Statistical and Application 统计学与应用, **2014, 3, 127-132**
Published Online December 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2014.34017

A Monte Carlo Simulation Method to Calculate the Value at Risk of Insurance Contract

Xingqi Li[1], Hanquan Wang[1], Tong Zhang[2], Xiao Hu[1]

[1]School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming
[2]Research Department, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming
Email: 1835041693@qq.com

Received: Sep. 4th, 2014; revised: Oct. 2nd, 2014; accepted: Oct. 11th, 2014

Abstract

With the improvement of living standard, people's consciousness in buying insurance goes stronger and business in China's insurance industry have developed further in recent years. When an insurance company introduces a new insurance plan, it needs to estimate the biggest loss that it will face with in future, so that the insurance company can keep enough fund to deal with the unpredictable risk. In this paper, we use the value at risk Monte Carlo simulation method to estimate the risk for the insurance company, in order to accurately show situation of the risk that the insurance company faces with. At the same time, it is helpful for the supervising organ to establish proper supervision measures, so as to protect the insurers' rights and interests, and maintain stability of financial market.

Keywords

Insurance Plan, Risk, Value at Risk, Monte Carlo Simulation Method

保险合同在险价值的一种蒙特卡洛模拟算法

李兴奇[1]，王汉权[1]，张 烔[2]，胡晓[1]

[1]云南财经大学，统计与数学学院，昆明
[2]云南财经大学，科研处，昆明
Email: 1835041693@qq.com

收稿日期：2014年9月14日；修回日期：2014年10月2日；录用日期：2014年10月11日

摘　要

近年，随着生活水平的提高，人们购买保险的意识不断增强，中国的保险行业得到进一步发展。保险公司在推出新的保险计划时，往往要在保险售出之前，估计保险公司在未来一段时间内可能承担的最大损失，以确保保险公司留有充足的资金来应对未来难以预见的风险。本文利用在险价值的蒙特卡洛模拟算法为保险公司估计风险，使其能准确呈现保险公司所面临风险的状况，同时利于监督机关建立适当的监督措施，来保障保险人的权益并维持金融市场的稳定。

关键词

保险计划，风险，在险价值，蒙特卡洛模拟算法

1. 保险合同简介

随着经济的发展和生活水平的提高，人们的投保意识不断增强，愿意投入确定的保险费来弥补未来可能出现的不确定损失。保险合同是投保人与保险人约定保险权利义务的一种协议，保险合同规定，收取保险费是保险人的基本权利，赔偿或给付保险金是保险人的基本义务；与此相对应，交付保险费是投保人的基本义务，请求赔偿或给付保险金是被保险人的基本权利。一份完整的保险合同中应包括投保人的姓名与住址、保险的标、保险风险、保险的价值与保险金额、保险费和保险费率、保险赔偿款或保险金的给付、保险期限、违约责任与争议处理、以及保险合同当事人双方的权利和义务等基本内容。保险合同存在一定的风险，称之为保险风险，是指保险人对投保人承担损失赔偿责任或保险金给付的风险因素[1]。

充分了解保险风险对于保险机构及其监督管理部门非常重要。保险机构是经营风险的企业，必须随时准备应付各种灾害事故的发生，故要求保险机构拥有足够的资金积累和起码的偿付能力。这不仅是保护被保险人利益的需求，也是保险企业自身稳定经营的需要。因此各国政府把保险企业的偿付能力均作为监管的主要目标。我国《保险法》规定：“保险公司应当具有与其业务规模相适应的最低偿付能力。保险公司的实际资产减去实际负债的差额不得低于金融监督管理部门规定的数额，低于规定数额的，应当增加资本金，补足差额”[1]。只有正确的估计保险风险，才能预测保险机构在未来时间内可能出现的损失，以确保保险机构具有最低偿付能力。目前，只有较少的作者利用蒙特卡洛方法研究保险合同的风险。据我们所知，只有文献[2]介绍了寿险公司所面临的各种风险，以及蒙特卡洛方法在保险行业中的应用。本文基于在险价值来估计保险公司所面临的风险，并利用蒙特卡洛模拟算法来计算具体保险合同的在险价值。

