各种干扰。主要是 50 HZ 的工频干扰和基线漂移,我们选用多通带数字滤波对经过 A/D 转换后的心电信号进行滤波和平整。滤波器是用矩形窗设计的 280 阶 FIR 数字滤波器,根据抽样率的不同,我们选择的通带也稍有变化,当抽样频率 $fs = 5000$ 时,通带 $W = [5.5 \ 40 \ 60 \ 90 \ 110 \ 140 \ 160 \ 190]/fs \times 2$;其它 fs 稍小的情况 $W = [5.5 \ 48 \ 52 \ 98 \ 102 \ 148 \ 152 \ 198]/fs \times 2$;经验证这种多通带矩形窗可以滤除大部分的 50 HZ 及其多个谐波工频干扰和大部分的基线漂移。

为了更为清晰地看到我们预处理的效果,下面给出三种典型情况,第一情况见图 1,具有明显的基线漂移,经过本文所述方法完全得到了修正。第二种情

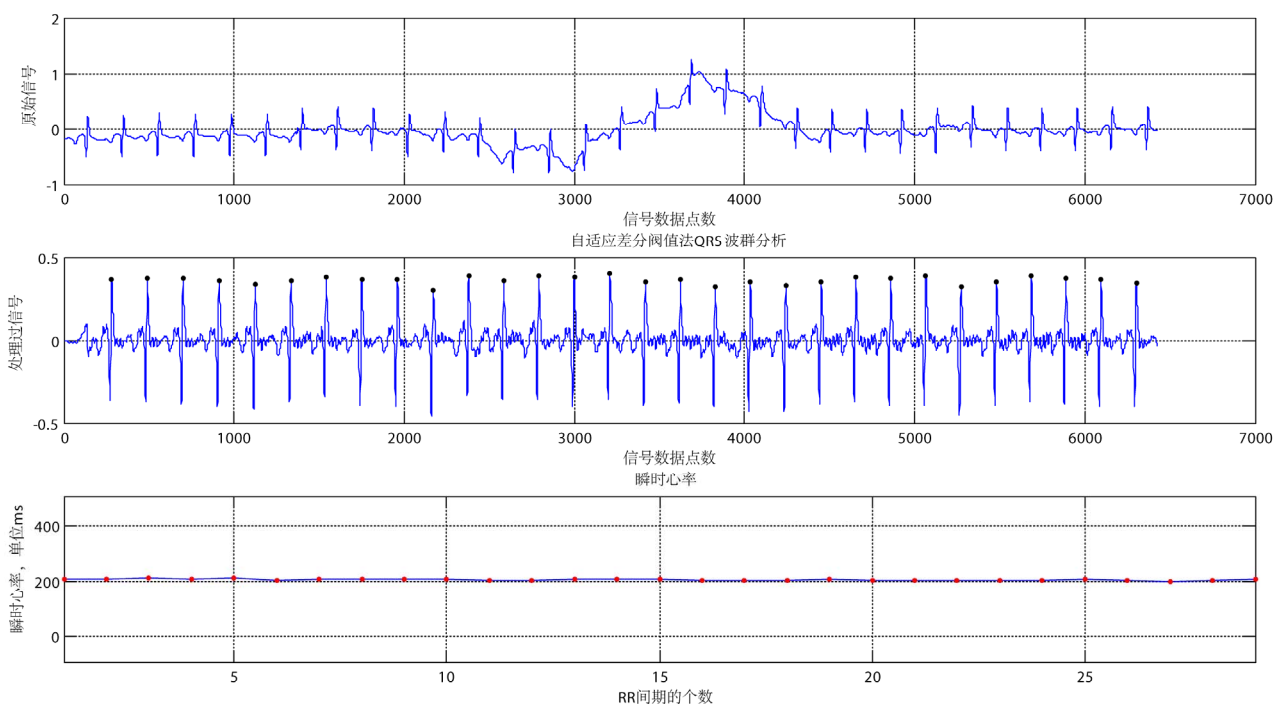


Figure 1. Results of baseline drift processing
图 1. 基线漂移处理结果

况是心电信号受到肌电干扰，从图 2 可以看出肌电干扰基本消除，有利于更好地检测 R 波。第三种情况是工频干扰的影响，处理结果见图 3。从图 3 基本可以判断，我们的方法可以消除工频干扰。

为了更好地评价本文提出非参数回归方法，可以借助一阶导数来检测 R 波，下面从一个实际心电信号进行建模与分析。原始心电信号图见图 4。

我们所选取的原始心电图是心律比较稳定的，即所受干扰较小，我们可以通过多通带滤波器就能比较容易的滤波和去噪。

2.2. 确定阈值及 RR 间期

对去噪后的心电信号，取前 500 个样本等分，样本量太少会导致我们所要检测周期内的 R 波峰太少甚至没有。综合考虑最合适数据量就是划分的每个周期为 500 个样本点。然后令 $T = \text{round}(1.1 * RR)$ ，根据确定的 T 求出前五个 T 中的差分最大值去掉一个最大值，去掉一个最小值，然后对剩下的值取算术平均得到要用到的设定阈值基准 Δ_{m0} ，由 Δ_{m0} 设定三个常数 $C1 = 180 * \Delta_{m0}$, $C2 = 150 * \Delta_{m0} + \frac{1}{10} * \Delta_{m0}$, $C3 = 160 * \Delta_{m0}$ ，利用初始基准确定的