2. 在险价值(Value-At-Risk, VAR)的蒙特卡洛算法简介

VAR 是指在正常的市场条件和给定的置信水平下，金融资产在未来持有期内可能遭受的预期最大损失。VAR 常用的数学定义：假设随机变量 X 的分布函数为 $\mathrm{F}(x)$，$\mathrm{F}(x)=P\{X\le x\}$。对于随机变量 X，在给定置信水平 α 下，规定 $\mathrm{Q}_\alpha(x)=\inf\{x|\mathrm{F}(x)\ge\alpha\}$，其中 $0\le\alpha\le1$，$\mathrm{Q}_\alpha(x)$ 称为随机变量 X 的 VAR 值。该方法建立在可靠的科学基础上，为人们提供一种关于市场风险的综合性度量，即给出一个 VAR 值[3]。历史数据法和蒙特卡洛模拟法为目前较成熟的 VAR 计算方法[4] [5]。本文只研究随机模拟法，即蒙特卡

洛模拟法。

蒙特卡洛模拟法，是二十世纪四十年代中期随着科学技术的发展和电子计算机的发明而被提出的，是一种以概率统计理论为指导的数值计算方法。它的基本思想是：当所求解问题是某种随机事件出现的概率，或是某个随机变量(或函数)的期望值时，通过模拟试验的方法，用该事件出现的频率来估计这一随机事件的概率，得到这个随机变量的某些数字特征，并将其作为问题的解。蒙特卡洛模拟方法的计算过程是：首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于所求问题的解；然后通过观察概率模型或随机过程并计算参数的统计特征值；最后给出所求问题的近似解。与一般数学方法不同，处理概率问题的经典数学方法常常是把概率问题转换成某个确定的问题求解，而蒙特卡洛方法与这种经典处理方法相反。它把确定性问题与某个概率模型相联系，把大量的随机抽样试验求得的统计估计量作为原始问题的近似解。用蒙特卡洛方法可有效解决很多难以确定分布形式的变量参数问题[6] [7]。

3. 利用蒙特卡洛模拟方法计算保险合同 VAR 的实例

现有一份来自中民保险网的平安成长健康保障计划，计划中规定，被保险人每次因意外伤害或疾病住院发生的医疗费用扣除 200 元免赔后按以下方式赔偿：200 以上至 4000 元部分，给付 40%比例；4000 元以上至 7000 元部分，给付 50%比例；7000 元以上至 10,000 元部分，给付 60%比例；10,000 元以上至 30,000 元部分，给付 70%比例；30,000 元以上部分，给付 75%比例，分级累进给付住院医疗保险金，累计给付以 10 万元为限[8]。

3.1. 模型假设

为了利用蒙特卡洛模拟法[9]，先对模型作如下假设：

1) 假设现有 n 份上述住院医疗保险合同，投保人都需要向保险公司支付一笔固定的保险费，保险公司则需要根据预期的目标收益率和所承担的风险来确定每份保险合同的价格，使保险公司能够获得最大收益。

2) 如果保险公司需要为某份保险合同支付保险金时，称该份保险合同发生损失。假设每份保险合同发生损失是相互独立事件，并且每份保险合同发生损失的概率为 p。

3) 假设每份保险合同购买者花费的医疗费用为 l，记 $L = l/100{,}000$，其中 100,000 为累计给付的理赔上限，L 表示保险合同购买者花费的医疗费用与累计支付的理赔上限的比值。假设 $\log L$ 服从均值为 μ，方差为 δ 的正态分布，即 $\log L \sim N(\mu, \delta)$。

4) 假设保险公司不对投保人采取任何奖励性计划，投保人也不会放弃领取任何一笔损失赔偿费用，投保人总能按合同的规定得到正常理赔。对于每一份保险合同，都有 200 元的免赔费，即当医疗费用不超过 200 元时，保险公司不给予投保人任何理赔，当医疗费用超过 200 元时，保险公司应扣除 200 元免赔费后按合同规定的比例进行理赔。

3.2. 利用蒙特卡洛模拟算法计算保险合同的 VAR

据上述假设，对现有的 n 份合同分别进行 M 次独立重复试验，每次试验中发生损失的概率为 p，因为损失要么发生，要么不发生，故可用二项分布来判断每份合同是否发生损失。当损失发生时，用对数正态分布来衡量其损失大小，据蒙特卡洛模拟算法可判定每次试验中发生损失的合同份数。为方便计算，用 $l_{i,j}$ 表示第 j 次试验中第 i 份合同的购买者花费的医疗费用，$L_{i,j}$ 表示在第 j 次试验中第 i 份合同的购买者花费的医疗费用与理赔上限的比值，$K_{i,j}$ 表示第 j 次试验中保险公司为第 i 份保险合同购买者支付的理赔费用，即公司承担的损失，其中 $i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, M$，$\log L_{i,j} \sim N(\mu, \delta)$。在已知 $L_{i,j}$ 和可扣除的