$\sigma_0 = [335 * \Delta_{m0} + 200 * \Delta_{m0}, 180 * \Delta_{m0}, 347 * \Delta_{m0}]$ 即为所需要的阈值。在后面的自适应阶段，就根据 3 个周期来调整阈值的大小。而要求出基准 R 波幅值 HR 和基准 R 波间期 RR；首先取前 12 s 的信号进行预处理，找到最大差分。然后以最大差分值的 0.65 倍为门限，初步得到一个大大的 R-R 间期设定为 h 。然后分阶段求出最大差分和幅度最大值以及其对应的位置，据此得到 RR 间距，和 HR。

2.3. 函数系数非参数统计模型及其在 R 波检测中的应用

1) 函数系数非参数回归方法

我们把处理过的数据按每 500 个等分为一个周期，在每个周期上我们对所有数据点 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 使用函数系数非参数回归模型来进行拟合。我们建模为下式：

$$x_i = m(x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-p}) + \varepsilon \quad (1)$$

这里 $E(\varepsilon) = 0, \text{Var}(\varepsilon) = 1$ ，并且 X 和 ε 是相互独立的。另 $y_i = x_i, X_{i-1} = (x_{i-1}, \dots, x_{i-p})$ ，而 $m(X)$ 就是我们要估计的回归函数，对任意点 x_0 ， $m(x_0) = E(x_i | X_{i-1} = x_0)$ ，在这里我们需要的是估计出其

基于函数系数非参数统计模型的心电 R 波检测

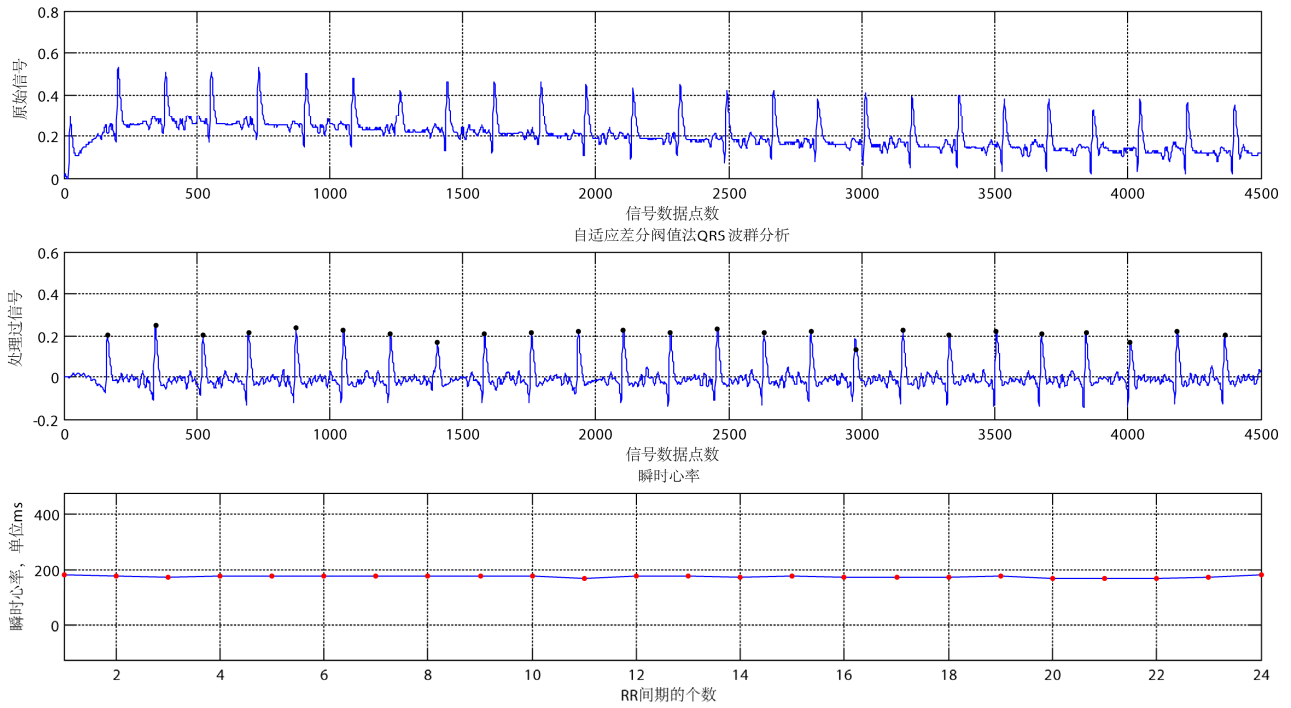


Figure 2. Results of EMG interference processing
图 2. 肌电干扰处理结果

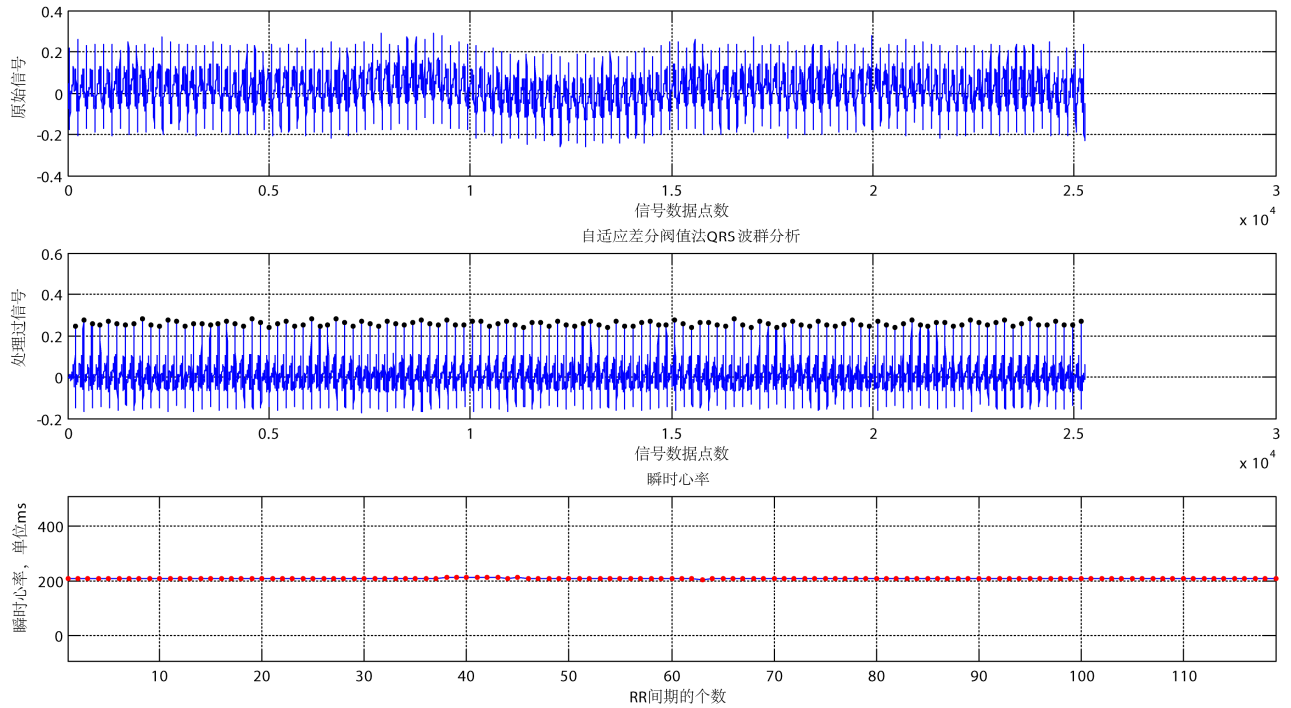


Figure 3. Results of power line interference processing
图 3. 工频干扰处理结果

阶导数 $\hat{m}^l(x_0)$ 。用所划分周期内的数据采用局部多项式回归拟合的模型就是极小化:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ y_n - \sum_{j=0}^p \beta_j (x_i - x_n)^j \right\}^2 K_h(x_i - x_n) \quad (2)$$

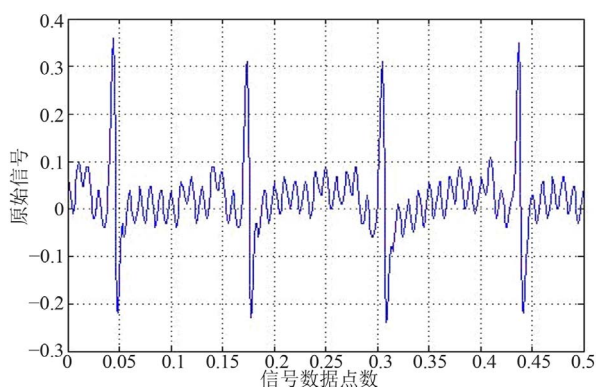


Figure 4. Original ECG signal
图 4. 原始心电信号图

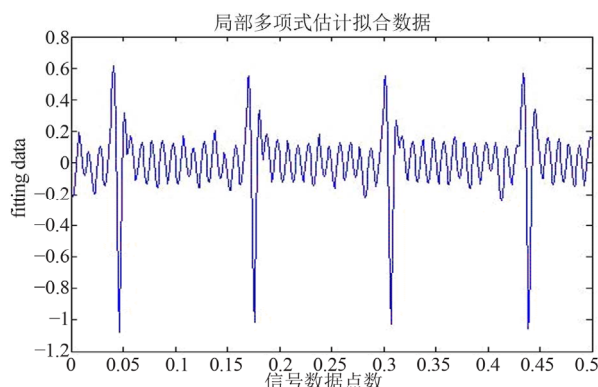


Figure 5. Fitting plot with proposed method
图 5. 用本文方法拟合的数据图

其中, p 是模型的阶数, h 控制局部领域大小的带宽, $K_h(\bullet)$ 是核函数。

在本文中, 经过多次实验选取的带宽 h 为 0.005,

$$\text{核函数为 } \left\{ \max \left(1 - \left| \frac{X-x}{h} \right|^3, 0 \right) \right\}^3$$