赔偿费用的情况下，根据保险合同的规定计算出每次试验中保险公司为每份合同所承担的理赔费用。

1) 当 $l_{i,j} \le 200$ 时， $K_{i,j} = 0$；

2) 当 $200 < l_{i,j} \le 4000$ 时， $K_{i,j} = \left(l_{i,j} - 200\right) \times 40\%$；

3) 当 $4000 < l_{i,j} \le 7000$ 时， $K_{i,j} = 3800 \times 40\% + \left(l_{i,j} - 4000\right) \times 50\%$；

4) 当 $7000 < l_{i,j} \le 10000$ 时， $K_{i,j} = 3800 \times 40\% + 3000 \times 50\% + \left(l_{i,j} - 7000\right) \times 60\%$；

5) 当 $10000 < l_{i,j} \le 30000$ 时， $K_{i,j} = 3800 \times 40\% + 3000 \times 50\% + 3000 \times 60\% + \left(l_{i,j} - 10000\right) \times 70\%$；

6) 当 $l_{i,j} > 30000$ 时， $K_{i,j} = 3800 \times 40\% + 3000 \times 50\% + 3000 \times 60\% + 20000 \times 70\% + \left(l_{i,j} - 30000\right) \times 75\%$;

因为每份合同的累计给付以 10 万元为限，所以规定 $K_{i,j} \le 100000$。

第 j 次试验中公司为每份保险合同所承担的理赔费用之和即为公司的总损失，记第 j 次试验的总损失记为 K_j， $K_j = \sum_{i=1}^{n} K_{i,j}$。考虑到保险公司会向 n 份保险合同的购买者收取固定保险费，估计总保费为 C/M，其中 $C = \sum_{j=1}^{M} K_j$， θ 为保险公司预期的目标收益率。用保险公司的总损失减去总收益即为保险公司的实际总损失，记第 j 次试验中保险公司实际总损失为 A_j，A_j 的表达式为 $A_j = K_j - \theta \dfrac{C}{M}, j = 1, 2, \cdots, M$，我们记 $A' = \left(A_1, A_2, \cdots, A_M\right)$。下面介绍如何根据 A' 计算 n 份保险合同的 VAR。

已知显著性水平 $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$ 和 A_j 的情况下。首先对 A' 中的元素进行升序排列，得到一个新的数列 A。然后计算 $M\alpha$ 的值，如果 $M\alpha$ 是一个整数，那么 $\mathrm{VAR} = A(M\alpha)$，$A(M\alpha)$ 表示数列 A 中的第 $M\alpha$ 个元素。如果 $M\alpha$ 不是整数，那么对 $M\alpha$ 分别进行向上取整和向下取整运算，结果分别记为 l 和 m，总有 $l \ge m$。当 $l = m$ 时，$\mathrm{VAR} = A(m)$，当 $l \ne m$ 时，需要引入权重 ω_1 和 ω_2 来计算 VAR，其中 $\omega_1 = (l - M\alpha)/(l - m), \omega_2 = (M\alpha - m)/(l - m)$，则 $\mathrm{VAR} = A(l)\omega_1 + A(m)\omega_2$。通过以上算法可以计算出 VAR 的值，据前面的假设，保险公司预期的最大损失为 100,000VAR [9]。

4. 利用程序计算 VAR

根据上述算法，利用 matlab 软件编写程序计算 VAR，并输出计算结果。首先，通过分别改变试验次数、均值和方差等参数得到不同的输出结果，比较不同的输出结果来判定该算法是否稳健。其次，我们改变损失发生的概率，观察 VAR 对其依赖性。

在计算过程中，通常取如下参数：保险合同数 $n = 1000$，保险合同发生损失的概率 $p = 0.01$，目标收益率 $\theta = 0.15$，进行的试验次数 $M = 5000$，显著性水平 $\alpha = 0.05$，损失的均值 $\mu = 0.1$，方差 $\delta = 0.25$。

实验一 保持其它参数不变，只改变试验次数 M，观察 VAR 的变化情况

从表 1 可看出，试验次数从 6000 增加到 50,000 的过程中，VAR 的值出现无规律性的波动，每次波动的幅度很小，最大值与最小值的差仅为 0.0004(输出结果保留小数点后四位)。由此可知，VAR 的输出结果不依赖于蒙特卡洛模拟法的试验次数，该方法的数值结果具有一定的可靠性。

实验二 保持其他参数不变，只改变 μ (或 δ)的值，观察 VAR 的变化情况

观察表 2 和表 3 知：VAR 不随 μ (或 δ)的变化而变化，总是围绕某个值上下波动。由此可知，VAR 能代表未来可能出现的预期最大损失，它与预测损失的均值 μ (或方差 δ)的变化无关。当实际发生的损失很小时，VAR 对风险的估计可能过高。但对保险监督部门来说，适当高估风险比低估风险要好的多。