用矩阵记号, 则加权最小二乘问题可记为

$$\min_{\beta} (y - X\beta)^T W (y - X\beta) \quad (3)$$

其中 $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)^T$, W 是对角阵, 它的第 i 个元素是 $K_h(x_i - x_n)$, 解向量为:

$$\hat{\beta} = (X^T W X)^{-1} X^T W y$$

其中 $\hat{m}(x) = \hat{m}^0(x) = \hat{\beta}_0$, $\hat{m}^1(x) = \hat{\beta}_1$, 这就是我们所需要的估计值。

在这里我们用局部多项式拟合的数据是 500 个。和原始数据是一样多的, 这样估计出来的是其一阶导数的值, 与之前的原始信号相比较, 其位置关系就显而易见了。一阶导数的极大值与极小值之间就必然存在一个 R 波峰。据此就可以选取适当的阈值来限定一阶导数值的范围, 从而大致确定 R 波的位置。

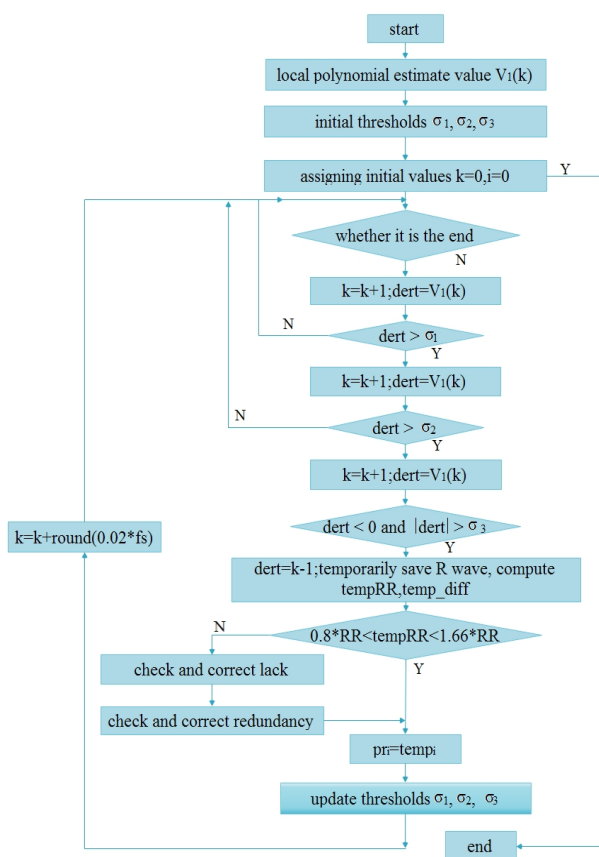
2) R 波检测

我们令 $V_1 = \hat{m}^1(x)$, 则所选取的阈值 σ_0 , 在每个周期上的任意三个估计值是 $V_1(k)$, $V_1(k+1)$, $V_1(k+2)$, 如果有

$$\begin{aligned} V_1(k) &> \sigma_{01}; \\ V_1(k+1) &> \sigma_{02}; \\ V_1(k+2) &< 0 \text{ 且 } |V_1(k+2)| > \sigma_{03}; \end{aligned} \quad (4)$$

则我们就确定 $V_1(K+1)$ 是一个 R 波(图 5)。

以下是一个大体的 R 波检测流程图:



2.4. 对检测到的 R 波进行检查并修正

在检测到一个 R 波时, 首先要判断其是否为一个真正的 QRS 波。看当前的 RR 间隔是否大于 $0.8*RR$, 以此判断是否多检; 然后判断 RR 是否大于 $3.1*RR$ 以此判断是否可能漏检。倘若可能出现多检或漏检的情况, 就要对当前所检测到的样本段的前一段样本再

检测一次。并且对其幅度放大以便进行 R 波的检测。然而进行了这样的处理之后仍然可能包含有多检或漏检的判断。那么就需要进一步判断 RR 是否在 $1.66*RR$ 和 $2.5*RR$ 之间。如果在这个区间里,就说明很有可能漏检了一个 R 波,我们的处理办法就是:在 $[0.7*RR \ 1.2*RR]$ 内是否有幅度在 $[0.5*HR \ 1.5*HR]$ 的信号部分。如果有就认为这里漏检了一个 R 波,将其补进 R 波位置的序列中;若没有再看一下是否有倒 R 波存在,若有则补进序列。如果当检测程序运行到数据末尾发现最后一个 R 波的位置离数据末尾距离大于 $1.66*RR$,则对信号最后部分进行再检测。算法流程见图 6。同时对可能多检的 R 波,就进一步判断 RR 是否小于 $1.6*RR$,如果在这个范围里,就存在多检的情况,就把多检出的 R 波剔除,然后再对这一个周期检测一遍,直到全部 R 波都准确检测出来(图 6 和图 7)。

上述算法可总结为以下几个步骤:

- 第一步:利用给定门限来去数据前面多余零点,然后找到差分最大值和最小值来判断数据的正反。
- 第二步:选用多通带数字滤波对经过 A/D 转换后的心电信号进行滤波和平整。
- 第三步:使用差分法算出自适应阈值的大小并且利用差分最大值求得 RR 间期。
- 第四步:使用局部多项式估计拟合处理过的数据,求出其一阶导数的值。
- 第五步:利用第四步求得的一阶导数的值,结合自适应学习调整的阈值,大致检测出 R 波的位置。
- 第六步:通过设定不同的 RR 间期,讨论是否存在

在多检和漏检的情况并进行纠正。

3. 实验结果与讨论

3.1. 可行性检验

我们选取任意的信号使用该算法来检测,这里我们还是选取 500 个数据点,处理之后,按照上述的步骤检测出了 R 波,以下是其中两个结果图(图 8)。

图中*表示所检测到的 R 波位置。我们选取一个周期的数据点是 500 个,局部多项式的阶数 $p=2$,带宽 $h=0.005$ 。由此可见,这个算法对处理以后比较规律的心电信号是可行的。而对于受干扰严重或心率变异的信号情况会比较复杂,这时该算法就有待于进一步的改进。

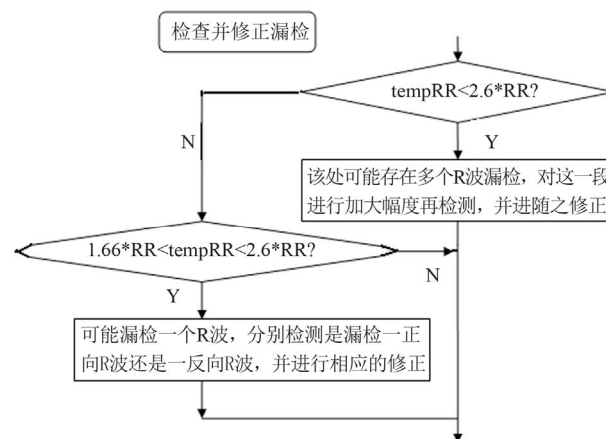


Figure 7. Flow graph of missing R wave detection
图 7. 漏检 R 波的检测流程图

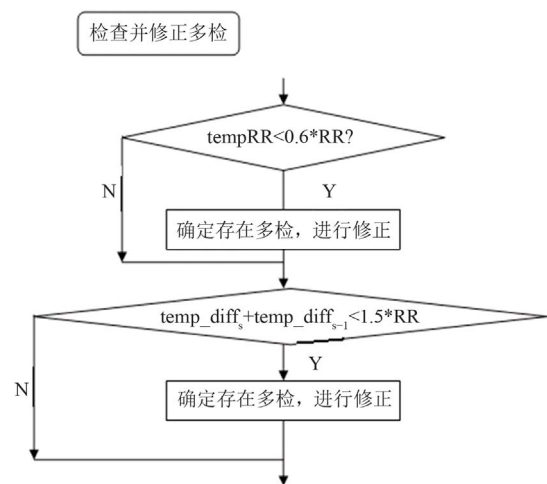


Figure 6. Modified flow graph of multiple R wave detection
图 6. 多检 R 波的修正流程图

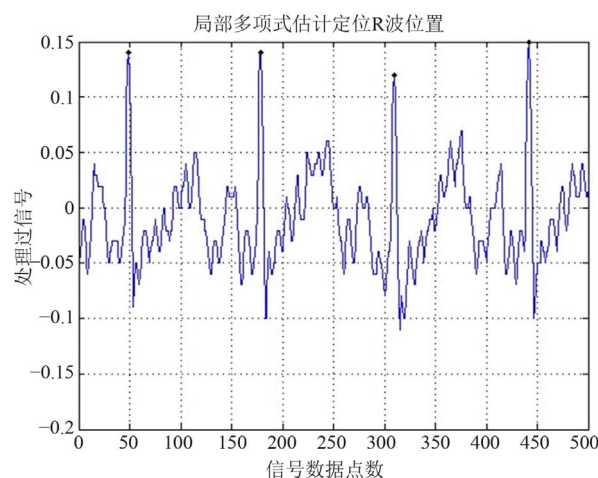


Figure 8. Results of R wave detection
图 8. R 波检测可行性实验结果

3.2. 使用局部多项式拟合后的数据

在我们建模求估计值的过程中，由于我们的目的是求估计值的一阶导数，于是所选择的模型阶数 p 是 2，而两外两个参数对模型的影响较大，一个是带宽 h 的大小，另一个是核函数的选择。这里我们确定的带宽 h 为 0.005，是因为心电信号数据值小，而我们对一个周期内的所有观测值都进行估计，观测值之间相差 0.001，如果带宽小于 0.005，那一次估计所包含的观测值太少，导致拟合不足，容易获得受干扰的估计。对于比 0.005 再大的带宽，则一次估计所包含的观测值太多，会引起过渡平滑，产生过大的建模偏倚。而在选择核函数的时候，对已经使用的阶数 p ，不同核函数具有几乎相同的有效性，于是我们选择了一个比较适中的核函数

$$K_h\left(\frac{X-x}{h}\right) = \left\{ \max\left(1 - \left|\frac{X-x}{h}\right|^3, 0\right)\right\}^3 \quad (5)$$