实验三 保持其它参数不变，只改变保险合同发生损失的概率 p，观察 VAR 的变化情况

从表 4 可看出：损失概率 p 从 0.01 增加到 0.1 的过程中，VAR 的绝对值从 0.0015 增加到 0.0112。由此可知，保险合同发生损失的概率 p 是 VAR 的一个决定性因素，即发生损失的概率越大，保险机构在未

Table 1. The relationship between the number of experiment and VAR
表 1. 试验次数 M 与 VAR 的关系

M	5000	6000	7000	8000	9000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000
VAR	−0.0015	−0.0015	−0.0012	−0.0015	−0.0012	−0.0013	−0.0012	−0.0012	−0.0012	−0.0011

Table 2. The relationship between variance and VAR
表 2. 方差 δ 与 VAR 的关系

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
VAR	−0.0011	−0.0013	−0.0011	−0.0011	−0.0014

Table 3. The relationship between mean value and VAR
表 3. 均值 μ 与 VAR 的关系

μ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
VAR	−0.0013	−0.0015	−0.0012	−0.0013	−0.0012

Table 4. The relationship between the probability of the loss and VAR
表 4. 发生损失的概率 p 与 VAR 的关系

p	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
VAR	−0.0015	−0.0028	−0.0035	−0.0045	−0.0054	−0.0067	−0.0088	−0.0093	−0.0099	−0.0112

来一段时间内可能出现的最大损失也就越大。对于很多损失概率很大的保险合同，保险机构无法改变保险合同发生损失的概率，只能通过提高保费来降低风险。因此，在日常生活中，我们会看到危险职业的保险费用要比普通职业的保险费高得多。

5. 蒙特卡洛模拟法与历史数据法的比较

首先，历史数据法也是常用的 VAR 计算方法，但使用该方法必须有真实的历史数据。然而，在现实生活中，由于受多种条件的约束，很多历史数据往往难以收集或不存在。其次，历史数据法的计算结果对历史数据的选取非常敏感，选取不同时期的历史数据往往得到不同的计算结果。而蒙特卡洛模拟法是一种随机模拟法，可以直接产生所需分布的随机数，无需假定真实数据服从正态分布，有效解决了非正态分布问题中遇到的困难[10]。根据大数定理，只要实验次数足够大，随机变量的算术平均值将精确等于它的数学期望，即风险值。

6. 结论

本文通过“平安成长健康保障计划”这一例子介绍了计算保险合同在险价值的蒙特卡洛模拟方法。经检验，蒙特卡洛模拟法在计算保险风险时非常稳定，可用来预测其风险。由于保险机构新推出一份保险计划时，通常没有任何历史数据可参考，无法利用历史数据法来计算在险价值，而蒙特卡洛模拟方法利用随机模拟的原则，不需要任何历史数据就可计算出保险合同的在险价值。所以我们可预见蒙特卡洛模拟法在保险行业中预测风险将得到广泛的应用，本文介绍的方法为相关学者提供参考。

基金项目

本文受到云南省科技厅中青年学术带头人后备人才基金、教育部新世纪优秀人才基金赞助。

参考文献 (References)

[1] 法律出版社编 (2009) 中华人民共和国保险法. 法律出版社, 北京, 5-10.

[2] 吴平 (2012) 基于 VaR 与多尺度分析的保险业风险值估计. *保险研究*, **6**, 89-94.

[3] 张铭丽, 梁第 (2012) 两种 VaR 计算方法的比较. *山东省农业管理干部学院学报*, **29**, 155-156.

[4] Christoffersen, P. (2003) Elements of financial risk management. Academic Press, Waltham, 100-112.

[5] 袁玉洁, 杜灵基 (2006) 应用蒙特卡洛法计算 VaR 的实证分析. *当代经理人*, **27** , 179-180.

[6] 周翔, 杨桂元 (2008) 基于蒙特卡罗模拟的商业银行信用风险度量方法. *技术经济*, **27**, 53-56.

[7] 王宏梅 (2006) 风险度量中的蒙特卡罗方法. *中国水运*, **6**, 159-160.

[8] 中民保险网. http://www.zhongmin.cn/Health/Product/HospitalProductT141-0-30-0.html

[9] Dowd, K. (2006) Measuring market risk. John Wiley & Sons, Hoboken, 240-242.

[10] 陶洵 (2011) 金融风险度量中的 VaR 模型. *财经视点*, **7**, 134-136.