3.3. R 波的检测

我们是利用 matlab 软件来实现该算法的，多次实验选取最佳的样本数量是一个周期 500 个数据。在这样一个周期内实现一次 R 波的检测。在用非参数估计来拟合原始数据时，我们拟合的数据就是原始的一个周期的全部数据量，这样就能更准确地用其一阶导数来定位 R 波。而后面面对 R 波的修正，借助于自适应学习的阈值来调整其大小，以顺利完成对 R 波的多检和漏检的情况。实验证明，本算法在实时检测 R 波的过程，用局部多项式估计拟合原始数据时，本身也对原始数据有一个平整的作用，这样相比较以往的差分阈值法，就更加准确而稳定的检测 R 波。以下是我们用函数系数非参数回归模型来检测 R 波的部分实验结果图以及所对应的瞬时心率图(图 9 和图 10)。

图 9 中的黑色圆点就表示所检测的 R 波峰位置，由于我们检测的 QRS 波群是比较稳定的正常心率，加上使用局部多项式估计拟合的数据来检测，所以检测到的瞬时心率几乎在一条直线上，表示就很平稳。并且从图中也能看出，该算法检测准确性也比较高。

3.4. 与差分阈值法做比较

我们通过实验对该算法和差分阈值法来检测 R 波

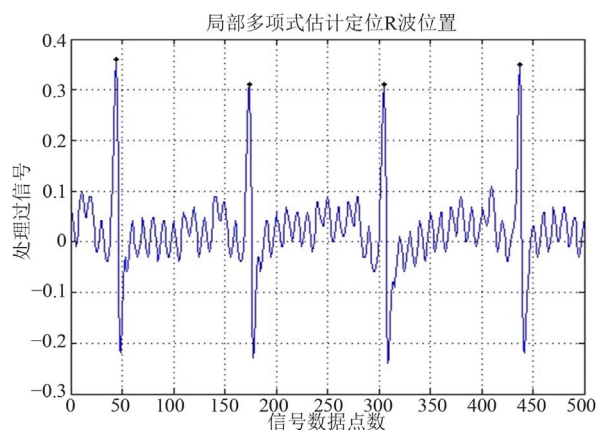


Figure 9. Results with presented nonparametric method
图 9. 使用局部多项式估计定位 R 波的实验结果

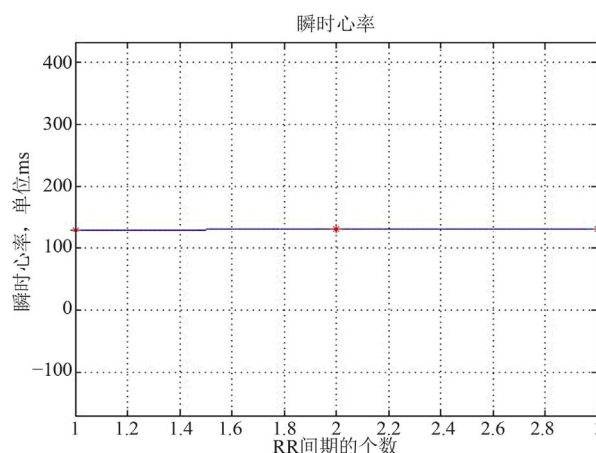


Figure 10. Heart rate of Figure 7
图 10. 与图 7 所对应周期内检测到的瞬时心率

做比较，主要的区别在于对初始数据的预处理上。差分阈值法是直接通过差分计算得到的心电波形幅度相对于时间的变化率和设定的阈值进行比较，满足阈值条件的就认为是一个 R 波。以下就是我们所做的一个这两种方法的比较图。

从图 11 中可以看出在预处理后的信号幅度上，运用局部多项式估计所拟合出的效果比用差分法得到的信号幅度要平滑很多，第一种方法得到的信号数据更好地保持了原始信号的变化情况，尤其在一些拐点处的波动变化比差分法的效果更加精确。这样在后面使用自适应阈值检测 R 波的过程中，使用局部多项式拟合的数据就更便于检测到 R 波。

3.5. R 波多检和漏检的讨论

当我们检测到 R 波以后，多检和漏检是必须要进

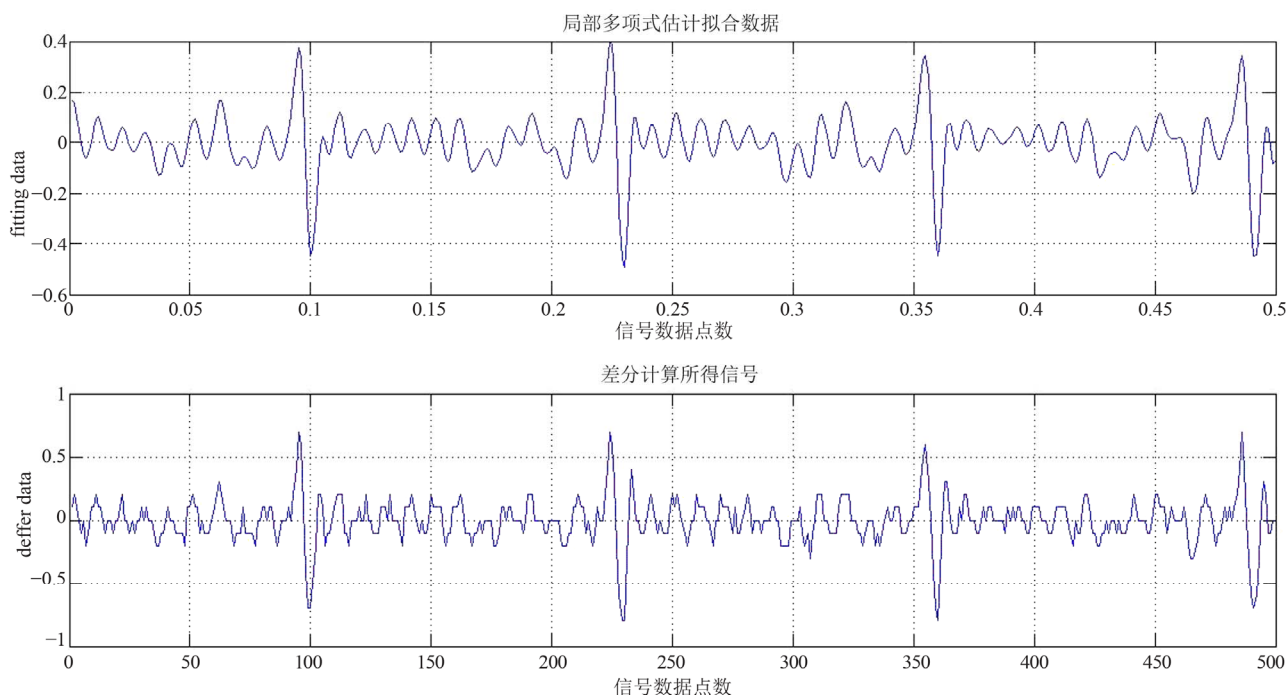


Figure 11. Results comparison of two methods
图 11. 非参数回归拟合与差分法的实验效果比较

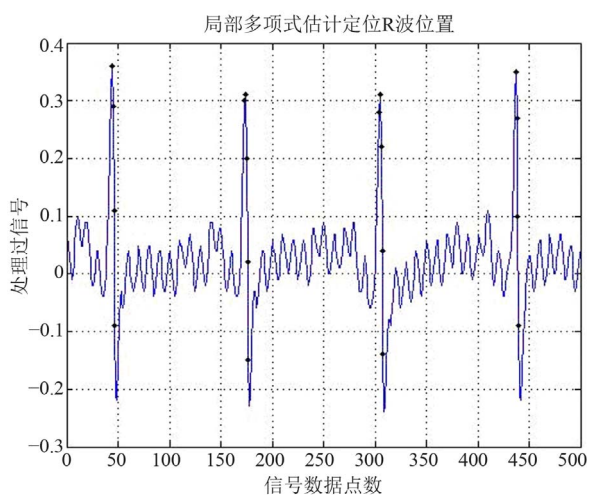


Figure 12. R wave of multiple detection
图 12. 多检检测的 R 波图

行讨论的。原因是我们在使用自适应更新阈值的过程中，所求得的阈值并不能够满足所有的 R 波峰值的范围，还有可能一些伪 R 波峰值的点也被错误地判定在阈值条件而被检测出来。这样我们所检测出的 R 波就不够精确，因此通过多检和漏检并进行纠正，提高了检测的准确性。以下是没有使用多检的图与使用之后的图。

从图 12 和图 13 的对比中我们发现没有进行 R 波

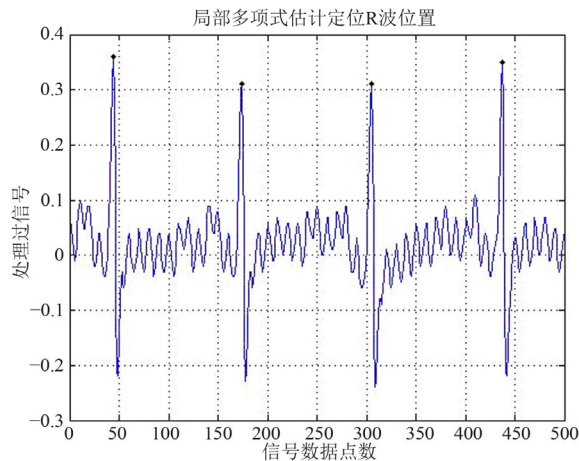


Figure 13. R wave of improved multiple detection
图 13. 多检并修复之后检测的 R 波图

多检的时候，仅凭阈值的大小来限定范围是远远不够的，很容易造成误检，而进行了多检之后，我们就发现了很多被多检测出的伪 R 波峰点，于是通过设定不同的 RR 间期，去除这些多余的点，准确性被大大提高了。

4. 结论

本文所提出了一种基于函数系数非参数回归方法，该方法可充分拟合局部信息，同时可提取每个位

置一阶导数信息,可更为精确定位每个位置的波动变化程度,从而比差分法更为精确和有效。同时文中也对心电信号的预处理、多检和漏检进行了分析,并结合自适应非参数统计方法,构建整体 R 波检测算法,为下一步进行心率变异分析奠定了基础。实验证明该算法中函数系数非参数回归估计拟合原始数据能够对原始数据进行平整,更加准确地反应出原始信号的幅度变化,同时能够实时准确地检测出 R 波,临床数据验证表明该算法能够有效地检测 R 波。

参考文献 (References)

- [1] 苏丽, 赵国良, 李东明 (2005) 心电信号 QRS 波群检测算法研究. *哈尔滨工程大学学报*, **4**, 513-517.
- [2] 张胜, 吴仲光, 李征 (2008) 一种自适应 R 波检测算法实现. *四川大学学报(自然科学版)*, **3**, 498-502.
- [3] Friesen, G.M., Jannett, T.C., Jadallah, M.A., Yates, S.L., Quint, S.R. and Nagle, H.T. (1990) A comparison of the noises sensitivity of nine QRS detection algorithms. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **37**, 85-98.
- [4] 苏理云, 孔彤, 唐华, 李姣军, 陈兵 (2010) 淹没在分形噪声中的心电信号 R 波检测. *重庆理工大学学报(自然科学)*, **4**, 86-89.
- [5] Saxena, S.C., Kumar, V. and Hamde, S.T. (2002) QRS detection using new wavelets. *Journal of Medical Engineering and Technology*, **26**, 7-15.
- [6] Legarreta, I.R. and Addison, P.S., et al. (2003) R-wave detection using continuous wavelet modulus maxima. *Computers in Cardiology*, **30**, 565-568.
- [7] Talbi, M., Aouinet, A., Salhi, L. and Cherif, A. (2011) New method of R-wave detection by continuous wavelet transform. *Signal Processing: An International Journal (SPIJ)*, **5**, 165-173.
- [8] Cui, W.L. (1995) Detection of ECG characteristic points using wavelet transforms. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, **42**, 21-28.
- [9] Mallat, S. (1989) A theory of multiresolution signals decomposition: The wavelet transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, **11**, 674-693.
- [10] Afonso, V.X, Tompkins, W.J., Nguyen, T.Q. and Luo, S. (1999) ECG beat detection using filter banks. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **46**, 192-202.
- [11] Chen, H.C. and Chen, S.W. (2003) A moving average based filtering system with its application to real-time QRS detection. *Computers in Cardiology*, **30**, 585-588.
- [12] 李小燕, 王涛, 冯焕清, 詹长安 (2000) 基于小波变换的自适应滤波器消除 ECG 中基线漂移. *中国科学技术大学学报*, **4**, 450-454.
- [13] Szilagyi, S.M, Szilagyi, L. and David, L. (1997) Comparison between neural network based adaptive filtering and wavelet transform for ECG characteristic points detection. *Engineering in medicine and biology society. Proceedings of the 19th Annual International Conference of the IEEE*, **6**, 272-2274.
- [14] Chen, X.M., Lin, J.S. and Zhang, Z.G. (1999) An improved template matching method for high resolution ECG. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, **18**, 89-96.
- [15] 田絮资, 杨建, 黄力宇 (2012) 心电信号去噪的数学形态学滤波器. *计算机工程与应用*, **2**, 124-126.
- [16] Trahanias, P.E. (1993) An approach to QRS complex detection using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **40**, 201-205.
- [17] Fan, J.Q. and Qi, W.Y. (2003) Nonlinear time series: Nonparametric and parametric methods. *Springer Series in Statistics*. Springer, Berlin.
- [18] Su, L.Y. (2010) Prediction of multivariate chaotic time series with local polynomial fitting. *Computers Mathematics with Applications*, **59**, 737-744.
- [19] Su, L.Y., Zhao, Y.Y., Yan, T.S. and Li, F.L. (2012) Local polynomial estimation of heteroscedasticity in a multivariate linear regression model and its applications in economics. *Plos One*, **7**, e43719.
- [20] Su, L.Y. (2010) Prediction of multivariate chaotic time series with local polynomial fitting. *Journal Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 737-744.
- [21] Su, L.Y. (2011) Multivariate local polynomial regression with application to Shenzhen component index. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2011**, 930958.